УДК 517.988; 517.947

А. Ю. Мальцев (Нац. техн. ун-т України „КПІ", Київ)

ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ СУТТЄВО НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ РІВНЯНЬ

We investigate properties of solutions of the Cauchy problem for evolutionary equations with essentially infinite-dimensional elliptic operators.

Досліджуються властивості розв'язків задачі Коші для еволюційних рівнянь із суттєво нескінченновимірними еліптичними операторами.

Мета цієї статті — дослідити властивості розв'язків задачі Коші для параболічних рівнянь із суттєво нескінченновимірними еліптичними операторами, що залежать від часу. Зазначимо, що задачу Коші для параболічних рівнянь із суттєво нескінченновимірними операторами в стаціонарному випадку розглянуто в роботах [1, 2]. Почнемо з загальних міркувань. Нехай B — банахів простір. Розглянемо в цьому просторі сім'ю операторів $A(t)$, $t \in [0, T]$, таких, що мають спільну щільну в B область визначення $D(A(t)) \equiv D(A)$: $\overline{D(A)} = B$. Будемо вважати, що кожен з операторів $A(t)$ припускає замикання. Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{dw}{dt} = A(t)w. \tag{1}$$

Нехай $T_\Delta \overset{\mathrm{df}}{=} \{ (t, s) \,|\, 0 \le s \le t \le T \}$. Під задачею Коші в трикутнику T_Δ для рівняння (1) розуміємо задачу про знаходження при кожному фіксованому $s \in \in [0, T)$ розв'язку $w(t, s)$ рівняння (1) на відрізку $[s, T]$, що задовольняє початкову умову в точці s:

$$w(s, s) = w_0 \in D(A). \tag{2}$$

Якщо на кожному відрізку $[s, T]$ розв'язок задачі (1), (2) існує та єдиний, можемо розглянути лінійний оператор $U(t, s)$, що ставить у відповідність кожному вектору $w_0 \in D(A)$ значення цього розв'язку в точці t: $U(t, s)w_0 = = w(t, s)$. Тож ми маємо сім'ю лінійних операторів $U(t, s)$, які визначено на $D(A)$. Сім'я $U(t, s)$ називається еволюційною сім'єю, оскільки задовольняє еволюційну властивість: для будь-яких $w_0 \in D(A)$ та $s, \tau, t \in [0, T]$ таких, що $s \le \tau \le t$,

$$U(t, s)w_0 = U(t, \tau)U(\tau, s)w_0. \tag{3}$$

Далі будемо вважати, що $U(t, t) = I$. Якщо при довільних фіксованих t та s оператор $U(t, s)$ є обмеженим на $D(A)$, кожен з операторів сім'ї $U(t, s)$ можна продовжити за неперервністю на увесь простір B. Ці продовження знову позначимо через $U(t, s)$. Зрозуміло, що рівність (3) буде мати місце для будь-якого w_0 з B. Головна мета цієї роботи — дослідження властивостей розв'язку задачі Коші в трикутнику T_Δ для рівняння (1), як функції від $(t, s) \in T_\Delta$, у випадку, коли в якості операторів $A(t)$ використовуються суттєво нескінченновимірні оператори (термін „суттєво нескінченновимірний" буде роз'яснено пізніше), а B — деякий простір функцій.

У даній роботі для побудови відповідних еволюційних сімей використовуємо техніку, запропоновану в [3]. Зауважимо, що існує інший підхід до побудови еволюційних сімей у випадку, коли в правій частині рівнянь знаходяться замкнені оператори, що мають загальну скрізь щільну область визначення та є генераторами деяких (C_0)-півгруп стиску. Цей підхід використовувався в [4]. Але його не можна застосувати до рівнянь, що будуть вивчатися в цій статті, оскільки у правих частинах досліджуваних рівнянь знаходяться оператори, що мають загальну скрізь щільну область визначення, але тільки припускають замикання (не обов'язково є замкненими). Якщо ж ми візьмемо замикання цих операторів, то їхні області визначення не обов'язково будуть збігатися. До того ж застосування теореми 3.11 з гл. 2 [4] вимагає оцінку (рівномірну за часом) швидкості спадання норми резольвенти на нескінченності для кожного з операторів, що знаходяться в правій частині (1), яка є сильнішою за ту, що надається теоремою Хілле – Іосіди. Одержання такої оцінки також становить певні труднощі. Тому в роботі автора [5] та в цій статті для побудови еволюційних сімей обрано методику, викладену в [3].

