УДК 517.5

А. И. Степанец, А. С. Сердюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ S^p

We continue to study approximate properties of the space S^p. We introducea notion of k-th module of continuity and establish direct and indirect theorems of approximation in the space S^p in terms of the best approximations and modules of continuity. These theorems are similar to the well-known Jackson and Bernshtein theorems.

Продовжується вивчення апроксимаційних властивостей простору S^p. Вводиться поняття k-го модуля неперервності та доводяться прямі й обернені теореми наближення в просторі S^p у термінах найкращих наближень і модулів неперервності, подібні до відомих теорем Д. Джексона та С. Н. Бернштейна.

Пусть S^p, $1 \le p < \infty$, — пространство 2π-периодических суммируемых функций f ($f \in L$), заданных на вещественной оси, для которых

$$\|f\|_{S^p} = \left(\sum_{\nu \in Z} \left| \hat{f}(\nu) \right|^p \right)^{1/p} < \infty, \tag{1}$$

где

$$\hat{f}(\nu) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i\nu x}\, dx \tag{2}$$

— коэффициенты Фурье функции f по тригонометрической системе $(2\pi)^{-1/2} e^{i\nu x}$, $\nu \in Z$.

Пространства S^p введены в работе [1] (см. также [2, 3]). Там же исследованы некоторые аппроксимационные свойства таких пространств. В частности, показано, что среди всех сумм вида

$$\sum_{|\nu| \le n-1} \alpha_\nu e^{i\nu x},$$

в которых α_ν — произвольные комплексные числа, при заданном натуральном n ($n \in N$) наименее уклоняется от функции f из S^p ее частная сумма Фурье

$$S_{n-1}(f, x) = \sum_{|\nu| \le n-1} \hat{f}(\nu) \frac{e^{i\nu x}}{\sqrt{2\pi}}. \tag{3}$$

Т. е., если

$$E_n(f)_{S^p} = \inf_{t_{n-1}} \| f - t_{n-1} \|_{S^p}$$

— наилучшее приближение функции $f \in S^p$ тригонометрическими многочленами t_{n-1} порядка $n-1$ в метрике пространства S^p, то справедливы равенства

$$E_n^p(f)_{S^p} = \| f - S_{n-1}(f) \|_{S^p}^p = \sum_{|\nu| \ge n} \left| \hat{f}(\nu) \right|^p. \tag{4}$$

В настоящей работе продолжаются исследования аппроксимационных свойств пространств S^p. Вводится понятие k-го модуля непрерывности и устанавливаются утверждения, подобные известным теоремам Д. Джексона и С. Н. Бернштейна.

Пусть k — любое натуральное число ($k \in N$) и $f \in S^p$. Тогда функцию

$$\omega_k(t)_{S^p} = \omega_k(f, t)_{S^p} = \sup_{|u| \le t} \left\| \Delta_u^k f(\cdot) \right\|_{S^p},$$

где

$$\Delta_u^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x + iu), \tag{5}$$

— конечная разность функции f k-го порядка с шагом u, будем называть модулем непрерывности порядка k функции f. С помощью стандартных в таких случаях рассуждений можно убедиться, что функции $\omega_k(t)_{S^p}$ имеют все основные свойства, характеризующие обычные модули непрерывности. В частности:

а) $\omega_k(0)_{S^p} = 0$;

б) $\omega_k(t)_{S^p}$ не убывает на промежутке $[0, \infty)$;

в) $\omega_k(t)_{S^p}$ непрерывна на $[0, \infty)$;

г) $\omega_k(mt)_{S^p} \le m^k \omega_k(t)_{S^p}$, $m \in N$.

Кроме того, при $k = 1$ функция $\omega_1(t)$ полуаддитивна:

д) $\omega_1(t_1 + t_2)_{S^p} \le \omega_1(t_1)_{S^p} + \omega_1(t_2)_{S^p}$, $t_1 > 0$, $t_2 > 0$.

В данной работе доказываются прямые и обратные теоремы приближения в пространстве S^p в терминах наилучших приближений и модулей непрерывности. Находятся неравенства Джексона вида

$$E_n(f)_{S^p} \le K(\tau) \omega_k\left(f, \frac{\tau}{n}\right)_{S^p}, \quad \tau > 0,$$

и исследуются вопросы о наименьшей константе в этих неравенствах при фиксированных значениях параметров n, k, τ и p, т. е. о величине

$$K_{n,k}(\tau)_{S^p} = \sup\left\{ \frac{E_n(f)_{S^p}}{\omega_k(f, \tau/n)_{S^p}} : \; f \in S^p, \quad f \not\equiv \mathrm{const} \right\}. \tag{6}$$

Рассматриваются также вопросы о конструктивных характеристиках функциональных классов, заданных мажорантами модулей непрерывности их элементов.

1. Прямые теоремы. Основные результаты настоящего пункта содержатся в следующих утверждениях.

Пусть $M(\tau)$ — множество ограниченных и неубывающих функций μ, отличных от констант на сегменте $[0, \tau]$.

Теорема 1. *Пусть* $f \in S^p$, $1 \le p < \infty$, *и* $f \not\equiv \mathrm{const}$. *Тогда при любом* $\tau > 0$ *справедливо неравенство*

$$E_n(f)_{S^p} \le C_{n,k}(\tau)_{S^p} \omega_k\left(f, \frac{\tau}{n}\right)_{S^p}, \quad k, n \in N, \tag{7}$$

где

$$C_{n,k}(\tau)_{S^p} \overset{\mathrm{df}}{=} \left(\inf_{\mu \in M(\tau)} \frac{\mu(\tau) - \mu(0)}{2^{kp/2} I_n(\tau, \mu)} \right)^{1/p}, \tag{8}$$

а

$$I_n(\tau, \mu) = I_{n,k,p}(\tau, \mu) = \inf_{\substack{\nu \ge n \\ \nu \in N}} \int_0^{\tau} \left(1 - \cos\frac{\nu}{n} t\right)^{kp/2} d\mu(t). \tag{9}$$

При этом существует функция $\mu_* \in M(\tau)$, *реализующая в* (8) *точную нижнюю грань. Неравенство* (7) *неулучшаемо на множестве* S^p *в том смысле, что для любых* k *и* $n \in N$ *выполняется равенство*

$$C_{n,k}(\tau)_{S^p} = K_{n,k}(\tau)_{S^p}. \tag{10}$$

Теорема 2. *Для любой функции* $f \in S^p$, $1 \le p < \infty$, *имеют место неравенства*

$$E_n^p(f)_{S^p} \le \frac{1}{2^{kp/2} I_n(kp/2)} \int_0^{\pi} \omega_k^p\left(f, \frac{t}{n}\right)_{S^p} \sin t \, dt, \quad n, k \in N, \tag{11}$$

где

$$I_n(\lambda) \overset{\mathrm{df}}{=} \inf_{\substack{\nu \ge n \\ \nu \in N}} \int_0^{\pi} \left(1 - \cos\frac{\nu}{n} t\right)^{\lambda} \sin t \, dt, \quad \lambda > 0, \quad n \in N. \tag{12}$$

Если при этом $\dfrac{kp}{2} \in N$, *то*

$$I_n\left(\frac{kp}{2}\right) = \frac{2^{kp/2+1}}{kp/2+1} \tag{13}$$

и неравенство (11) *не может быть улучшено ни при каком* $n \in N$.

В следующем утверждении получены не зависящие от n оценки сверху для констант $K_{n,k}(\tau)_{S^p}$ при $\tau = \pi$, которые в ряде важных случаев являются неулучшаемыми.

