УДК 519.21

А. М. Кулик (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О РЕШЕНИИ ОДНОМЕРНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПЕРЕНОСА

We obtain generalized diffusion coefficients and describe the structure of family of local times for a process defined as a solution of one-dimensional stochastic differential equation with a singular drift coefficient.

Отримано узагальнені дифузійні коефіцієнти та описано структуру локальних часів для процесу, заданого як розв'язок одновимірного стохастичного диференціального рівняння з сингулярним коефіцієнтом переносу.

1. Постановка задачи. В данной работе рассматривается одномерное стохастическое уравнение вида

$$x_t = x_0 + \int_0^t a(x_s)\,ds + W_t, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $\{W_t,\ t \geq 0\}$ — винеровский процесс, a — (обобщенная) производная некоторой функции ограниченной вариации, причем выражение

$$\int_0^t a(x_s)\,ds$$

понимается как локальное время (или, более точно, один из его вариантов) процесса $\{x_t\}$ с интенсивностью a.

Естественный подход к решению уравнения вида (1), впервые предложенный в работе [1] для случая $a = q\,\delta_0$ (так называемое косое броуновское движение), заключается в преобразовании фазового пространства уравнения с помощью гармонической функции, удаляющей сингулярный коэффициент переноса. Опишем кратко этот подход. Для произвольной $A \in BV(\mathbb{R})$ положим

$$G(x) = \int_0^x e^{-2A(u)}\,du, \quad R = G^{-1}, \quad \sigma(y) = e^{-2A(R(y))}, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

и рассмотрим уравнение

$$y_t = y_0 + \int_0^t \sigma(y_s)\,dW_s, \quad t \geq 0, \quad y_0 = G(x_0). \tag{2}$$

Поскольку $\sigma(\cdot)$ — положительная функция ограниченной вариации, согласно теореме Накао [2] уравнение (2) имеет единственное сильное решение. Преобразовав это решение с помощью обратной замены $x_t = R(y_t)$, получим процесс, от которого естественно ожидать, что при соответствующем выборе функции A он будет удовлетворять уравнению (1). Действительно, справедлива следующая теорема.

Теорема [3]. *Пусть функции ограниченной вариации A и $\hat{A}(\cdot) \equiv \int_{-\infty}^{\cdot} a(u)\,du$ имеют одинаковые непрерывные части и для произвольной точки разрыва $x \in \mathbb{R}$ $\hat{A}(x) - \hat{A}(x-) = \operatorname{th}[A(x) - A(x-)]$, где $\operatorname{th} c \equiv (e^c - e^{-c})/(e^c + e^{-c})$ — тангенс гиперболический числа $c \in \mathbb{R}$.*

Тогда построенный выше процесс $\{x_t\}$ *удовлетворяет уравнение* (1), *в котором*

$$\int_0^t a(x_s)\,ds$$

понимается как однородный аддитивный функционал от процесса $\{x_t\}$, *равный пределу в среднем квадратическом некоторой последовательности интегральных функционалов.*

Целью данной работы является более детальное исследование свойств процесса $\{x_t\}$. Мы покажем, что при приведенных выше условиях процесс $\{x_t\}$ является обобщенным диффузионным [4] с обобщенными коэффициентами переноса и диффузии

$$\tilde{A}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,d\hat{A}(x), \qquad \tilde{B}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in C_0(\mathbb{R}).$$

Развитый в данной статье подход позволяет также установить структуру семейства лево- и правосторонних локальных времен $L_-(u,t)$, $L_+(u,t)$ процесса $\{x_t\}$ и, в частности, привести новое доказательство известного [5] результата о том, что (1) выполнено с

$$\int_0^t a(x_s)\,ds = L_{a,1/2}(t) \equiv \int_{\mathbb{R}} \frac{L_-(u,t)+L_+(u,t)}{2}\,a(u)\,du.$$

Отметим, что указанные свойства процесса $\{x_t\}$ достаточно легко доказать в случае, когда функция A является гельдеровой с некоторым положительным показателем. В этой ситуации коэффициент диффузии в (2) также гельдеров, и требуемые свойства процесса $\{x_t\}$ могут быть получены с использованием стандартных оценок на гладкость и асимптотическое поведение в нуле фундаментального решения уравнения теплопроводности с гельдеровскими коэффициентами. Возможен также альтернативный подход, заключающийся в использовании единственности решения уравнения (2) и результата работы [6], в которой соответствующий обобщенный диффузионный процесс был построен аналитическими методами. В общей ситуации задача описания локальных свойств $\{x_t\}$ становится более сложной, поскольку упомянутые выше аналитические результаты отсутствуют.

В завершение приведем одну предельную теорему, в которой возникает процесс $\{x_t\}$, что является дополнительным аргументом в пользу того, что исследование локальных свойств такого процесса представляет интерес.

Теорема [3]. *Пусть последовательность функций* $\{a_n\} \subset L_1(\mathbb{R})$ *такова, что функции* $A_n(\cdot) \equiv \int_{-\infty}^{\cdot} a_n(u)\,du$ *сходятся к* $A(\cdot)$ *во всех точках непрерывности предельной функции и* $\sup_{n,x}|A_n(x)| < \infty$. *Тогда последовательность распределений решений уравнений*

$$x_t^n = x_0 + \int_0^t a\left(x_s^n\right)ds + W_t, \quad t \ge 0,$$

в пространстве $C(\mathbb{R}^+)$ *слабо сходится к распределению процесса* $\{x_t\}$.

