УДК 517.986.32

У. О. Сергієнко (SMK, Київ)

ПРО ЗОБРАЖЕННЯ C^*-АЛГЕБР $O_{n,\alpha}$ ТИПУ КУНЦА

We show that Cuntz type algebras $O_{n,k}$, $n \geq k \geq 2$, and $O_{n,k+1/2}$, $n \geq 4, k \geq 2$, are $*$-wild (this implies the fact that the problem of description of all $*$-representations is very complicated).

Доводиться, що алгебри типу Кунца $O_{n,k}$, $n \geq k \geq 2$, та $O_{n,k+1/2}$, $n \geq 4$, $k \geq 2$, є $*$-дикими (звідки випливає надзвичайна складність задачі опису всіх $*$-зображень цих алгебр).

Алгебри Кунца займають особливе місце в теорії C^*-алгебр та їх зображень. Це пов'язано як з їх багатою внутрішньою структурою та цікавими властивостями, так і з численними застосуваннями в інших галузях математики. Тому не дивно, що алгебри Кунца та різноманітні їх узагальнення є об'єктом активного дослідження на протязі останніх десятиріч.

Ми будемо розглядати одне з узагальнень алгебри Кунца — введені в [1] C^*-алгебри $O_{n,\alpha}$, $\alpha \in \sum_n$, $\alpha > 0$:

$$O_{n,\alpha} = \overline{\mathbb{C}\left\langle s_1,\ldots,s_n,s_1^*,\ldots,s_n^* \;\middle|\; s_i^*s_i = e,\ i = \overline{1,n};\ \sum_{i=1}^{n} s_i s_i^* = \alpha e \right\rangle}$$

де замикання розглядається в розумінні обгортуючої C^*-алгебри (див., наприклад, [2]). Тут $\sum_n$ — множина таких λ, що для деякого набору ортопроекторів $P_1, \ldots, P_n$ виконується умова $P_1 + \ldots + P_n = \lambda \mathbb{I}$ [3]. Умови $\alpha \in \sum_n$ і $\alpha > 0$ є цілком природними, оскільки при інших значеннях α відповідна $*$-алгебра має тільки нульове зображення.

Алгебра $O_{n,1}$ — це алгебра Кунца O_n. Вона ядерна, проста і не типу I [4].

Оскільки C^*-алгебра $O_{n,n}$ співпадає з алгеброю $\mathfrak{U}_n$, породженою n унітарними операторами без співвідношень, то $O_{n,n}$, $n \geq 2$, є $*$-дикою. Тобто задача опису її $*$-зображень надзвичайно складна (відносно $*$-дикості див., наприклад, [1] і бібліографію). У [5, 6] доведено, що $*$-дикими є алгебри $O_{3,3/2}$, $O_{3,2}$ та $O_{4,2}$.

У даній роботі доводиться $*$-дикість C^*-алгебр $O_{n,k}$, де $2 \leq k \leq n$ — ціле, і C^*-алгебр $O_{n,k+1/2}$, $k \geq 2$.

1. Перш ніж перейти до оцінки складності унітарного опису зображень алгебр $O_{n,\alpha}$, нагадаємо означення мажорування C^*-алгебр і $*$-дикості, наслідуючи [1, 5].

Нехай $\mathfrak{A}$ — C^*-алгебра, а $\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$ — категорія $*$-зображень $\mathfrak{A}$. Об'єкти цієї категорії — $*$-зображення $\mathfrak{A}$ лінійними обмеженими операторами в гільбертовому просторі, а її морфізми — сплітаючі оператори. Нехай $\mathfrak{N}$ — ядерна C^*-підалгебра $L(H_0)$, $\pi : \mathfrak{A} \mapsto L(H)$ — зображення $\mathfrak{A}$. Воно індукує зображення

$$\tilde{\pi} = \pi \otimes id : \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{N} \mapsto L(H \otimes H_0)$$

алгебра $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{N}$.