1. Властивості розв'язку задачі Коші для рівняння $\partial u(t,x)/\partial t = L_x^{j(t)} u(t,x)$. Нехай H — дійсний сепарабельний нескінченновимірний гільбертів простір, $L(H)$ — простір лінійних обмежених операторів у H. Позначимо через $Q_{n,c}$ множину всіх обмежених лінійних операторів, ранг яких не перевищує n, а норма не перевищує c. Множину $M \subseteq L(H)$ будемо називати майже компактною, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існують компактна множина $K \subseteq L(H)$ та числа $n \in \mathbb{N}$, $c > 0$ такі, що множина $K + Q_{n,c}$ є ε-сіткою для M. Нехай множина $\mathfrak{A}$ складається з таких функцій з $C^2(H)$, для яких:

1) для будь-якого $R > 0$ існує майже компактна множина $M \subseteq L(H)$ така, що $\forall x \in B_R = \{x : \|x\| \le R\} : u''(x) \in M$;

2) $u''(x)$ рівномірно неперервна на всіх обмежених підмножинах в H.

Підмножину $\mathfrak{A}$, до якої входять функції, що мають обмежений носій, позначимо через $\mathfrak{A}_0$. Через X позначимо банахів простір, що є замиканням $\mathfrak{A}_0$ у $C^2(H)$ за топологією рівномірної збіжності.

Позначимо через $B_C(H)$ простір самоспряжених операторів у H. Нехай $j \in (B_C(H))^*$. Функціонал j називається додатним, якщо $\forall D \ge 0 \quad j(D) \ge 0$. Лінійний обмежений функціонал j у просторі $B_C(H)$ називається суттєво нескінченновимірним, якщо до його ядра належать всі скінченновимірні (а тому і компактні) оператори. У роботі [6] за додатним суттєво нескінченновимірним функціоналом j було побудовано (C_0)-півгрупу стисків $T^j(t)$ у просторі X. Результатом дії оператора $T^j(t)$ на функцію $\varphi \in \mathfrak{A}_0$ є значення в точці t розв'язку задачі Коші для рівняння $\partial u(t,x)/\partial t = j(u''_{xx}(t,x))/2$ з початковою умовою φ в нулі. У роботі [6] доведено, що такий розв'язок існує, єдиний і належить X. Нехай тепер на відрізку $[0,T]$ задано відображення $j(\cdot)$, значеннями якого є додатні суттєво нескінченновимірні функціонали на $B_C(H)$. Скрізь далі вважаємо, що відображення $j(\cdot)$ задовольняє на відрізку $[0,T]$ умову Ліпшиця

$$(\exists C > 0)(\forall t_1, t_2 \in [0,T] : \|j(t_1) - j(t_2)\| \le C|t_1 - t_2|).$$

Розглянемо у просторі функцій X рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = L_x^{j(t)} u(t,x), \tag{4}$$

де $L^{j(t)} : \mathfrak{A}_0 \to X$; $\forall \varphi \in \mathfrak{A}_0$: $(L^{j(t)}\varphi)(x) = j(t)(\varphi''_{xx})/2$, $t \in [0,T]$. Поставимо для цього рівняння задачу Коші в трикутнику T_Δ. Нехай $U(t,\tau) = T^{j(\tau)}(t-\tau)$, де $\tau \le t$. Якщо $q = \{t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots, t_n = T\}$ — довільне розбиття $[0,T]$ та $t_{j-1} < s \le t_j < t_m \le t < t_{m+1}$, то покладемо за означенням

$$U_q(t,s) = U(t,t_m)U(t_m,t_{m-1})\ldots U(t_{j+1},t_j)U(t_j,s).$$

У роботі [5] доведено, що задача Коші для рівняння (4) на відрізку $[\tau, T]$, $0 \le \le \tau < T$, з початковою умовою $\varphi \in \mathfrak{A}_0$ в точці τ має розв'язок, і при тому єдиний, а відповідна еволюційна сім'я $\tilde{U}(t,\tau)$ є сильною границею за напрямком, що утворюють розбиття q відрізка $[0, T]$: $\tilde{U}(t,\tau)\varphi = \lim_q U_q(t,\tau)\varphi$.