Теорема 3. *Для любой функции* $f \in S^p$, $1 \le p < \infty$, *и произвольных* k *и* $n \in N$ *справедливы неравенства*

$$K_{n,k}^p(\pi)_{S^p} \le \frac{1}{2^{kp/2-1} I_n(kp/2)} \le \frac{kp/2+1}{2^{kp} + 2^{kp/2-1}(kp/2+1)\sigma(kp/2)}, \tag{14}$$

в которых величины $I_n(\lambda)$ *определены формулой* (12), *а*

$$\sigma(\lambda) \overset{\mathrm{df}}{=} -\sum_{m=[\lambda/2]+1}^{\infty} \binom{\lambda}{2m} \frac{1}{2^{2m-1}} \left(\frac{1-(-1)^{[\lambda]}}{2} \binom{2m}{m} - \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m}{j} \frac{2}{2(m-j)^2 - 1} \right), \tag{15}$$
$$\lambda > 0$$

(*здесь* $[\lambda]$ — *целая часть числа* λ). *Если* $\dfrac{kp}{2} \in N$, *то величина* $\sigma\left(\dfrac{kp}{2}\right)$ *равна нулю и тогда*

$$K_{n,k}^p(\pi)_{S^p} \le \frac{kp/2+1}{2^{kp}}, \quad \frac{kp}{2} \in N, \quad n \in N. \tag{14'}$$

Следующее утверждение показывает равномерную ограниченность констант $K_{n,k}(\pi)_{S^p}$ относительно всех рассматриваемых параметров $(k, n \in N,\ 1 \le p < \infty)$.

Теорема 4. *Для любой отличной от константы функции* $f \in S^p$, $1 \le p < \infty$, *имеют место неравенства*

$$E_n(f)_{S^p} < \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2^{k/2}} \omega_k\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{S^p}, \quad n, k = 1, 2, \ldots. \tag{16}$$

В случае, когда $p = 2$, пространство S^2 — это пространство L_2 функций f из L с конечной нормой

$$\| f \|_{L_2} = \| f \|_2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}.$$

Ввиду важности этого случая приведем формулировки соответствующих утверждений, вытекающих из теорем 2 и 3.

Теорема 2′. *Для любых функций $f \in L_2$ имеет место неравенство*

$$E_n^2(f)_2 \le \frac{k+1}{2^{2k+1}} \int_0^{\pi} \omega_k^2 \left(f, \frac{t}{n} \right)_2 \sin t \, dt, \quad n, k = 1, 2, \ldots . \tag{11′}$$

Неравенство (11′) *не может быть улучшено ни при каких k и $n \in N$.*

Теорема 3′. *Для любой отличной от константы функции $f \in L_2$ имеют место неравенства*

$$E_n(f)_2 < \frac{\sqrt{k+1}}{2^k} \omega_k \left(f, \frac{\pi}{n} \right)_2, \quad n, k = 1, 2, \ldots . \tag{17}$$

Неравенства (11′) и (17) при $k = 1$ доказаны Н. И. Черных в [4, 5]. Он показал, что при $k = 1$ неравенство (17) не может быть улучшено ни при каком $n \in N$, т. е. что выполняется равенство

$$K_{n,1}(\pi)_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{18}$$

Этот результат, в частности, означает, что вес $\mu_*(t) = 1 - \cos t$ для случая $k = 1$, $p = 2$, $\tau = \pi$ реализует нижнюю грань в (8).

При p, стремящихся к бесконечности, неравенства (14) также в определенном смысле неулучшаемы.

Пусть $f \in S^p$. Используя разложение конечной разности $\Delta_u^k f(x)$ k-го порядка с шагом u функции $f(x)$ в ряд Фурье по системе $(2\pi)^{-1/2} e^{ikx}$, $k \in Z$, получаем

$$\left\| \Delta_u^k f(\cdot) \right\|_{S^p}^p = \left\| \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(\cdot + ju) \right\|_{S^p}^p =$$

$$= \sum_{\nu \in Z} \left| \hat{f}(\nu) \right|^p \left| \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} e^{i\nu ju} \right|^p = \sum_{\nu \in Z} \left| \hat{f}(\nu) \right|^p \left| 1 - e^{i\nu u} \right|^{pk} =$$

$$= 2^{kp/2} \sum_{\nu \in Z} \left| \hat{f}(\nu) \right|^p (1 - \cos \nu u)^{kp/2},$$

т. е.

$$\left\| \Delta_u^k f(\cdot) \right\|_{S^p}^p = 2^{kp/2} \sum_{\nu \in Z} \left| \hat{f}(\nu) \right|^p (1 - \cos \nu u)^{kp/2}, \tag{19}$$

и следовательно,

$$\omega_k^p(f, t)_{S^p} = 2^{kp/2} \sup_{0 < u < t} \sum_{\nu \in Z} \left| \hat{f}(\nu) \right|^p (1 - \cos \nu u)^{kp/2}. \tag{20}$$

Вследствие равенств (4) и (20) получаем формулу

$$K_{n,k}^p(\tau)_{S^p} = \sup_{\rho_\nu \ge 0} \frac{\sum_{\nu=n}^{\infty} \rho_\nu}{2^{kp/2} \sup\limits_{0 \le u \le \tau} \sum_{\nu=n}^{\infty} \rho_\nu (1 - \cos(\nu u/n))^{kp/2}}, \tag{21}$$

в которой внешняя верхняя грань рассматривается по всем последовательностям неотрицательных действительных чисел ρ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, таким, что

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \rho_\nu < \infty.$$

Из (21) вытекает, что для произвольных $n, k \in N$, $\tau > 0$, $p \in [1, \infty)$

$$K_{n,k}(\tau)_{S^p} \geq \frac{1}{2^k}. \tag{22}$$

Сопоставляя неравенства (14′) и (22), видим, что оценки сверху и снизу величины $K_{n,p}(\pi)_{S^p}$ при $p \to \infty$ совпадают, поскольку

$$\lim_{p\to\infty}\left(\frac{kp}{2}+1\right)^{1/p} = 1.$$

Это дает основание рассмотреть пространство S^∞ функций $f \in L$ с нормой

$$\| f \|_{S^\infty} = \sup_{\nu\in Z}\left| \hat{f}(\nu)\right|$$

и положить

$$\omega_k(t)_{S^\infty} = \omega_k(f, t)_{S^\infty} = \sup_{|u|\leq t}\left\| \Delta_u^k f(\cdot)\right\|_{S^\infty}.$$

Так же, как и в случае, когда $p \in [1, \infty)$, функции $\omega_k(f, t)_{S^\infty}$ имеют все основные свойства, характеризующие модули непрерывности k-го порядка, и справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Для любой функции $f \in S^\infty$ имеют место неравенства*

$$E_n(f)_{S^\infty} \leq \frac{1}{2^k}\,\omega_k\left(f, \frac{\pi}{n}\right), \quad n, k = 1, 2, \ldots. \tag{23}$$

Константу $\frac{1}{2^k}$ в неравенствах (23) уменьшить нельзя ни при каких натуральных k и n, т. е.

$$K_{n,k}(\pi)_{S^\infty} = \frac{1}{2^k}.$$

Теорему 5 можно рассматривать как предельный случай (при $p = \infty$) теоремы 3. Ее справедливость вытекает из следующих соображений. Поскольку для любой функции f из S^∞

$$E_n(f)_{S^\infty} = \left\| f - S_{n-1}(f)\right\|_{S^\infty} = \max_{|\nu|\geq n}\left| \hat{f}(\nu)\right|,$$

то

$$\omega_k\left(f, \frac{\pi}{n}\right) = \sup_{|u|\leq\pi/n}\left\| \Delta_u^k f(\cdot)\right\|_{S^\infty} = \sup_{|u|\leq\pi/n}\max_{\nu\in Z}\left| \hat{f}(\nu)\right| 2^{k/2}(1-\cos\nu u)^{k/2} \geq$$

$$\geq \sup_{|u|\leq\pi/n}\max_{|\nu|\geq n}\left| \hat{f}(\nu)\right| 2^{k/2}(1-\cos\nu u)^{k/2} =$$

$$= \max_{|\nu|\geq n}\left| \hat{f}(\nu)\right| \sup_{|u|\leq\pi/n} 2^{k/2}(1-\cos\nu u)^{k/2} = \max_{|\nu|\geq n} 2^k\left| \hat{f}(\nu)\right| = 2^k E_n(f)_{S^\infty}. \tag{24}$$

Таким образом, действительно из (24) вытекает (23). Из соотношений в (24) видим, что равенство в (23) будет иметь место, если для функции f выполнены условия $\left|\hat{f}(\nu)\right| = 0$ при $|\nu| < n$. А это и означает, что константу $\frac{1}{2^k}$ в неравенстве (23) уменьшить нельзя.