Означення 1. *C^*-алгебра $\mathfrak{B}$ мажорує C^*-алгебру $\mathfrak{A}$ (позначається $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$), якщо існують ядерна C^*-алгебра $\mathfrak{N}$ і унітальний $*$-гомоморфізм*

© У. О. СЕРГІЄНКО, 2002

$\psi : \mathfrak{B} \mapsto \mathfrak{A} \hat{\otimes} \mathfrak{N}$ *(де* $\mathfrak{A} \hat{\otimes} \mathfrak{N}$ *— поповнення їх алгебраїчного тензорного добутку за єдиною внаслідок ядерності* $\mathfrak{N}$ C^**-нормою) такі, що функтор* F : $\operatorname{Rep}\mathfrak{A} \mapsto\mapsto \operatorname{Rep}\mathfrak{B}$ *визначений таким чином:*

1) $F(\pi) = \tilde{\pi} \circ \psi$ *для всіх* $\pi \in \operatorname{Rep}\mathfrak{A}$;

2) $F(A) = A \otimes I$ *для будь-якого оператора* A, *що сплітає* π_1 *та* π_2, *є повним.*

Для того щоб довести повноту функтора F, достатньо показати сюр'єктивність $*$-гомоморфізму ψ [1].

Нехай F_2 — вільна група з двома твірними. Позначимо через $C^*(F_2)$ її групову C^*-алгебру.

Означення 2. *C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ називається $*$-дикою, якщо $\mathfrak{A} \succ C^*(F_2)$.*

2. Має місце наступна теорема.

Теорема 1. *C^*-алгебра $O_{n,2}$ є $*$-дикою для всіх $n \geq 2$.*

Доведення. Алгебра

$$O_{2,2} = \overline{\mathbb{C}\left\langle s_1, s_2, s_1^*, s_2^* \middle| s_1^* s_1 = s_2^* s_2 = e;\ s_1^* s_1 + s_2 s_2^* = 2e \right\rangle} = \mathfrak{U}_2 = C^*(F_2)$$

$*$-дика за означенням. Доведемо $*$-дикість алгебр $O_{n+1,2}$, $n \geq 2$.

Нехай $\pi(O_n) \subset L(H_0)$ — ненульове зображення алгебри Кунца

$$O_n = \overline{\mathbb{C}\left\langle a_1, \ldots, a_n, a_1^*, \ldots, a_n^* \middle| a_i^* a_i = e;\ i = \overline{1, n};\ \sum_{i=1}^{n} a_i a_i^* = e \right\rangle}$$

таке, що $\pi(a_1) = A_1, \ldots, \pi(a_n) = A_n$. Нехай u і v — твірні алгебри $C^*(F_2)$. Задамо відображення ϕ множини твірних алгебри $O_{n+1,2}$ в алгебру $O_n \otimes C^*(F_2)$ таким чином:

$$\phi(s_1) = A_1 \otimes e, \ldots, \phi(s_n) = A_n \otimes e\ ; \qquad \phi(s_{n+1}) = A_1 A_1^* \otimes u + \left(\mathbb{I} - A_1 A_1^*\right) \otimes v.$$

Прямою перевіркою можна пересвідчитися, що відображення ϕ однозначно (очевидним способом) продовжується до $*$-гомоморфізму $*$-алгебр. А оскільки $O_{n+1,2}$ є обгортуючою C^*-алгеброю відповідної $*$-алгебри [2], а побудований $*$-гомоморфізм в $O_n \otimes C^*(F_2)$ можна вважати $*$-зображенням, то існує єдиний $*$-гомоморфізм $\hat{\phi} : O_{n+1,2} \mapsto O_n \otimes C^*(F_2)$, який є продовженням відображення ϕ. Далі,

$$\phi\left(s_1^* s_{n+1} s_1\right) = \left(A_1^* \otimes e\right)\left(A_1 A_1^* \otimes u + \left(\mathbb{I} - A_1 A_1^*\right) \otimes v\right)\left(A_1 \otimes e\right) =$$

$$= \left(A_1^* \otimes e\right)\left(A_1 \otimes u\right) = \mathbb{I} \otimes u,$$