2. Локальные времена. Уравнение (1), в котором функционал

$$\int_0^t a(x_s)\,ds$$

понимался как какой-то вариант локального времени, рассматривался в различных ситуациях многими авторами (см., например, [5, 7 – 9]). Стандартная техника, позволяющая показать, что построенный в предыдущем пункте процесс $\{x_t\}$ является решением такого уравнения, состоит в применении соответствующего аналога формулы Танака. В этом пункте мы развиваем альтернативный подход, основанный на случайной замене времени и позволяющий определить структуру локальных времен процессов $\{x_t\}$, $\{y_t\}$. Полученные представления для локальных времен будут существенно использованы в следующем пункте при нахождении обобщенных диффузионных коэффициентов процесса $\{x_t\}$.

Будем говорить, что процесс $\{\xi_t\}$ имеет левостороннее локальное время $L_-(u, t)$ в точке $u \in \mathbb{R}$, если для произвольной последовательности неотрицательных функций $\{\psi_n\} \subset C(\mathbb{R})$ таких, что

1) $\int\limits_{\mathbb{R}} \psi_n(z)\,dz \to 1, \quad n \to \infty;$

2_) $\operatorname{supp} \psi_n \in \left[u - \frac{1}{n}, u\right],$

имеет место сходимость по вероятности

$$\int\limits_0^t \psi_n(\xi_s)\,ds \to L_-(u, t), \qquad u \in \mathbb{R}^+, \quad n \to \infty.$$

Правостороннее локальное время вводится аналогично, с заменой условия 2_ условием 2_+) $\operatorname{supp}\psi_n \in \left[u, u + \frac{1}{n}\right]$.

Теорема 1. *В каждой точке* $u \in \mathbb{R}$ *процесс* $\{x_t\}$ *имеет лево- и правосторонние локальные времена и справедливо соотношение*

$$L_+(u, t) = e^{2[A(u) - A(u-)]} L_-(u, t), \quad t \ge 0.$$

Доказательство. Положим

$$\nu_t = \int\limits_0^t \sigma^2(y_s)\,ds, \quad \tau_t = \inf\{u \mid \nu_u \ge t\}, \qquad \hat{W}_t = y_{\tau_t} - y_0, \quad t \ge 0.$$

Процесс $\hat{W}$ является винеровским относительно фильтрации $\left\{\hat{\mathcal{F}}_t \equiv \mathcal{F}_{\tau_t}, t \ge 0\right\}$. Пусть последовательность неотрицательных функций $\{\psi_n\} \subset C(\mathbb{R})$ зафиксирована, тогда имеем

$$\int\limits_0^t \psi_n(x_s)\,ds = \int\limits_0^t \psi_n(R(y_s))\,ds = \int\limits_0^{\nu_t} \hat{\psi}_n(\hat{W}_s)\,ds, \quad t \ge 0,$$

где $\hat{\psi}_n(u) = \psi_n(R(y_0 + u))\sigma^{-2}(y_0 + u), \ u \in \mathbb{R}$.

Известно (см., например, [10], гл. III.4), что для винеровского процесса $\hat{W}$ существует семейство случайных величин $\left\{L^{\hat{W}}(u, t), \ u \in \mathbb{R}, \ t \ge 0\right\}$, называемое локальным временем процесса $\hat{W}$, которое при каждом ω является непрерывной функцией от (u, t) и удовлетворяет равенству

$$\int_0^t \mathbb{1}_Q(\hat{W}_s)\,ds = \int_Q L^{\hat{W}}(u,t)\,du$$

для произвольного борелевского множества $Q \subset \mathbb{R}$. В частности, у процесса $\hat{W}$ существуют лево- и правосторонние локальные времена, совпадающие с $L^{\hat{W}}$.

Имеем

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}_n(v)\,dv = \int_{\mathbb{R}} \psi_n(R(y_0+v))e^{4A(R(y_0+v))}\,dv =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \psi_n(y_0+z)e^{2A(y_0+z)}\,dz, \quad n \geq 1.$$

Учитывая, что функции G, R строго возрастают на $\mathbb{R}$, получаем, что функции $\{\hat{\psi}_n\}$ сходятся слабо к $e^{2A(u)}\delta_{G(u)-y_0}$, если для $\{\psi_n\}$ выполнены условия 1, 2_+, и к $e^{2A(u-)}\delta_{G(u)-y_0}$, если выполнены условия 1, 2_-. Используя представление

$$\int_0^t \psi_n(x_s)\,ds = \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}_n(v)L^{\hat{W}}(v,\nu_t)\,dv,$$

отсюда получаем, что у процесса $\{x_t\}$ существуют лево- и правосторонние локальные времена в точке $u \in \mathbb{R}$, равные

$$L_-(u,t) = e^{2A(u-)}L^{\hat{W}}(G(u)-y_0,\nu_t), \qquad L_+(u,t) = e^{2A(u)}L^{\hat{W}}(G(u)-y_0,\nu_t).$$

Теорема доказана.