В случае, когда при фиксированных k и p функция $\omega_k^p(f, \cdot)_{S^p}$ выпукла вверх на промежутке $[0, \pi/n]$, оценка

$$E_n(f)_{S^p} < \frac{1}{2^{k/2-1/p} I_n^{1/p}(kp/2)} \omega_k\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{S^p}, \quad k, n \in N, \ p \in [1, \infty), \quad f \not\equiv \text{const}, \tag{25}$$

вытекающая из теоремы 2, может быть уточнена в том смысле, что величину $\frac{\pi}{n}$ в ней можно заменить на $\frac{\pi}{2n}$. Действительно, если $\omega_k(f, t)^p$ выпукла вверх на $\left[0, \frac{\pi}{n}\right]$, то существует линейная функция $l(t)$ такая, что

$$l\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \omega_k^p\left(f, \frac{\pi}{2n}\right), \quad \omega_k^p(f, t) \le l(t), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{n}\right].$$

Поэтому, представляя интеграл

$$\int_0^\pi \omega_k^p\left(f, \frac{t}{n}\right)_{S^p} \sin t \, dt$$

в виде суммы

$$\int_0^\pi \left(\omega_k^p\left(f, \frac{t}{n}\right)_{S^p} - l\left(\frac{t}{n}\right)\right) \sin t \, dt + \int_0^\pi \left(l\left(\frac{t}{n}\right) - \omega_k^p\left(f, \frac{\pi}{2n}\right)_{S^p}\right) \sin t \, dt +$$

$$+ \omega_k^p\left(f, \frac{\pi}{2n}\right)_{S^p} \int_0^\pi \sin t \, dt, \tag{26}$$

видим, что первое слагаемое в (26) неположительно, а второе — равно нулю. Следовательно,

$$\int_0^\pi \omega_k^p\left(f, \frac{t}{n}\right) \sin t \, dt \le 2\omega_k^p\left(f, \frac{\pi}{2n}\right). \tag{27}$$

Подставляя эту оценку в (11), приходим к выводу, что для любой $f \in S^p$

$$E_n(f)_{S^p} \le \frac{1}{2^{k/2-1/p} I_n^{1/p}(kp/2)} \omega_k\left(f, \frac{\pi}{2n}\right)_{S^p}, \quad k, n \in N, \quad p \in [1, \infty), \tag{28}$$

и значит,

$$E_n(f)_{S^p} \le \left(\frac{kp/2 + 1}{2^{kp} + 2^{kp/2-1}(kp/2+1)\sigma(kp/2)}\right)^{1/p} \omega_k\left(f, \frac{\pi}{2n}\right)_{S^p}, \tag{29}$$

$$p \in [1, \infty), \quad k, n \in N.$$

Полагая в (29) $p = 2$ и $k = 1$, получаем оценку

$$E_n(f)_2 \le \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_1\left(f, \frac{\pi}{2n}\right)_2, \quad n \in N, \tag{29'}$$

справедливую при условии выпуклости вверх функции $\omega^2(f, t)_2$.

Неравенство (29′) получено Н. И. Черных в [5]. Им же доказана и неулучшаемость неравенства (29′).

В некоторых случаях равенство (21) позволяет свести задачу о нахождении точной константы Джексона в пространстве S^p к аналогичной задаче в L_2. Пусть $m = \frac{kp}{2} \in N$. В таком случае, как вытекает из (21), для любых $n \in N$ и $\tau > 0$

$$K^p_{n,k}(\tau)_{S^p} = \sup_{\rho_\nu \geq 0} \frac{\sum_{\nu=n}^{\infty}\rho_\nu}{2^m \sup\limits_{0\leq u\leq\tau} \sum_{\nu=n}^{\infty}\rho_\nu (1-\cos(\nu u/n))^m} = K^2_{n,m}(\tau)_{S^2}. \quad (21')$$

При $\tau = 2\pi$ точные значения величин $K_{n,m}(\tau)_{S^2}$ для произвольных натуральных n и m вычислены в работе [5]. Именно, доказано, что

$$K_{n,m}(2\pi)_{S^2} = \binom{2m}{m}^{-1/2}, \quad n, m \in N. \quad (30)$$

Полагая здесь $m = \frac{kp}{2}$ и используя формулу (19′), приходим к такому утверждению.

***Предложение* 1.** *Пусть* $\frac{kp}{2} \in N$, $k \in N$, $p \in [1, \infty)$. *Тогда для любых* $n \in N$

$$K_{n,k}(2\pi)_{S^p} = \binom{kp}{kp/2}^{-1/p}.$$

В [5] (теорема 2) показано, что в случае, когда $p = 2$ и $\tau = 2\pi$, при любых натуральных k и n вес $\mu_*(t) = -\cos\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\cos t$ реализует точную нижнюю грань в (8). Понятно, что в силу формулы (11′) этот же вес будет экстремальным и в случае, когда $p \geq 1$, $\tau = 2\pi$, $k \in N$, $n \in N$ при условии, что $\frac{kp}{2} \in N$.

***Доказательство теоремы* 1.** При $p = 2$ и $k = 1$ эта теорема доказана в работе А. Г. Бабенко [6]. Доказательство настоящей теоремы во многом повторяет рассуждения из [4–6]. Пусть $f \in S^p$. Исходя из равенства (19), с учетом (4) имеем

$$\left\|\Delta^k_u f(\cdot)\right\|^p_{S^p} \geq \sum_{|\nu|\geq n} \left|\hat{f}(\nu)\right|^p 2^{kp/2}(1-\cos\nu u)^{kp/2} =$$

$$= \frac{2^{kp/2} I_n(\tau,\mu)}{\mu(\tau)-\mu(0)} E^p_n(f)_{S^p} + \sum_{|\nu|\geq n} \left|\hat{f}(\nu)\right|^p 2^{kp/2}\left((1-\cos\nu u)^{kp/2} - \frac{I_n(\tau,\mu)}{\mu(\tau)-\mu(0)}\right), \quad (31)$$

где величина $I_n(\tau,\mu)$ определена равенством (9).