і

$$\phi\left(s_2^* s_{n+1} s_2\right) = \left(A_2^* \otimes e\right)\left(A_1 A_1^* \otimes u + \left(\mathbb{I} - A_1 A_1^*\right) \otimes v\right)\left(A_2 \otimes e\right) =$$

$$= \left(A_2^* \otimes e\right)\left(A_1 A_1^* A_2 \otimes u + \left(A_2 - A_1 A_1^* A_2\right) \otimes v\right) =$$

$$= \left(A_2^* \otimes e\right)\left(A_2 \otimes v\right) = \mathbb{I} \otimes v.$$

Таким чином, $\phi : (O_{n+1,2}) \supset \{ \mathbb{I} \otimes u;\ \mathbb{I} \otimes v;\ \mathbb{I} \otimes u^*;\ \mathbb{I} \otimes v^*;\ A_i \otimes e,\ A_i^* \otimes$ $i = \overline{1, n}\}$. Тобто, образ ϕ щільний в $O_n \otimes C^*(F_2)$, а функтор F повний. Тео рему доведено.

3. Вивчимо зв'язок між C^*-алгебрами $O_{n,\alpha}$ при різних різних значеннях і α. Позначимо через O_1 C^*-алгебру, породжену однією унітарною твірною:

$$O_1 = O_{1,1} = \overline{\mathbb{C}\langle s, s^* \mid s^* s = e = s s^* \rangle}.$$

Зрозуміло, що ця алгебра комутативна, а отже, ядерна.

Твердження 1. *Нехай* $n = l + m$, $l, m \geq 1$; $\alpha = \beta + \gamma$, $\beta \in \Sigma_l$, $\gamma \in \Sigma_m$. *Тоі існує сюр'єктивний гомоморфізм* $\phi : O_{n,\alpha} \mapsto O_{l,\beta} \otimes_{\min} O_{m,\gamma}$.

Доведення. Нехай

$$O_{n,\alpha} = \overline{\mathbb{C}\left\langle s_1, \ldots, s_n, s_1^*, \ldots, a_n^* \;\middle|\; s_i^* s_i = e, \quad i = \overline{1,n}; \quad \sum_{i=1}^{n} s_i s_i^* = \alpha e \right\rangle},$$

$$O_{l,\beta} = \overline{\mathbb{C}\left\langle a_1, \ldots, a_l, a_1^*, \ldots, a_l^* \;\middle|\; a_i^* a_i = e, \quad i = \overline{1,l}; \quad \sum_{i=1}^{l} a_i a_i^* = \beta e \right\rangle},$$

$$O_{m,\gamma} = \overline{\mathbb{C}\left\langle b_1, \ldots, b_m, b_1^*, \ldots, b_m^* \;\middle|\; b_i^* b_i = e, \quad i = \overline{1,m}; \quad \sum_{i=1}^{m} b_i b_i^* = \gamma e \right\rangle}.$$

Задамо відображення ϕ множини твірних алгебри $O_{n,\alpha}$ в алгебру $O_{l,\beta} \otimes_{\min} O_{m,\gamma}$ таким чином:

$$\phi(s_1) = a_1 \otimes e, \ldots, \phi(s_l) = a_l \otimes e,$$

$$\phi(s_{l+1}) = e \otimes b_1, \ldots, \phi(s_{l+m}) = e \otimes b_m.$$

Пряма перевірка показує, що визначальні співвідношення, яким задовольняють s_i, виконуються і для $\phi(s_i)$. Наприклад,

$$\sum_{i=1}^{n} \phi(s_i)(\phi(s_i))^* = \sum_{i=1}^{l} a_i a_i^* \otimes e + \sum_{i=1}^{m} e \otimes b_i b_i^* =$$

$$= \beta e \otimes e + e \otimes (\gamma e) = \alpha e \otimes e.$$

Тобто, відображення ϕ однозначно продовжується до $*$-гомоморфізму

$$\hat{\phi} : O_{n,\alpha} \mapsto O_{l,\beta} \otimes_{\min} O_{m,\gamma}.$$

Сюр'єктивність цього $*$-гомоморфізму очевидна. Твердження доведено.

Наслідок 1. *C^*-алгебра $O_{n,k}$ є $*$-дикою при всіх $n \geq k \geq 2$.*

Доведення. Для C^*-алгебр $O_{n,2}$ $*$-дикість доведена в теоремі 1.