***Замечание* 1.** Несложно проверить, что процесс $\{y_t\}$ также имеет лево- и правосторонние локальные времена $L_\pm^Y$ в каждой точке и

$$L_\pm^Y(v,t) = e^{4A(R(v\pm))}L^{\hat{W}}(v-y_0,\nu_t) = e^{2A(R(v\pm))}L_\pm(R(v),t), \quad t \geq 0, \quad v \in \mathbb{R}.$$

Далее, пусть

$$L_{1/2}(u,t) = \frac{L_-(u,t)+L_+(u,t)}{2}$$

— симметричное локальное время процесса $\{x_t\}$ в точке $u \in \mathbb{R}$, обозначим

$$L_{a,1/2}(t) = \int_{\mathbb{R}} L_{1/2}(u,t)a(u)\,du \equiv \int_{\mathbb{R}} L_{1/2}(u,t)\,d\hat{A}(u), \quad t \geq 0,$$

где интеграл определяется в смысле сходимости в $L_1(\Omega,\mathcal{F},P)$; такое определение корректно, поскольку функции $A(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$ ограничены и характеристика винеровского локального времени

$$V(u,t) \equiv EL^{\hat{W}}(u,t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi s}}e^{-u^2/2s}\,ds$$

ограничена при $(u,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$.

Теорема 2. *Для процесса* $\{x_t\}$ *выполнено равенство*

$$x_t = x_0 + L_{a,1/2}(t) + W_t, \quad t \geq 0.$$

Доказательство. Выразим функционал $L_{a,1/2}$ через локальное время винеровского процесса $\hat{W}$. Положив

$$A(x) = A_0(x) + \sum_{x \geq x_k} c_k, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad A_0 \in C(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R}),$$

можем записать

$$L_{a,1/2}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{2A(u)} L^{\hat{W}}(G(u) - y_0, \nu_t)\, dA_0(u) +$$

$$+ \sum_k \frac{e^{2c_k} + 1}{2} e^{2A(x_k-)} L^{\hat{W}}(G(x_k) - y_0, \nu_t) \frac{e^{c_k} - e^{-c_k}}{e^{c_k} + e^{-c_k}}. \tag{3}$$

Сумма в правой части (3) равна

$$\frac{1}{2}\sum_k \left[e^{2A(x_k)} - e^{2A(x_k-)} \right] L^{\hat{W}}(G(x_k) - y_0, \nu_t). \tag{4}$$

Далее, положим

$$A^n(x) = \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{n}{2\pi}} e^{-n(x-z)^2/2}\, dA(z),$$

$$A_0^n(x) = \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{n}{2\pi}} e^{-n(x-z)^2/2}\, dA_0(z), \quad x \in \mathbb{R},$$

функции A_0^n, A^n имеют равномерно по n ограниченную вариацию и сходятся к A_0, A в каждой точке непрерывности предельной функции. Более того, поскольку $A_0 \in C(\mathbb{R})$, сходимость A_0^n даже равномерна, откуда следует, что $A_0^n(R_n(y)) \to A_0(R(y))$, $n \to \infty$, равномерно по $y \in \mathbb{R}$. Наконец, несложно проверить, что для произвольного $\varepsilon > 0$ можно найти компакт K_ε такой, что $[\operatorname{var} A_0](\mathbb{R} \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ и $A^n \to A$ равномерно на K_ε. Отсюда получаем, что интеграл в правой части (3) равен

$$\int_{\mathbb{R}} e^{2A(u)} L^{\hat{W}}(G(u) - y_0, \nu_t)\, dA_0(u) =$$

$$= P - \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{2A^n(u)} L^{\hat{W}}\left(G^n(u) - y_0, \nu_t\right) \left[A_0^n \right]'(u)\, du =$$

$$= P - \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{2A^n\left(R^n(u)\right)} L^{\hat{W}}(u - y_0, \nu_t) \left[A_0^n\left(R^n(u)\right) \right]' du =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{2A(R(u))} L^{\hat{W}}(u - y_0, \nu_t)\, d[A_0(R(u))], \tag{5}$$

где

$$G^n(x) = \int_0^x e^{-2A^n(u)}du, \quad R^n = [G^n]^{-1}, \quad [R^n]'(u) = e^{2A^n\left(R^n(u)\right)}.$$

Далее, положим $x_t^n = R^n(y_t)$, $t \geq 0$. Процессы $\left\{x_t^n\right\}$ сходятся к $\{x_t\}$ равномерно на каждом ограниченном промежутке времени. Кроме того, каждый из аппроксимирующих процессов является процессом Ито вида $x_n^t = \eta_t^n + M_t^n$,

$$M_t^n = \int_0^t \exp\left[2A^n\left(R^n(y_s)\right) - 2A\left(R^n(y_s)\right)\right]dW_s,$$

$$\eta_t^n = \int_0^t \kappa(y_s)ds, \quad n \geq 1, \quad t \geq 0,$$

где

$$\kappa(y) = \exp\left[4A^n\left(R^n(y)\right) - 4A(R(y))\right]\left[A^n\right]'(R(y)), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Функции $\exp[2A_n(R_n(\cdot)) - 2A(R(\cdot))]$ равномерно ограничены и сходятся к единице всюду, за исключением не более чем счетного множества $\Delta_{A\circ R}$ точек разрывов функции $A(R(\cdot))$. Проверив, например, с помощью формулы Фейнмана – Каца, что

$$E\int_0^t \mathbb{1}_{\Delta_{A\circ\mathbb{R}}}(y_s)ds = 0,$$

отсюда получаем, что $M_t^n \to W_t$, $n \to \infty$, в среднем произвольной степени, причем эта сходимость равномерна по $(y_0, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$ для любого $T > 0$. Таким образом,

$$x_t = \eta_t + W_t, \quad \text{где} \quad \eta_t = \lim_{n\to\infty} \eta_t^n.$$