Отсюда для произвольных $t \in [0, \tau]$ находим

$$E^p_n(f)_{S^p} \leq$$

$$\leq \frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{2^{kp/2} I_n(\tau,\mu)} \left(\left\|\Delta^k_{t/n} f(\cdot)\right\|^p_{S^p} - 2^{kp/2} \sum_{|\nu|\geq n} \left|\hat{f}(\nu)\right|^p \left(\left(1-\cos\frac{\nu t}{n}\right)^{kp/2} - \frac{I_n(\tau,\mu)}{\mu(\tau)-\mu(0)}\right)\right). \quad (32)$$

Поскольку обе части неравенства (32) неотрицательны и ряд в его правой части мажорируется на всей действительной оси абсолютно сходящимся числовым рядом

$$\sum_{|\nu|\ge n} \left|\hat{f}(\nu)\right|^p 2^{kp/2+1},$$

то, интегрируя это неравенство по $d\mu(t)$ в пределах от 0 до τ, получаем

$$E_n^p(f)_{S^p}(\mu(\tau)-\mu(0)) \le \frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{2^{kp/2} I_n(\tau,\mu)} \left(\int_0^\tau \left\| \Delta_{t/n}^k f(\cdot) \right\|_{S^p}^p d\mu(t) - \right.$$

$$\left. - 2^{kp/2} \sum_{|\nu|\ge n} \left|\hat{f}(\nu)\right|^p \left(\int_0^\tau \left(1-\cos\frac{\nu t}{n}\right)^{kp/2} d\mu(t) - I_n(\tau,\mu) \right) \right). \tag{33}$$

Второе слагаемое правой части этого неравенства в силу определения величины $I_n(\tau,\mu)$ неотрицательно, поэтому

$$E_n^p(f)_{S^p} \le \frac{1}{2^{kp/2} I_n(\tau,\mu)} \int_0^\tau \left\| \Delta_{t/n}^k f(\cdot) \right\|_{S^p}^p d\mu(t) \le \frac{1}{2^{kp/2} I_n(\tau,\mu)} \int_0^\tau \omega_k^p\left(f, \frac{t}{n}\right) d\mu(t), \tag{34}$$

откуда сразу получаем (7) и оценку

$$K_{n,k}^p(\tau)_{S^p} \le \inf_{\mu\in M(\tau)} \frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{2^{kp/2} I_n(\tau,\mu)} = C_{n,k}^p(\tau)_{S^p}. \tag{35}$$

Остается показать, что соотношение (35) на самом деле является равенством. С этой целью положим

$$W_{n,k,p} = \left\{ \omega(t) = \sum_{\nu=n}^\infty \rho_\nu \left(1-\cos\frac{\nu t}{n}\right)^{kp/2} : \rho_\nu \ge 0, \ \sum_{\nu=n}^\infty \rho_\nu = 1 \right\}$$

и

$$\mathcal{J}_n(\tau) = \mathcal{J}_{n,k,p}(\tau) = \inf_{w\in W_{n,k,p}} \|w\|_{C[0,\tau]}. \tag{36}$$

Из равенства (21) следует

$$K_{n,k}^p(\tau)_{S^p} = \frac{1}{2^{kp/2} \mathcal{J}_n(\tau)}. \tag{37}$$

Далее понадобится соотношение двойственности в пространстве $C[a,b]$ (см., например, [7, с. 30–31]).

Предложение 2. *Если F — выпуклое множество в $C[a,b]$, то для любой функции $x(t)\in C[a,b]$*

$$\inf_{u\in F} \|x(t)-u(t)\|_{C[a,b]} = \sup_{\bigvee_a^b(g)\le 1} \left(\int_a^b x(t)\,dg(t) - \sup_{u\in F} \int_a^b u(t)\,dg(t) \right). \tag{38}$$

Для $x\in C[a,b]\setminus\overline{F}$ ($\overline{F}$ — замыкание множества F) существует функция $g(t)$ с вариацией, равной единице на $[a,b]$, реализующая в (38) точную верхнюю грань.

Легко проверить, что множество $W_{n,k,p}$ является выпуклым подмножеством пространства $C[0,\tau]$, поэтому, используя равенство (38) при $a=0$, $b=\tau$, $x(t)\equiv 0$, $u(t) = w(t)\in W_{n,k,p}$, $F = W_{n,k,p}$, получаем

$$\mathcal{J}_n(\tau) = \inf_{w\in W_{n,k,p}} \|0 - w\|_{C[0,\tau]} = \sup_{\bigvee_0^{\tau}(g)\le 1}\left(0 - \sup_{w\in W_{n,k,p}} \int_0^{\tau} w(t)\,dg(t)\right) =$$

$$= \sup_{\bigvee_0^{\tau}(g)\le 1} \inf_{w\in W_{n,k,p}} \int_0^{\tau} w(t)\,dg(t). \tag{39}$$

При этом в силу предположения 2 существует функция $g_*(t)$, $\bigvee_0^{\tau}(g_*)=1$, реализующая в (39) точную верхнюю грань. Поскольку каждая из функций $w\in W_{n,k,p}$ неотрицательна, то в правой части (39) верхнюю грань достаточно рассматривать по множеству неубывающих функций $\mu(t)$, для которых $\mu(\tau) - \mu(0) \le 1$. Но для таких функций в силу определений величины $I_n(\tau,\mu)$ (см. (9)) и множества $W_{n,k,p}$ справедливо равенство

$$\inf_{w\in W_{n,k,p}} \int_0^{\tau} w(t)\,d\mu(t) = I_n(\tau,\mu). \tag{40}$$

Из сказанного следует, что существует функция $\mu_*\in M(\tau)$, для которой $\mu_*(\tau)-\mu_*(0)=1$ и

$$I_n(\tau,\mu_*) = \sup_{\substack{\mu\in M(\tau)\\ \bigvee_0^{\tau}(\mu)\le 1}} I_n(\tau,\mu) = \mathcal{J}_n(\tau). \tag{41}$$

Из формул (35), (37) и (41) вытекает равенство

$$K^p_{n,k}(\tau)_{S^p} = \frac{1}{2^{kp/2} I_n(\tau,\mu_*)} = \frac{\mu_*(\tau)-\mu_*(0)}{2^{kp/2} I_n(\tau,\mu_*)} = C^p_{n,k}(\tau)_{S^p}.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Неравенство (11) получается из (34), если в нем положить $\tau=\pi$ и $\mu(t)=1-\cos t$, $t\in[0,\pi]$. Если при этом $\frac{kp}{2}\in N$, то справедливо равенство (13). Действительно, поскольку

$$\int_0^{\pi}(1-\cos t)^{\lambda}\sin t\,dt = \frac{2^{\lambda+1}}{\lambda+1}, \quad \lambda\ge 0, \tag{42}$$

то, воспользовавшись при $\lambda\in N$ разложением

$$(1-x)^{\lambda} = 1 + \sum_{m=1}^{\lambda}(-1)^m\binom{\lambda}{m}x^m,$$

положив в нем $\cos\theta t$ вместо x, для любого $\theta\ge 1$ получим

$$\int_0^{\pi}(1-\cos\theta t)^{\lambda}\sin t\,dt - \frac{2^{\lambda+1}}{\lambda+1} = \int_0^{\pi}\left((1-\cos\theta t)^{\lambda}-(1-\cos t)^{\lambda}\right)\sin t\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi}\sum_{m=0}^{\lambda}(-1)^m\binom{\lambda}{m}\left(\cos^m\theta t-\cos^m t\right)\sin t\,dt =$$

$$= \sum_{m=1}^{\lambda}(-1)^m\binom{\lambda}{m}\int_0^{\pi}\left(\cos^m\theta t-\cos^m t\right)\sin t\,dt. \tag{43}$$

Покажем, что для любого $\theta > 1$ и произвольных $m \in N$

$$\int_0^\pi \left(\cos^{2m}\theta t - \cos^{2m} t\right)\sin t\,dt \;\geq\; 0, \tag{44}$$

и

$$\int_0^\pi \left(\cos^{2m-1}\theta t - \cos^{2m-1} t\right)\sin t\,dt \;=\; \int_0^\pi \cos^{2m-1}\theta t \sin t\,dt \;\leq\; 0. \tag{44'}$$

Имеем

$$\cos^{2m} x \;=\; \frac{1}{2^{2m}}\left(\sum_{j=0}^{m-1} 2\binom{2m}{j}\cos 2(m-j)x + \binom{2m}{m}\right), \tag{45}$$

а значит,

$$\int_0^\pi \left(\cos^{2m}\theta t - \cos^{2m} t\right)\sin t\,dt \;=$$

$$=\; \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{2m}{j}\int_0^\pi (\cos 2(m-j)\theta t - \cos 2(m-j)t)\sin t\,dt. \tag{46}$$

Используя формулу

$$\int \sin at \cos bt\,dt \;=\; -\frac{\cos(a+b)t}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)t}{2(a-b)}, \quad a^2 \neq b^2, \tag{47}$$

при $a = 1,\; b = 2(m-j)\theta$, получаем

$$\int_0^\pi (\cos 2(m-j)\theta t - \cos 2(m-j)t)\sin t\,dt \;=$$

$$=\; \frac{2}{(2(m-j))^2 - 1} - \frac{1 + \cos 2(m-j)\theta\pi}{(2(m-j)\theta)^2 - 1} \;\geq\; 0. \tag{48}$$

Из соотношений (46) и (48) вытекает (44).