Теорема 1. *Розв'язок задачі Коші у трикутнику T_Δ для рівняння* (4) *є неперервною функцією за сукупністю змінних $(t, s) \in T_\Delta$. Розв'язок неперервно залежить від початкових даних у тому сенсі, що із збіжності $\varphi_m \in \mathfrak{A}_0$ до нуля випливає рівномірна по $(t, s) \in T_\Delta$ збіжність до нуля відповідних розв'язків $\tilde{U}(t, s)\varphi_m$.*

Доведення. Насамперед перевіримо неперервність у T_Δ за сукупністю змінних цього розв'язку. З доведення теореми 2.1 гл. 6 [3] випливає, що для будь-якого $\varphi \in \mathfrak{A}_0$ збіжність $\tilde{U}(t,\tau)\varphi = \lim_q U_q(t,\tau)\varphi$ є рівномірною по $(t,\tau) \in \in T_\Delta$. Тому для доведення неперервності $\tilde{U}(t,\tau)\varphi$ по $(t,\tau) \in T_\Delta$ достатньо довести неперервність $U_q(t,\tau)\varphi$ при кожному фіксованому розбитті q. Отже, нехай $q = \{t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots, t_n = T\}$ — довільне розбиття відрізка $[0, T]$ та $t_{j-1} < < \tau < t_j < t_{j+1} < \ldots < t_m < t < t_{m+1}$. Тоді

$$U_q(t,\tau)\varphi = U(t, t_m)U(t_m, t_{m-1}) \ldots U(t_{j+1}, t_j)U(t_j, \tau)\varphi, \tag{5}$$

і при достатньо малих Δt та $\Delta\tau$ має місце рівність

$$U_q(t+\Delta t, \tau+\Delta\tau)\varphi = U(t+\Delta t, t_m)U(t_m, t_{m-1}) \ldots U(t_{j+1}, t_j)U(t_j, \tau+\Delta\tau)\varphi. \tag{6}$$

Нехай $\tilde{\psi}_1(\Delta\tau) = U(t_m, t_{m-1})U(t_{m-1}, t_{m-2}) \ldots U(t_j, \tau+\Delta\tau)\varphi$, $\tilde{\psi}_2 = U(t_m, t_{m-1}) \times \times U(t_{m-1}, t_{m-2}) \ldots U(t_j, \tau)\varphi$, $\tilde{\psi}_1(\Delta\tau)$, $\tilde{\psi}_2 \in \mathfrak{A}_0$, як пояснювалося в [5]. Тоді

$$\begin{aligned} \| U_q(t+\Delta t, \tau+\Delta\tau)\varphi - U_q(t,\tau)\varphi \| &= \| U(t+\Delta t, t_m)\tilde{\psi}_1(\Delta\tau) - U(t, t_m)\tilde{\psi}_2 \| \le \\ &\le \| U(t+\Delta t, t_m)\tilde{\psi}_1(\Delta\tau) - U(t, t_m)\tilde{\psi}_1(\Delta\tau) \| + \\ &+ \| U(t, t_m)\tilde{\psi}_1(\Delta\tau) - U(t, t_m)\tilde{\psi}_2 \|. \end{aligned} \tag{7}$$

З (7) та означення $\tilde{\psi}_1(\Delta\tau)$ і $\tilde{\psi}_2$ випливає

$$\begin{aligned} \| U_q(t+\Delta t, \tau+\Delta\tau)\varphi - U_q(t,\tau)\varphi \| &\le \| U(t+\Delta t, t_m)\tilde{\psi}_1(\Delta\tau) - U(t, t_m)\tilde{\psi}_1(\Delta\tau) \| + \\ &+ \| U(t_j, \tau+\Delta\tau)\varphi - U(t_j, \tau)\varphi \|, \end{aligned} \tag{8}$$