Далее,

$$\eta_t^n = \int_0^{\nu_t} \tilde{\kappa}_n\left(y_0 + \hat{W}_s\right)ds = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\kappa}_n(u)L^{\hat{W}}(u - y_0, \nu_t)du, \quad t \geq 0,$$

где

$$\tilde{\kappa}_n(\cdot) = e^{4A^n\left(R^n(y)\right)}\left[A^n\right]'(R(\cdot)) = \frac{1}{2}\left[\Theta^n\right]'(\cdot),$$

$$\Theta^n(\cdot) = e^{2A^n\left(R^n(\cdot)\right)}, \quad n \geq 1.$$

Отсюда следует

$$x_t - x_0 - W_t = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} L^{\hat{W}}(u - y_0, \nu_t)d\Theta(u), \quad \Theta(\cdot) = e^{2A(R(\cdot))}.$$

Теперь в силу (4) и (5) для доказательства теоремы достаточно проверить, что для произвольной функции $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,d\Theta_0(x) \;=\; 2\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{2A(R(x))}\,d\big[\,A_0(R(x))\,\big], \tag{6}$$

где Θ_0 — непрерывная составляющая функции Θ. Равенство (6) доказывается непосредственно для кусочно-гладких функций A. Для общеїі функции A это равенство можно получить, равномерно аппроксимируя ее кусочно-гладкими функциями.

Теорема доказана.

Замечание 2. Как видно из теоремы 2, $\{x_t\}$ является решением уравнения (1), если функционал

$$\int_0^{\cdot} a(x_s)\,ds$$

интерпретируется как *симметричное* локальное время процесса $\{x_t\}$ с весом a. Если же определять этот функционал несимметричным образом, то $\{x_t\}$ опять будет удовлетворять уравнению вида (1), но уже с другим коэффициентом. Именно, пусть $q \in [0, 1]$, обозначим

$$L_{\tilde{a},q}(t) \;=\; \int_{\mathbb{R}} \big[\,(1-q)L_-(u,t) + qL_+(u,t)\,\big]\,d\tilde{A}(u), \qquad \tilde{A}(\cdot) \;=\; \int_{-\infty}^{\cdot} \tilde{a}(u)\,du.$$

Определим $a^q = [A^q]'$, $A^q \in BV(\mathbb{R})$ равенствами

$$[A^q]_0 \;=\; A_0, \qquad A^q(x_k) - A^q(x_k-) \;=\; \mathrm{th}_q[A(x_k) - A(x_k-)],$$

где

$$\mathrm{th}_q c \;\equiv\; \frac{e^c - e^{-c}}{(2-2q)e^c + 2qe^{-c}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Из доказанного выше следует, что

$$x_t \;=\; x_0 \;+\; L_{a^q,q}(t) \;+\; W_t, \quad t \,\ge\, 0.$$

Замечание 3. Теорема 2 позволяет получать решение уравнение (1), в котором

$$\int_0^{\cdot} a(x_s)\,ds$$

интерпретируется как локальное время $L_{a,q}(t)$, для произвольной конечной меры a, вес каждого атома которой лежит в промежутке

$$\mathrm{th}_q(\mathbb{R}) \;=\; \left(-\frac{1}{2q}, \frac{1}{2-2q}\right).$$

Это хорошо коррелирует с результатами, известными для косого броуновского движения, т. е. для случая $a = \alpha\delta_0$: для симметричного локального времени косое броуновское движение существует в точности для $\alpha \in [-1, 1]$ [4], для левостороннего локального времени — для $\alpha \le 1/2$ [11].

3. Обобщенные диффузионные характеристики решения. В этом пункте мы покажем, что решение уравнения (1), построенное выше, является обобщенным диффузионным процессом Маркова, и найдем его обобщенные диффузионные коэффициенты.

Лемма 1. *Процессы* $\{x_t\}$, $\{y_t\}$ *являются феллеровскими процессами Маркова.*

***Замечание* 4.** Марковское свойство решения (1) ожидаемо и упоминалось (без доказательства) в [3]. Здесь, в целях полноты изложения, мы приводим набросок доказательства.

Доказательство. Поскольку $\{x_t\}$ получен из $\{y_t\}$ с помощью взаимно однозначной и взаимно непрерывной замены фазового пространства, достаточно доказать утверждение теоремы для процесса $\{y_t\}$. Обозначим через $y^y_{s,t}$ решение уравнения

$$y^y_{s,t} = y + \int_s^t \sigma\left(y^y_{s,u}\right) dW_u, \quad y \in \mathbb{R}, \quad 0 \le s \le t < \infty.$$

Несложно показать, что в силу потраекторной единственности это решение почти наверное монотонно как функция от y. Кроме того, это решение слабо непрерывно по y [12], и выполнены условия теоремы Колмогорова. Отсюда будет следовать существование модификации $\tilde{Y} \equiv \equiv \left\{\tilde{y}^y_{s,t}(\omega),\ y \in \mathbb{R},\ 0 \le s \le t < \infty,\ \omega \in \Omega\right\}$ такой, что:

1) для каждого $\omega \in \Omega$ функция $\tilde{Y}$ непрерывна по совокупности переменных (y, s, t) и $y^y_{s,t} = y^{y^y_{s,u}}_{u,t}$, $s \le u \le t$;

2) для любых (y, s, t) величина $\tilde{y}^y_{s,t}$ измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{F}^t_s \equiv \sigma\{W_u - W_s,\ u \in [s, t]\}$.