Для доказательства (44′) воспользуемся равенством

$$\int_0^\pi \cos^{2m-1} t \sin t\,dt \;=\; 0,$$

а также представлением

$$\cos^{2m-1} x \;=\; \frac{1}{2^{2m-2}}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{2m-1}{j}\cos(2m-2j-1)x. \tag{49}$$

Тогда

$$\int_0^\pi \left(\cos^{2m-1}\theta t - \cos^{2m-1} t\right)\sin t\,dt \;=\; \frac{1}{2^{2m-2}}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{2m-1}{j}\int_0^\pi \cos(2m-2j-1)\theta t \sin t\,dt. \tag{50}$$

Применяя формулу (47) при $a = 1,\; b = (2m-2j-1)\theta$, получаем

$$\int_0^\pi \cos(2m-2j-1)\theta t \sin t\,dt \;=\; -\frac{1 + \cos(2m-2j-1)\theta\pi}{((2m-2j-1)\theta)^2 - 1} \;\leq\; 0. \tag{51}$$

Из (50) и (51) вытекает соотношение (44′).

Таким образом, на основании (43), (44) и (44′) получаем неравенство

$$\int_0^\pi (1-\cos\theta t)^\lambda \sin t\,dt \ \geq\ \frac{2^{\lambda+1}}{\lambda+1}, \qquad \theta \geq 1, \quad \lambda \in N, \tag{52}$$

которое является равенством при $\theta = 1$. Полагая в (52) $\lambda = \dfrac{kp}{2}$, $\theta = \dfrac{\nu}{n}$, $\nu = n$, $n+1, \ldots$, приходим к (13).

Для доказательства неулучшаемости неравенства (11) при $\dfrac{kp}{2} \in N$ достаточно убедиться, что для функции

$$f_n(x) \ =\ \gamma + \beta e^{-nx} + \delta e^{nx},$$

где γ, β, δ — произвольные комплексные числа,

$$E_n^p(f_n)_{S^p} \ =\ \frac{kp/2+1}{2^{kp+1}} \int_0^\pi \omega_k^p\left(f_n, \frac{t}{n}\right)_{S^p} \sin t\,dt, \qquad p \geq 1, \quad k, n \in N. \tag{53}$$

В рассматриваемом случае функция

$$\left\| \Delta_{t/n}^k f_n(\cdot) \right\|_{S^p}^p \ =\ 2^{kp/2}(2\pi)^{p/2}\left(|\beta|^p + |\delta|^p\right)(1-\cos t)^{kp/2} \tag{54}$$

не убывает по t на $[0, \pi]$. Поэтому

$$\omega_k\left(f_n, \frac{t}{n}\right)_{S^p} \ =\ \left\| \Delta_{t/n}^k f_n(\cdot) \right\|_{S^p};$$

кроме того,

$$\left|\hat{f}_n(\nu)\right| \ =\ 0, \quad 0 < |\nu| < n,$$

и

$$\sum_{|\nu| \geq n} \left|\hat{f}_n(\nu)\right|^p \left(2^{kp/2} \int_0^\pi \left(1 - \cos\frac{\nu}{n}t\right)^{kp/2} \sin t\,dt \ -\ \frac{2^{kp+1}}{kp/2+1}\right) =$$

$$= \ (2\pi)^{p/2}\left(|\beta|^p + |\delta|^p\right)\left(2^{kp/2} \int_0^\pi (1-\cos t)^{kp/2} \sin t\,dt \ -\ \frac{2^{kp+1}}{kp/2+1}\right) \ =\ 0. \tag{55}$$

Учитывая эти факты, приходим к выводу, что при $\tau = \pi$ для веса $\mu(t) = 1 - \cos t$ и функции $f = f_n$ формулы (31) – (34) являются равенствами.

Доказательство теоремы 3. Первое неравенство в (14), а также неравенство (14′) вытекают непосредственно из теоремы 2. Остается доказать, что

$$I_n\left(\frac{kp}{2}\right) \geq \frac{2^{kp/2+1}}{kp/2+1} + \sigma\left(\frac{kp}{2}\right), \quad k, n \in N. \tag{56}$$

Соотношение (56) будет следовать из неравенства

$$\int_0^\pi (1-\cos\theta t)^\lambda \sin t\,dt \ \geq\ \frac{2^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \sigma(\lambda), \qquad \theta \geq 1, \quad \lambda > 0, \tag{57}$$

справедливость которого вытекает из следующих соображений. Используя разложение функции $(1-x)^\lambda$ в биномиальный ряд и учитывая равномерную сходимость последнего на сегменте $[-1,1]$, а также формулы (42), (45), (46) и (48) – (51), при любых $\theta > 0$ и $\lambda > 0$ можно записать

$$\Delta(\theta,\lambda) \overset{\mathrm{df}}{=} \int_0^{\pi}(1-\cos\theta t)^{\lambda}\sin t\,dt - \left(\frac{2^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \sigma(\lambda)\right) =$$

$$= \int_0^{\pi}\left((1-\cos\theta t)^{\lambda} - (1-\cos t)^{\lambda}\right)\sin t\,dt - \sigma(\lambda) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\binom{\lambda}{2m-1}\frac{1}{2^{2m-2}}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{2m-1}{j}\frac{1+\cos(2m-2j-1)\theta\pi}{((2m-2j-1)\theta)^2-1} -$$

$$- \sum_{m=1}^{\infty}\binom{\lambda}{2m}\frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{2m}{j}\frac{1+\cos(2(m-j)\theta\pi)}{(2(m-j)\theta)^2-1} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\binom{\lambda}{2m}\frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{2m}{j}\frac{2}{(2(m-j))^2-1} - \sigma(\lambda). \tag{58}$$

Предположим сначала, что $[\lambda]$ четно. В этом случае

$$\binom{\lambda}{2m-1} > 0, \quad m = 1,2,\ldots,\left[\frac{\lambda}{2}\right]; \qquad \binom{\lambda}{2m-1} \geq 0, \quad m = \left[\frac{\lambda}{2}\right]+1, \left[\frac{\lambda}{2}\right]+2,\ldots; \tag{59}$$

$$\binom{\lambda}{2m} > 0, \quad m = 0,1,2,\ldots,\left[\frac{\lambda}{2}\right]; \qquad \binom{\lambda}{2m} \leq 0, \quad m = \left[\frac{\lambda}{2}\right]+1, \left[\frac{\lambda}{2}\right]+2,\ldots, \tag{59'}$$

и тогда согласно (58)

$$\Delta(\theta,\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty}\binom{\lambda}{2m-1}\frac{1}{2^{2m-2}}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{2m-1}{j}\frac{1+\cos((2m-2j-1)\theta\pi)}{((2m-2j-1)\theta)^2-1} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{[\lambda/2]}\binom{\lambda}{2m}\frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{2m}{j}\left(\frac{2}{(2(m-j))^2-1} - \frac{1+\cos(2(m-j)\theta\pi)}{(2(m-j)\theta)^2-1}\right) +$$

$$+ \left(-\sum_{m=[\lambda/2]+1}^{\infty}\binom{\lambda}{2m}\frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{2m}{j}\frac{1+\cos(2(m-j)\theta\pi)}{(2(m-j)\theta)^2-1}\right). \tag{60}$$

Отсюда, используя соотношения (59) и (59′), видим, что каждое из слагаемых в правой части равенства (60) неотрицательно и, следовательно, справедливо (57).