Для C^*-алгебр $O_{n,k}$, $k \geq 3$, існує сюр'єктивний $*$-гомоморфізм $\phi : O_{n,k} \mapsto$ $\mapsto O_{n-k+1} \hat{\otimes} O_{k-1,k-1}$. Тут тензорний добуток C^*-алгебр визначений однозначно внаслідок ядерності O_{n-k+1}.

Але очевидно, що $O_{k-1,k-1} \succ C^*(F_2)$, $k \geq 3$. Тобто, $O_{n,k} \succ C^*(F_2)$. Наслідок доведено.

Наслідок 2. *C^*-алгебра $O_{n,5/2}$ є $*$-дикою при всіх $n \geq 4$.*

Доведення. Існує сюр'єктивний $*$-гомоморфізм

$$\phi: O_{n,5/2} \mapsto O_{3,3/2} \hat{\otimes} O_{n-3}.$$

Тут знову тензорний добуток визначений однозначно. А те, що $O_{3,3/2}$ мажорує $C^*(F_2)$, доведено в [5].

Наслідок 3. *C^*-алгебри $O_{n,k+1/2}$ $(k+1/2 \in \Sigma_n)$ $*$-дикі при будь-яких $k \geq 2$.*

Доведення. Оскільки $k+1/2 \in \Sigma_n$ і $[n-1;n] \cap \Sigma_n = \{n-1;n\}$, то $n-2 \geq \geq k$. Тому $(n, k+1/2) = (3, 3/2) + (k-2, k-2) + (n-k-1, 1)$, і наслідок 3 випливає з твердження 2 і ядерності O_1 та O_{n-k-1}.

Автор висловлює глибоку вдячність науковому керівнику, проф. Ю. С. Самойленку за постановку задачі, поради, обговорення та рецензенту за корисні зауваження.

1. *Ostrovskyi V. L., Samoilenko Yu. S.* Introduction to the theory of representation of finitely presented $*$-algebras // Rev. Math. and Math. Phys. – 1999. – **11**. – P. 1–261.
2. *Хелемский А. Я.* Банаховы и полинормированные алгебры. – М.: Наука, 1989. – 464 с.
3. *Рабанович В., Самойленко Ю. С.* Когда сумма идемпотентов или проекторов кратна единице // Функцион. анализ и прил. – 2000. – **34**, № 4. – С. 91 – 93.
4. *Cuntz J.* Simple C^*-algebras generated by isometries // Commun. Math. Phys. – 1977. – **57**. – P. 173–185.
5. *Pavlenko H., Piryatinska A.* On representations of Cunz type algebras // Methods Funct. Anal. Topol. – 1999. – **5**, № 3. – P. 35–39.
6. *Pavlenko H., Piryatinska A.* On generalization of the Cunz algebras // Proceedings of the third international conference „Symmetry in nonlinear mathematical physics". – 2000. – **2**. – P. 357–363.

Одержано 28.01.2000

До відома читачів!
З технічних причин допущені помилки на сторінках 43, 46, 48–53, 55, 57, 59, 63–69, 71–73, 77

надруковано „ ± " **має бути „ – " („мінус"),**

крім формул

на с. 49 11 та 19 рядки зверху: „$\mathrm{sign}\,\overline{F}_{r,\rho}(t) = \pm\,\mathrm{sign}\sin t$";

на с. 50 останній рядок: „$\mathrm{sign}(\overline{F}_{r,\rho}(t) - \overline{F}_{r,\rho}(\pi/2)) = \pm\,\mathrm{sign}\cos t$";

на с. 51 9 рядок зверху: „$\mathrm{sign}(\overline{F}_{r,\rho}(t) - \overline{F}_{r,\rho}(\pi/2)) = \pm\,\mathrm{sign}\cos t$";

15 рядок зверху: „$\mathrm{sign}\,\overline{F}_{r-1,\rho}(t) = \pm\,\mathrm{sign}\sin t$";

17 рядок зверху: „$\mathrm{sign}\,\overline{F}'_{r,\rho}(t) = \pm\,\mathrm{sign}\sin t$".