Теперь марковское свойство решения доказывается с помощью рассуждений, аналогичных приведенным в [12, с. 483].

Лемма доказана.

Теорема 3. *Процесс* $\{x_t\}$ *является обобщенным диффузионным с коэффициентами переноса и диффузии, равными*

$$\tilde{A}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, d\hat{A}(x), \qquad \tilde{B}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx, \qquad \varphi \in C_0(\mathbb{R}).$$

***Замечание* 5.** Утверждение теоремы показывает, что в обозначениях предыдущего пункта обобщенный коэффициент переноса равен $[A^q]'$ для $q = = 1/2$. В этом смысле в уравнении (1) функционал

$$\int_0^t a(x_s)\, ds$$

естественно интерпретировать именно как *симметричное* локальное время процесса $\{x_t\}$.

Доказательство теоремы. Далее мы обозначаем через P_x, P^Y_y распределения процессов $\{x_t\}$, $\{y_t\}$, стартующих из точек x, y соответственно, E_x, E^Y_y — соответствующие математические ожидания.

Для доказательства теоремы достаточно [3] проверить выполнение следующих условий:

$$\exists\, \delta > 0 : \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) E_x |x_t - x|^{2+\delta} dx \to 0, \qquad t \to 0+, \quad \varphi \in C_0(\mathbb{R}), \tag{7}$$

$$\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) E_x (x_t - x)\, dx \to \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, d\hat{A}(x), \quad t \to 0+, \quad \varphi \in C_0(\mathbb{R}), \tag{8}$$

$$\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) E_x (x_t - x)^2\, dx \to \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx, \quad t \to 0+, \quad \varphi \in C_0(\mathbb{R}). \tag{9}$$

Как показано при доказательстве теоремы 2,

$$x_t - x = W_t + \eta_t, \quad \eta_t = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} L^{\hat{W}}(u - R(x), \nu_t)\, d\Theta(u), \quad \nu_t = \int_0^t \sigma^2(y_s)\, ds.$$

Полагая $\sigma_m = \sup_{\mathbb{R}} \sigma(\cdot)$, имеем

$$\eta_t^2 \le \frac{[\operatorname{var}\Theta](\mathbb{R})}{4}\int_{\mathbb{R}} \Big[L^{\hat{W}}\big(u - R(x), \sigma_m^2 t\big)\Big]^2 d[\operatorname{var}\Theta](du).$$

Теперь утверждения (7), (9) следуют, например, из того, что функция $G(\cdot)$ имеет локально ограниченную вариацию и (см. [13])

$$\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \Big[L^{\hat{W}}(x, t)\Big]^2 dx \to 0, \quad t \to 0+, \quad \varphi \in C_0(\mathbb{R}).$$

Перейдем к доказательству наиболее сложного условия (8). Выполняя замену фазового пространства $y = G(x)$ и используя приведенное выше представление для функционала η, получаем эквивалентное условие

$$\frac{1}{2t}\int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}(y) E_y^Y \int_{\mathbb{R}} L^{\hat{W}}(z - y, \nu_t)\, d\Theta(z)\, dy \to \tilde{A}(\varphi), \quad t \to 0+,$$

$$\tilde{\varphi}(\cdot) = \varphi(R(\cdot)) e^{2A(R(\cdot))}.$$

Докажем сначала, что

$$\frac{1}{2t}\int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}(y) E_y^Y \int_{\mathbb{R}} L^{\hat{W}}(z - y, \nu_t)\, d\Theta_0(z)\, dy \to \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dA_0(x), \quad t \to 0+. \tag{10}$$

Покажем, что в (10) случайный момент времени ν_t можно заменить неслучайным моментом $\sigma^2(y)t$, т. е.

$$\Delta(\tilde{\varphi}, t) \equiv \left| \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}(y) E_y^Y \int_{\mathbb{R}} \Big[L^{\hat{W}}(z - y, \nu_t) - L^{\hat{W}}\big(z - y, \sigma^2(y)t\big)\Big] d\Theta_0(z)\, dy \right| \to 0 \tag{11}$$

при $t \to 0+$. Мы можем считать, что $\tilde{\varphi} \ge 0$ и Θ_0 — возрастающая функция; в общем случае оценки проводятся аналогично. Заметим, что множество точек разрыва функции $\sigma(\cdot)$ имеет нулевую меру Θ_0. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем компакт $K_\varepsilon \subset \mathbb{R}$ и $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ так, что $\Theta_0(\mathbb{R} \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ и $|\sigma^2(u) - \sigma^2(y)| < \varepsilon$, как только $y \in K_\varepsilon$, и $|u - y| < \delta$.