Пусть теперь $[\lambda]$ нечетно. Тогда

$$\binom{\lambda}{2m} > 0, \quad m = 0,1,\ldots,\left[\frac{\lambda}{2}\right]; \qquad \binom{\lambda}{2m} \geq 0, \quad m = \left[\frac{\lambda}{2}\right]+1, \left[\frac{\lambda}{2}\right]+2,\ldots, \tag{61}$$

$$\binom{\lambda}{2m+1} > 0, \quad m = 0,1,\ldots,\left[\frac{\lambda}{2}\right]; \qquad \binom{\lambda}{2m+1} \leq 0, \quad m = \left[\frac{\lambda}{2}\right]+1, \left[\frac{\lambda}{2}\right]+2,\ldots, \tag{61'}$$

и

$$\Delta(\theta,\lambda) = \sum_{m=1}^{[\lambda/2]}\binom{\lambda}{2m}\frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{2m}{j}\left(\frac{2}{(2(m-j))^2-1}-\frac{1+\cos(2(m-j)\theta\pi)}{(2(m-j)\theta)^2-1}\right)+$$

$$+\sum_{m=0}^{[\lambda/2]}\binom{\lambda}{2m+1}\frac{1}{2^{2m}}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{2m+1}{j}\frac{1+\cos((2m-2j+1)\theta\pi)}{((2m-2j+1)\theta)^2-1}+$$

$$+\left\{\sum_{m=[\lambda/2]+1}^{\infty}\binom{\lambda}{2m}\frac{1}{2^{2m-1}}\binom{2m}{m}-\frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{2m}{j}\frac{1+\cos(2(m-j)\theta\pi)}{(2(m-j)\theta)^2-1}+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=[\lambda/2]+1}^{\infty}\binom{\lambda}{2m+1}\frac{1}{2^{2m}}\sum_{j=0}^{m}\binom{2m+1}{j}\frac{1+\cos((2m-2j+1)\theta\pi)}{((2m-2j+1)\theta)^2-1}\right\}. \qquad (62)$$

Учитывая (61) и (61′), приходим к выводу, что первые два слагаемые в правой части равенства (62) неотрицательны. Чтобы убедиться в неотрицательности и слагаемого в фигурных скобках, заметим, что это выражение равно величине

$$\sum_{m=[\lambda/2]+1}^{\infty}\left(\binom{\lambda}{2m}\int_0^{\pi}\cos^{2m}\theta t\sin t\,dt-\binom{\lambda}{2m+1}\int_0^{\pi}\cos^{2m+1}\theta t\sin t\,dt\right),$$

которая заведомо неотрицательна. Этим неравенство (57) доказано при $\theta>1$. Так как для любого $\lambda>0$ $\sigma(\lambda)\le 0$, то на основании (44) убеждаемся в справедливости (57) и в случае $\theta=1$.

***Доказательство теоремы* 4.** Покажем сначала, что

$$I_n(\lambda)\ \ge\ 2\quad \forall\,\lambda\ge 1. \qquad (63)$$

Если $[\lambda]$ — четное число, то, используя неравенства (44′) и (59) для любого $\theta\ge 1$, имеем

$$\int_0^{\pi}(1-\cos\theta t)^{\lambda}\sin t\,dt\ =\ \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\binom{\lambda}{m}\int_0^{\pi}\cos^m\theta t\sin t\,dt\ \ge$$

$$\ge\ \sum_{m=0}^{\infty}\binom{\lambda}{2m}\int_0^{\pi}\cos^{2m}\theta t\sin t\,dt\ =\ \int_0^{\pi}\frac{(1+\cos\theta t)^{\lambda}+(1-\cos\theta t)^{\lambda}}{2}\sin t\,dt. \qquad (64)$$

При $\lambda\ge 1$ функция u^{λ} выпукла вниз, поэтому

$$\frac{(1+\cos\theta t)^{\lambda}+(1-\cos\theta t)^{\lambda}}{2}\ \ge\ 1,$$

и следовательно,

$$\int_0^{\pi}\frac{(1+\cos\theta t)^{\lambda}+(1-\cos\theta t)^{\lambda}}{2}\sin t\,dt\ \ge\ \int_0^{\pi}\sin t\,dt\ =\ 2. \qquad (65)$$

Сопоставляя формулы (64) и (65) и учитывая произвольность выбора параметра $\theta\ge 1$, получаем (63). Если $[\lambda]$ — нечетное число, то, используя неравенство (57) и замечая, что в этом случае

$$\sigma(\lambda)\ =\ -\sum_{m=[\lambda/2]+1}^{\infty}\binom{\lambda}{2m}\int_0^{\pi}\cos^{2m}\theta t\sin t\,dt\qquad([\lambda]\ \text{нечетно}),$$

имеем

$$I_n(\lambda) \geq \frac{2^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \sigma(\lambda) = \sum_{m=0}^{[\lambda/2]} \binom{\lambda}{2m} \int_0^{\pi} \cos^{2m}\theta t \sin t\, dt \geq 2. \tag{66}$$

Неравенство (63) доказано. Покажем далее, что

$$I_n(\lambda) \geq 1 + 2^{\lambda-1}, \quad \lambda \in (0, 1). \tag{67}$$

Поскольку в этом случае $[\lambda] = 0$, то из (57) и (15) следует

$$I_n(\lambda) \geq \frac{2^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{\lambda}{2m} \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m}{j} \frac{2}{(2(m-j))^2 - 1} =$$

$$= 2\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{\lambda}{2m} \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m}\right) =$$

$$= 2 + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{\lambda}{2m} + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{\lambda}{2m} \left(\frac{1}{2^{2m-1}} \binom{2m}{m} - 1\right) =$$

$$= 1 + 2^{\lambda-1} + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{\lambda}{2m} \left(\frac{1}{2^{2m-1}} \binom{2m}{m} - 1\right). \tag{68}$$

В силу (59′) и неравенства $\binom{2m}{m} \leq 2^{2m-1}$, $m \in N$, приходим к заключению, что сумма в правой части (68) неотрицательна и, следовательно, справедливо (67).

Объединяя (63) и (67) при $\lambda = \frac{kp}{2}$, $k \in N$, $p \in [1, \infty)$, имеем

$$I_n\left(\frac{kp}{2}\right) \geq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{69}$$

Поэтому в силу (14) и (69)

$$K_{n,k}(\pi)_{S^p} \leq \frac{1}{2^{k/2}} \left(\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{1/p}, \tag{70}$$

откуда и следует (16).

2. Обратные теоремы.