Обозначим $D_{t,\delta}^y = \left\{ \sup_{s \in [0,t]} |y_s - y| > \delta \right\}$. Несложно проверить, что $P_y^Y\big(D_{t,\delta}^y\big) / t_k \to 0$, $t \to 0+$ для любого $k \ge 1$. Применяя неравенство Коши и учитывая конечность второго момента для винеровского локального времени, получаем

$$\limsup_{t\to 0+}\Delta(\tilde{\varphi}, t) =$$

$$= \limsup_{t\to 0+}\left|\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}}\tilde{\varphi}(y)E_y^Y\,\mathbb{1}_{\Delta^{\psi}_{t,\delta}}\int_{\mathbb{R}}\left[L^{\hat{W}}(z-y,\nu_t)-L^{\hat{W}}\left(z-y,\sigma^2(y)t\right)\right]d\Theta(z)\,dy\right| \le$$

$$\le \limsup_{t\to 0+}\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}}\tilde{\varphi}(y)E_y^Y\int_{\mathbb{R}}\left[L^{\hat{W}}\left(z-y,\left(\sigma^2(y)+\varepsilon\right)t\right)-L^{\hat{W}}\left(z-y,\sigma^2(y)t\right)\right]d\Theta(z)\,dy =$$

$$= \limsup_{t\to 0+}\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}}\tilde{\varphi}(y)\int_{\mathbb{R}}\left[V\left(z-y,\left(\sigma^2(y)+\varepsilon\right)t\right)-V\left(z-y,\sigma^2(y)t\right)\right]d\Theta(z)\,dy,$$

где

$$V(u,t)\equiv EL(u,t) = \int_0^t\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}e^{-u^2/2s}\,ds$$

— характеристика винеровского локального времени.

Лемма 2. *Пусть* $\Theta\in BV(\mathbb{R})$ *и множества точек разрывов ограниченных функций* $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *имеют нулевую меру* $\operatorname{var}\Theta$. *Тогда*

$$\limsup_{t\to 0+}\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}}\psi(y)\,V(z-y,r(y)t)\,d\Theta(z)\,dy =$$

$$= \limsup_{t\to 0+}\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}}\psi(y)r(y)\,V(z-y,t)\,d\Theta(z)\,dy = \int_{\mathbb{R}}\psi(y)r(y)\,d\Theta(y).$$

Доказательство. Докажем первое равенство, второе непосредственно следует из известного утверждения о том, что $V(\cdot,t)/t\to\delta_0(\cdot)$, $t\to 0+$, в смысле слабой сходимости. Как и ранее, можно считать, что $\psi\ge 0$ и функция Θ не убывает. Зафиксируем $\varepsilon>0$, выберем компакт K_ε, $\Theta_0(\mathbb{R}\setminus K_\varepsilon)<\varepsilon$ и конечное открытое покрытие $\bigcup_{k=1}^n G_k\supset K_\varepsilon$ такое, что колебание функций ψ, r на каждом из множеств G_k не превышает ε. Положим $G_0=\mathbb{R}\setminus K_\varepsilon$ и выберем непрерывное разбиение единицы, подчиненное $\left\{G_k,\ r=\overline{0,n}\right\}$, т. е. семейство функций $\{\zeta_k\}\subset C(\mathbb{R})$ таких, что $\zeta_k\ge 0$, $\sum_k\zeta_k=1$ и $\operatorname{supp}\zeta_k\subset G_k$. Обозначая $r_k=\sup_{y\in G_k}r(y)\psi_k=\sup_{y\in G_k}\psi(y)$, имеем

$$\limsup_{t\to 0+}\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}}\psi(y)V(z-y,r(y)t)\,d\Theta(z)\,dy \le$$

$$\le \sum_{k=0}^n\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}}\psi_k\zeta_k(y)V(z-y,r_kt)\,d\Theta(z)\,dy =$$

$$= \sum_{k=0}^n\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}}\psi_k r_k\zeta_k(y)V(z-y,t)\,d\Theta(z)\,dy \le$$

$$\le \int_{\mathbb{R}}[\psi(y)+\varepsilon][r(y)+\varepsilon]\,d\Theta(y) + \varepsilon\sup_{\mathbb{R}}|\psi|\sup_{\mathbb{R}}|r|,$$

и, аналогично,

$$\liminf_{t\to 0+}\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}}\psi(y)V(z-y, r(y)t)\,d\Theta(z)\,dy \ \geq$$

$$\geq \int_{\mathbb{R}}[\psi(y)-\varepsilon][r(y)-\varepsilon]\,d\Theta(y) - \varepsilon\sup_{\mathbb{R}}|\psi|\sup_{\mathbb{R}}|r|.$$

Устремляя ε к нулю, получаем нужное утверждение.

Применяя утверждение леммы, получаем

$$\limsup_{t\to 0+}\Delta(\tilde{\varphi}, t) \leq \varepsilon\int_{\mathbb{R}}\tilde{\varphi}(y)\,d\Theta(y),$$

что в силу произвольности ε доказывает (11). Повторное применение этого утверждения дает (10), поскольку

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\varphi(R(y))e^{-2A(R(y))}\,d\Theta_0(y) = \int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,dA_0(x), \quad \varphi\in C_0(\mathbb{R}). \tag{12}$$

Равенство (12) непосредственно проверяется для кусочно-гладкой функции A с помощью формулы замены переменных (напомним, что $R'(\cdot) = e^{2A(R(\cdot))}$). Для произвольной $A\in BV(\mathbb{R})$ равенство доказывается с помощью равномерной ее аппроксимации кусочно-гладкими функциями.

Далее, пусть $\{x_k,\ k\in I\}$ — не более чем счетное множество точек разрыва функции A, $\{y_k = G(x_k),\ k\in I\}$ — точки разрыва функции Θ. Достаточно показать, что для произвольного $k\in I$

$$\frac{1}{2t}\int_{\mathbb{R}}\tilde{\varphi}(y)E_y^Y\int_{\{y_k\}}L^{\hat{W}}(z-y,\nu_t)\,d\Theta(z)\,dy \to \varphi(x_k)\,\mathrm{th}[A(x_k)-A(x_k-)], \quad t\to 0+. \tag{13}$$

Положим

$$A^k = -\frac{1}{2}\ln\frac{G(x_k)}{x_k} + [A(x_k)-A(x_k-)]\mathbb{1}_{[x_k,+\infty)}, \qquad \frac{0}{0} = 1,$$

$$G^k(\cdot) = \int_0^{\cdot}\exp\left[-2A^k(u)\right]du, \qquad R^k = [G^k]^{-1},$$

$$\sigma_k(\cdot) = \exp\left[-2A^k\left(R^k(\cdot)\right)\right].$$

Обозначим через $Y^k = \left\{y_t^k,\ t\geq 0\right\}$ решение уравнения

$$y_t^k = y_0 + \int_0^t \sigma_k\left(y_s^k\right)dW_s, \quad t\geq 0. \tag{14}$$

Заметим, что процесс $\left\{x_t^k = R^k\left(y_t^k\right)\right\}$ является косым броуновским движением, имеющим в точке x_k частичное отражение с интенсивностью $\mathrm{th}[A(x_k)-A(x_k-)]$. Это следует из рассуждений, аналогичных приведенным в [4] (гл. III. 3): из свойств косого броуновского движения следует, что после замены фазового пространства с помощью отображения G^k оно превращается в процесс, являющийся (слабым) решением уравнения (14), после чего, в силу единственности решения этого уравнения, получаем требуемое утверждение. Тот факт, что обобщенный коэффициент переноса процесса x^k равен $\operatorname{th}[A(x_k)-A(x_k-)]\delta_{x_k}$, можем, обозначив через ν_t^k, $\hat W^k$, $L^{\hat W^k}$ соответствующие процессу y^k замену времени, винеровский процесс и винеровское локальное время, записать в виде

$$\frac{1}{2t}\int_{\mathbb{R}}\tilde\varphi(y)E_y^Y\int_{\{y_k\}}L^{\hat W^k}\left(z-y,\nu_t^k\right)d\Theta(z)\,dy\to$$

$$\to\varphi(x_k)\operatorname{th}[A(x_k)-A(x_k-)],\quad t\to0+.$$

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно проверить, что для $y_k=G^k(x_k)\ \ (=G(x_k))$

$$\frac{1}{t}\left[\int_{\mathbb{R}}\tilde\varphi(y)\left\{E_y^Y L^{\hat W}(y_k-y,\nu_t)-E_y^{Y^k}L^{\hat W^k}\left(z-y,\nu_t^k\right)\right\}dy\right]\to0,\quad t\to0+.\qquad(15)$$

Обозначая $\gamma_n=\frac{n}{2}\mathbb{1}_{(y_k-1/n,\,y_k+1/n)}$ и выполняя обратную замену времени $t\to\tau_t\equiv$ $\equiv[\nu]_t^{-1}$, получаем

$$E_y^{Y^k}L^{\hat W^k}\left(y_k-y,\nu_t^k\right)=\lim_{n\to\infty}u_n^k(t,y),\qquad E_y^Y\int_{\mathbb{R}}L^{\hat W}(y_k-y,\nu_t)=\lim_{n\to\infty}u_n(t,y),$$

где функции u_n, u_n^k являются решениями следующих задач Коши:

$$\left[u_n^k\right]_t'=\frac{\sigma_k^2}{2}\left[u_n^k\right]_{xx}''+\sigma_k^2\gamma_n,\qquad[u_n]_t'=\frac{\sigma^2}{2}[u_n]_{xx}''+\sigma^2\gamma_n,$$

$$u_n^k\big|_{t=0}=u_n\big|_{t=0}=0.$$

Отсюда следует, что функция $g_n^k=u_n-u_n^k$ является решением задачи Коши

$$\left[g_n^k\right]_t'=\frac{\sigma^2}{2}\left[g_n^k\right]_{xx}''+\left[\sigma^2-\sigma_k^2\right]\beta_n^k,\qquad g_n^k\big|_{t=0}=0,$$

и имеет вид

$$g_n^k(t,y)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}}P(s,y,dy_1)\left[\sigma^2(y_1)-\sigma_k^2(y_1)\right]\beta_n^k(s,y_1)\,ds,$$

где

$$\beta_n^k(t,y)=\frac{1}{2}\left[u_n^k\right]_{xx}''(t,y)+\gamma_n(y)=\sigma_k^{-2}(y)\left[u_n^k\right]_t'=$$

$$=\sigma_k^{-2}(y)\int_{\mathbb{R}}P_k(t,y,d\,y_1)\sigma_k^2(y_1)\gamma_n(y_1),$$

через P, P_k обозначены переходные вероятности процессов $\{y_t\}$, $\left\{y_t^k\right\}$ соответственно. Процесс $\left\{y_t^k\right\}$ получен с помощью замены фазового пространства