Теорема 6. *Если* $f \in S^p$, $p \geq 1$, *то для любых натуральных* k *и* n *справедливо неравенство*

$$\omega_k\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{S^p} \leq \frac{\pi^k}{n^k} \left(\sum_{\nu=1}^{n} \left(\nu^{kp} - (\nu-1)^{kp}\right) E_\nu^p(f)_{S^p}\right)^{1/p}. \tag{71}$$

Доказательство. Пусть $f \in S^p$ и $u \in \left[0, \frac{\pi}{n}\right]$. Тогда с учетом (19)

$$\| \Delta_u^k f(\cdot) \|_{S^p}^p = 2^{kp/2} \sum_{\nu \in Z} \left| \hat{f}(\nu) \right|^p (1 - \cos \nu u)^{kp/2} =$$

$$= 2^{kp} \sum_{|\nu| \leq n-1} \left| \hat{f}(\nu) \right|^p \left| \sin \frac{\nu u}{2} \right|^{kp/2} + 2^{kp} \sum_{|\nu| \geq n} \left| \hat{f}(\nu) \right|^p \left| \sin \frac{\nu u}{2} \right|^{kp}. \tag{72}$$

Очевидно, что второе слагаемое правой части (72) не превышает величины

$$2^{kp}\sum_{|\nu|\geq n}\left|\hat{f}(\nu)\right|^{p} = 2^{kp}E_{\nu}^{p}(f)_{S^{p}}$$

и

$$2^{kp}\sum_{|\nu|\leq n-1}\left|\hat{f}(\nu)\right|^{p}\left|\sin\frac{\nu u}{2}\right|^{kp} = 2^{kp}\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(\left|\hat{f}(\nu)\right|^{p}+\left|\hat{f}(-\nu)\right|^{p}\right)\sin^{kp}\frac{\nu u}{2} \leq$$

$$\leq \left(\frac{\pi}{n}\right)^{kp}\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu^{kp}\left(\left|\hat{f}(\nu)\right|^{p}+\left|\hat{f}(-\nu)\right|^{p}\right).$$

Поэтому

$$\left\|\Delta_{u}^{k}f(\cdot)\right\|_{S^{p}}^{p} \leq 2^{kp}E_{n}^{p}(f)_{S^{p}} + \left(\frac{\pi}{n}\right)^{kp}\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu^{kp}\left(\left|\hat{f}(\nu)\right|^{p}+\left|\hat{f}(-\nu)\right|^{p}\right). \tag{73}$$

Далее нам понадобится следующее утверждение, которое проверяется непосредственно.

Лемма 1. *Пусть сходится числовой ряд*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}c_{\nu}.$$

Тогда для любой последовательности α_{ν}, $\nu\in N$, *при всех натуральных* m *и* M, $m\leq M$, *справедливо равенство*

$$\sum_{\nu=m}^{M}\alpha_{\nu}c_{\nu} = \alpha_{m}\sum_{\nu=m}^{\infty}c_{\nu} + \sum_{\nu=m+1}^{M}\left(\alpha_{\nu}-\alpha_{\nu-1}\right)\sum_{i=\nu}^{\infty}c_{i} - \alpha_{M}\sum_{\nu=M+1}^{\infty}c_{\nu}. \tag{74}$$

Полагая в (74) $\alpha_{\nu}=\nu^{kp}$, $c_{\nu}=\left|\hat{f}(\nu)\right|^{p}+\left|\hat{f}(-\nu)\right|^{p}$, $m=1$ и $M=n-1$, имеем

$$\left(\frac{\pi}{n}\right)^{kp}\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu^{kp}\left(\left|\hat{f}(\nu)\right|^{p}+\left|\hat{f}(-\nu)\right|^{p}\right) =$$

$$= \left(\frac{\pi}{n}\right)^{kp}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\left|\hat{f}(\nu)\right|^{p}+\left|\hat{f}(-\nu)\right|^{p}\right) +\right.$$

$$+\sum_{\nu=2}^{n-1}\left(\nu^{kp}-(\nu-1)^{kp}\right)\sum_{i=\nu}^{\infty}\left(\left|\hat{f}(i)\right|^{p}+\left|\hat{f}(-i)\right|^{p}\right) -$$

$$\left. - (n-1)^{kp}\sum_{\nu=n}^{\infty}\left(\left|\hat{f}(\nu)\right|^{p}+\left|\hat{f}(-\nu)\right|^{p}\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{\pi}{n}\right)^{kp}\left(\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(\nu^{kp}-(\nu-1)^{kp}\right)E_{\nu}^{p}(f)_{S^{p}} - (n-1)^{kp}E_{n}^{p}(f)_{S^{p}}\right). \tag{75}$$

Следовательно,

$$\left\|\Delta_{u}^{k}f(\cdot)\right\|_{S^{p}}^{p} \leq$$

$$\le \left(\frac{\pi}{n}\right)^{kp}\left(\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(\nu^{kp}-(\nu-1)^{kp}\right)E_\nu^p(f)_{S^p}-(n-1)^{kp}E_n^p(f)_{S^p}\right)+2^{kp}E_n^p(f)_{S^p} \le$$

$$\le \left(\frac{\pi}{n}\right)^{kp}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\nu^{kp}-(\nu-1)^{kp}\right)E_\nu^p(f)_{S^p}, \qquad (76)$$

откуда и вытекает (71).

При каждом фиксированном $k\in N$ на всем пространстве S^p, $p\in[1,\infty)$, неравенство (71) по порядку улучшено быть не может. Действительно, для любой $f\in S^p$, при любых $k,n\in N$

$$\omega_k^p\left(f,\frac{\pi}{n}\right)_{S^p} \ge \left\|\Delta_{\pi/n}^k f(\cdot)\right\|_{S^p}^p = 2^{kp}\sum_{\nu\in Z}\left|\hat f(\nu)\right|^p\left|\sin\frac{\nu\pi}{2n}\right|^{kp} \ge$$

$$\ge 2^{kp}\sum_{|\nu|\le n}\left|\hat f(\nu)\right|^p\left|\sin\frac{\nu\pi}{2n}\right|^{kp} \ge \left(\frac{2}{n}\right)^{kp}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{kp}\left(\left|\hat f(\nu)\right|^p+\left|\hat f(-\nu)\right|^p\right). \qquad (77)$$

Применяя к последней сумме равенство (74) при $\alpha_\nu=\nu^{kp}$, $c_\nu=\left|\hat f(\nu)\right|^p+\left|\hat f(-\nu)\right|^p$, $m=1$ и $M=n$, получаем

$$\omega_k^p\left(f,\frac{\pi}{n}\right)_{S^p} \ge \frac{2^{kp}}{n^{kp}}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\left(\nu^{kp}-(\nu-1)^{kp}\right)E_\nu^p(f)_{S^p}-n^{kp}E_{n+1}^p(f)_{S^p}\right). \qquad (78)$$

Если f — тригонометрический полином T_n степени не выше n, то $E_{n+1}(T_n)_{S^p}=0$, поэтому в силу (71) и (78)

$$\frac{2^k}{n^k}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\left(\nu^{kp}-(\nu-1)^{kp}\right)E_\nu^p(T_n)_{S^p}\right)^{1/p} \le \omega_k\left(T_n,\frac{\pi}{n}\right)_{S^p} \le$$

$$\le \frac{\pi^k}{n^k}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\left(\nu^{kp}-(\nu-1)^{kp}\right)E_\nu^p(T_n)_{S^p}\right)^{1/p}.$$

Поскольку $\nu^{kp}-(\nu-1)^{kp}\le kp\,\nu^{kp-1}$, то из (71) получаем

$$\omega_k\left(f,\frac{\pi}{n}\right)_{S^p} \le \frac{\pi^k(kp)^{1/p}}{n^k}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{kp-1}E_\nu^p(f)_{S^p}\right)^{1/p}. \qquad (71')$$

Отсюда, в частности, вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Если последовательность наилучших приближений* $E_n(f)_{S^p}$ *функции* f *из* S^p, $1\le p<\infty$, *при некотором* $\alpha>0$ *удовлетворяет соотношению*

$$E_n(f)_{S^p} = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

то для любых $k\in N$

$$\omega_k(f,t)_{S^p} = \begin{cases} O(t^\alpha), & \text{когда } \alpha<k,\\ O\left(t^k|\ln t|^{1/p}\right), & \text{когда } \alpha=k,\\ O(t^k), & \text{когда } \alpha>k.\end{cases}$$

Для пространств L_p 2π-периодических интегрируемых в p-й степени функций с нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, \quad p \geq 1,$$

неравенства типа (71′) получены в работе [8] (см. также [9, с. 351]).