G^k из косого броуновского движения $\{x_t^k\}$, плотность распределения которого известна:

$$p(t,x,y) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left[\exp\left(-\frac{\{y-x\}^2}{2t}\right) + q_k\,\mathrm{sign}(y-x_k)\exp\left(-\frac{\{|y-x_k|+|x-x_k|\}^2}{2t}\right)\right].$$

Отсюда получаем оценку

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\beta_n^k(t,y)\right| \le \beta^k(t,y) = K\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{(y-y_k)^2}{2\sigma_m^2 t}\right), \quad K < +\infty,$$

откуда следует

$$\left|E_y^Y L^{\hat W}(y_k-y,\nu_t) - E_y^{Y^k} L^{\hat W^k}\left(y_k-y,\nu_t^k\right)\right| \le \left|\sigma^2(y)-\sigma_k^2(y)\right|\int_0^t E_y^Y \beta^k(s,y_s)\,ds.$$

Выполняя вторично замену времени $t\to\nu_k$ и обозначая

$$\tilde\beta^k(t,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{(y-y_k)^2}{2\sigma_m^4 t}\right),$$

имеем

$$\left|E_y^Y L^{\hat W}(y_k-y,\nu_t) - E_y^{Y^k} L^{\hat W^k}\left(y_k-y,\nu_t^k\right)\right| \le$$
$$\le K_1\left|\sigma^2(y)-\sigma_k^2(y)\right|E_y^Y\int_{\mathbb R}\int_0^{\sigma_m^2 t}\tilde\beta^k(s,u)L^{\hat W}(u,ds)\,du =$$
$$= K_1\left|\sigma^2(y)-\sigma_k^2(y)\right|\left|\int_{\mathbb R}\int_0^{\sigma_m^2 t}\tilde\beta^k(s,u)V_s'(u-y,s)\,ds\,du\right. =$$
$$= K_1\left|\sigma^2(y)-\sigma_k^2(y)\right|\int_0^{\sigma_m^2 t}\int_{\mathbb R}\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\exp\left(-\frac{(u-y_k)^2}{2\sigma_m^4 s}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\exp\left(-\frac{(u-y)^2}{2s}\right)ds\,du =$$
$$= K_2\left|\sigma^2(y)-\sigma_k^2(y)\right|\int_0^{\sigma_m^2 t}\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\exp\left(-\frac{(y-y_k)^2}{2\left(1+\sigma_m^4\right)s}\right)ds,$$

где $K_1, K_2 < +\infty$ — константы, явный вид которых сейчас несуществен. Утверждение (15) теперь следует из леммы 2 и того факта, что функция $\sigma^2(\cdot) - \sigma_k^2(\cdot)$ в точке y_k непрерывна и принимает значение 0.

Теорема доказана.

В заключение отметим, что результаты, аналогичные теоремам 1 – 3, могут быть получены и для уравнения

$$x_1 = x_0 + \int_0^t a(x_s)\,ds + \int_0^t b(x_s)\,dW_s, \quad t \ge 0,$$

где a то же, что и в исходном уравнении (1), b — некоторая положительная функция, удовлетворяющая условию Липшица. Случай $b \equiv 1$ был выбран исключительно с целью сокращения изложения.

1. *Harrison J. M., Shepp L. A.* On skew Brownian motion // Ann. Probab. – 1981. – **9**, № 2. – P. 309–313.
2. *Nakao S.* On the pathwise uniqueness of solutions of onedimensional stochastic differential equations // Osaka J. Math. – 1972. – **9**, № 3. – P. 513–518.
3. *Portenko N. I.* To the theory of the generalized diffusion // Stochast. Different. Systems (Proc. 3rd Bad Honnef Conf., June 3 – 7 1985): Lect. Notes Control and Inf. Sci. – 1986. – **78**. – P. 330–341.
4. *Портенко Н. И.* Обобщенные диффузионные процессы. – М.: Наука, 1982. – 180 с.
5. *Le Gall J.-F.* One-dimensional stochastic differential equations involving the local times of the unknown process. Stochastic analysis and applications (Swansea, 1983) // Lect. Notes Math. – 1984. – **1095**. – P. 51–82.
6. *Shevchenko G.* On a generalized diffusion process with a drift that is the generalized derivative of a singular function // Ukr. Math. Congr., Kyiv – 2001. – Kyiv: Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine, 2002. – P. 139–148.
7. *Engelbert H. J., Schmidt W.* Strong Markov continuous local martingales and solutions of one-dimensional stochastic differential equations, III // Math. Nachr. – 1991. – **151**. – P. 149–151.
8. *Barlow M., Perkins E.* One-dimensional stochastic differential equations involving a singular increasing process // Stochastics. – 1984. – **12**. – P. 229–249.
9. *Flandoli F., Russo F., Wolf J.* Some stochastic differential equations with distributional drift. – Bielefeld, 2000. – 83 p. – Preprint № 00-03-09.
10. *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. – М.: Наука, 1986. – 448 с.
11. *Weinrub S.* Etude d'une equation differentielle stochastique avec temps local // Semin. Probab. – 1981 / 1982. – **986**. – P. 72–77.
12. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 612 с.
13. *Zaitseva L. L.* On a probabilistic approach to the construction of the generalized diffusion processes // Theory Stochast. Process. – 2000. – **6(22)**, № 1–2. – P. 141–146.

Получено 31.10.2003