3. Конструктивные характеристики классов функций, определяемых k-ми модулями непрерывности. Будем говорить, что функция $\varphi(t)$, $0 \leq t \leq \pi$, принадлежит классу Φ, и писать $\varphi \in \Phi$, если выполнены следующие условия:

1) $\varphi(t)$ непрерывна на $[0, \pi]$;
2) $\varphi(t)$ монотонно возрастает;
3) $\varphi(0) = 0$.

Обозначим через H^{ω}_{k,S^p}, $k \in N$, $\omega \in \Phi$, класс всех функций $f \in S^p$, $1 \leq p < \infty$, для которых

$$\omega_k(f, t)_{S^p} \leq C\omega(t), \tag{79}$$

где C — какая-нибудь положительная константа, вообще говоря, различная для различных функций.

Скажем, что некоторая функция $\varphi \in \Phi$ удовлетворяет условию (B_r), $r \geq 1$, если

$$\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{r-1}\varphi\left(\frac{1}{\nu}\right) = O\left(n^r\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Условие (B_r) при $r \in N$ введено в работах Н. К. Бари (см., например, [10–12]).

Теорема 7. *Пусть $\omega(t) \in \Phi$ такова, что $\omega^p(t)$, $p \geq 1$, удовлетворяет условию (B_{kp}). Тогда для того чтобы функция $f \in S^p$ принадлежала классу H^{ω}_{k,S^p}, необходимо и достаточно, чтобы*

$$E_n(f)_{S^p} = O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Доказательство. Пусть $f \in H^{\omega}_{k,S^p}$. Согласно теореме 4

$$E_n(f)_{S^p} = O\left(\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_{S^p}\right), \quad f \in S^p, \tag{80}$$

поэтому из (79) вытекает (80). С другой стороны, согласно (71′)

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_{S^p} \leq \frac{A_k}{n^k}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{kp-1}E_{\nu}^{p}(f)_{S^p}\right)^{1/p}, \quad f \in S^p,$$

следовательно, с учетом (79) получаем

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_{S^p} = O\left(\frac{1}{n^k}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{kp-1}\omega^p\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)^{1/p}\right). \tag{81}$$

Поскольку ω^p удовлетворяет условию (B_{kp}), то

$$\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{kp-1}\omega^p\left(\frac{1}{\nu}\right) = O\left(n^{kp}\omega^p\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{82}$$

Сопоставляя формулы (81) и (82), получаем соотношение (79).

Функция $\varphi(t) = t^{\alpha}$, $\alpha < r$, удовлетворяет условию (B_r). Поэтому, обозначая через H^{α}_{k,S^p} класс H^{ω}_{k,S^p} при $\omega(t) = t^{\alpha}$, $0 < \alpha \le k$, получаем такое утверждение.

Следствие 2. *Пусть* $k \in N$, $0 < \alpha < k$. *Для того чтобы функция* $f \in S^p$ *принадлежала* H^{α}_{k,S^p}, $p \ge 1$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$E_n(f)_{S^p} = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right).$$

4. Замечания для случая $p \in (0, 1)$. Определение пространств S^p имеет смысл при всех $p > 0$. В случае $p \in (0, 1)$ оно представляет собой линейное метрическое пространство с метрикой

$$\rho(f, g) = \| f - g \|_{S^p} = \left(\sum_{\nu \in Z} \left| \hat{f}_n(\nu) - \hat{g}(\nu) \right|^p \right)^{1/p}.$$

Так же, как и в случае $p \ge 1$, для функции $f \in S^p$, $p \in (0, 1)$, через $E_n(f)_{S^p}$ обозначим ее наилучшее приближение тригонометрическими многочленами t_{n-1} порядка $n-1$ в метрике S^p, а через $\omega_k(f, t)_{S^p}$, $p \in (0, 1)$, — ее k-й модуль непрерывности, т. е.

$$E_n(f) = \inf_{t_{n-1}} \left\| f - t_{n-1} \right\|_{S^p},$$

$$\omega_k(f, t)_{S^p} = \sup_{|u| \le t} \left\| \Delta^k_u f(\cdot) \right\|_{S^p}, \quad p \in (0, 1), \quad k \in N.$$

Анализируя доказательства теорем 1 – 3, можно убедиться, что условие $1 \le p < < \infty$ не принципиально и может быть заменено условием $0 < p < \infty$; при этом утверждения всех трех теорем остаются в силе.

Аналогом теоремы 4 в случае, когда $p \in (0, 1)$, является следующее утверждение.

Теорема 4′. *Если* $f \in S^p$, $p \in (0, 1)$, *то*

$$E_n(f)_{S^p} \le \frac{1}{2^{k/2}} \left(\frac{4}{3}\right)^{1/p} \omega_k\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{S^p}, \quad n, k = 1, 2, \ldots. \tag{83}$$

Доказательство этого утверждения базируется на неравенствах (14), которые, как уже отмечалось, справедливы и в случае $0 < p < 1$, а также неравенствах (63) и (67) при $\lambda = \frac{kp}{2}$, $k \in N$, $p \in (0, 1)$. При этих ограничениях имеем

$$I_n\left(\frac{kp}{2}\right) \ge 1{,}5,$$

что в силу (14) влечет (83).

Анализ доказательства теоремы 6 показывает, что для любой $f \in S^p$ неравенство (71) остается в силе и при $p \in (0, 1)$, а значит, и в этом случае справедливо неравенство (71′).

Отметим, что для пространств L_p, $p \in (0, 1)$, 2π-периодических функций, интегрируемых в p-й степени с метрикой

$$\rho(f, g) = \| f - g \|_p^p = \int_0^{2\pi} | f(x) - g(x) |^p \, dx,$$

аналогичный результат получен в [13] (см. также [14]). Там же установлены и прямые теоремы, аналогичные теореме 4′.

Также отметим, что полученные в данной работе результаты допускают обобщение и на случай модулей непрерывности, порядок которых задается произвольным положительным числом k (в том числе и дробным), определяемых формулами

$$\omega_k(f, t)_{S^p} = \sup_{0 \le |u| \le t} \left\| \Delta_u^k f(\cdot) \right\|_{S^p} = \sup_{0 \le |u| \le t} \left\| \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{k}{i} f(\cdot + (k-i)u) \right\|_{S^p}.$$

При этом, в частности, теоремы 1 – 3, 6 и 7 остаются справедливыми и в случае, когда k — произвольное положительное число.

1. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p. – Киев, 2000. – 52 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 2000.2).
2. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 3. – С. 392–416.
3. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p в разных метриках // Там же. – № 8. – С. 1121–1146.
4. *Черных Н. И.* О неравенстве Джексона в L_2 // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1967. – **88**. – С. 71–74.
5. *Черных Н. И.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки. – 1967. – **20**, № 3. – С. 513–522.
6. *Бабенко А. Г.* О точной константе в неравенстве Джексона в L_2 // Там же. – 1986. – **39**, № 5. – С. 651–664.
7. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
8. *Тиман М. Ф.* Обратные теоремы конструктивной теории функций в пространствах L_p // Мат. сб. – 1958. – **46**, № 1. – С. 125–132.
9. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
10. *Бари Н. К.* О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1955. – **19**. – С. 285–302.
11. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. Мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 483–522.
12. *Стечкин С. Б.* Избранные труды: Математика. – М.: Наука, 1998. – 384 с.
13. *Иванов В. И.* Прямые и обратные теоремы теории приближений в метрике L_p для $0 < p < 1$ // Мат. заметки. – 1975. – **18**, № 5. – С. 641–658.
14. *Иванов В. И.* Прямые и обратные теоремы теории приближений в метрике L_p для $0 < p < 1$ // Теория приближения функций / Тр. Междунар. конф. по теории приближения функций. Калуга, 24–28 июля 1975 г. – М.: Наука, 1977. – С. 200–204.

Получено 12.07.2001