оскільки норма кожного з операторів $U(t_k, t_{k-1})$, $k = j+1, \ldots, m$, не перевищує одиницю. Оцінимо кожний доданок у (8). Почнемо з другого доданка. Припустимо спочатку, що $\Delta\tau \le 0$. Тоді

$$\begin{aligned} \| U(t_j, \tau+\Delta\tau)\varphi - U(t_j, \tau)\varphi \| &= \left\| T^{j(\tau+\Delta\tau)}(t_j - \tau - \Delta\tau)\varphi - T^{j(\tau)}(t_j - \tau)\varphi \right\| = \\ &= \left\| T^{j(\tau+\Delta\tau)}(t_j - \tau)T^{j(\tau+\Delta\tau)}(-\Delta\tau)\varphi - T^{j(\tau)}(t_j - \tau)\varphi \right\| \le \\ &\le \left\| T^{j(\tau+\Delta\tau)}(t_j - \tau)T^{j(\tau+\Delta\tau)}(-\Delta\tau)\varphi - T^{j(\tau)}(t_j - \tau)T^{j(\tau+\Delta\tau)}(-\Delta\tau)\varphi \right\| + \\ &+ \left\| T^{j(\tau)}(t_j - \tau)T^{j(\tau+\Delta\tau)}(-\Delta\tau)\varphi - T^{j(\tau)}(t_j - \tau)\varphi \right\| \le \\ \le \left\| T^{j(\tau+\Delta\tau)}(-\Delta\tau)\varphi - T^{j(\tau+\Delta\tau)}(0)\varphi \right\| &+ \left\| T^{j(\tau+\Delta\tau)}(t_j - \tau)\psi_{\Delta\tau} - T^{j(\tau)}(t_j - \tau)\psi_{\Delta\tau} \right\|, \end{aligned} \tag{9}$$

де $\psi_{\Delta\tau} = T^{j(\tau+\Delta\tau)}(-\Delta\tau)\varphi$. Оцінимо перший доданок в (9):

$$T^{j(\tau+\Delta\tau)}(-\Delta\tau)\varphi - T^{j(\tau+\Delta\tau)}(0)\varphi =$$
$$= \int_0^{-\Delta\tau} \frac{d}{ds} T^{j(\tau+\Delta\tau)}(s)\varphi ds = \int_0^{-\Delta\tau} T^{j(\tau+\Delta\tau)}(s) L^{j(\tau+\Delta\tau)} \varphi ds. \tag{10}$$

З (10) випливає

$$\left\| T^{j(\tau+\Delta\tau)}(-\Delta\tau)\varphi - T^{j(\tau+\Delta\tau)}(0)\varphi \right\| \le \int_0^{-\Delta\tau} \left\| T^{j(\tau+\Delta\tau)}(s) L^{j(\tau+\Delta\tau)} \varphi \right\| ds \le$$
$$\le \int_0^{-\Delta\tau} \left\| L^{j(\tau+\Delta\tau)}\varphi \right\| ds \le \frac{1}{2}|\Delta\tau| \, \| j(\tau+\Delta\tau) \| \sup_{x\in H} \|\varphi''(x)\| \xrightarrow[\Delta\tau\to 0-]{} 0. \tag{11}$$

Останнє співвідношення випливає з того, що $\| j(\tau+\Delta\tau)\| \underset{\Delta\tau\to 0}{\longrightarrow} \| j(\tau)\|$, а це, в свою чергу, має місце, оскільки $j(\cdot)$ задовольняє умову Ліпшиця на відрізку $[0, T]$, а тому є неперервною на цьому відрізку за нормою. Тепер оцінимо другий доданок у (9). У роботі [7] отримано таку формулу:

$$T^{j_2}(t)\psi - T^{j_1}(t)\psi = t\int_0^1 T^{j_1+\alpha(j_2-j_1)}(t)(L_2 - L_1)\psi \, d\alpha \tag{12}$$

для будь-яких двох додатних суттєво нескінченновимірних функціоналів j_1, j_2 та для будь-якої функції $\psi \in \mathfrak{A}_0$. Оператори $L_1 = L^{j_1}$, $L_2 = L^{j_2}$ такі, що $\overline{L}_1$ — генератор півгрупи $T^{j_1}(t)$, а $\overline{L}_2$ — генератор півгрупи $T^{j_2}(t)$. З (12) випливає

$$\left\| T^{j(\tau+\Delta\tau)}(t_j-\tau)\psi_{\Delta\tau} - T^{j(\tau)}(t_j-\tau)\psi_{\Delta\tau} \right\| \le$$
$$\le \left| t_j - \tau \right| \left\| \int_0^1 T^{j(\tau)+\alpha(j(\tau+\Delta\tau)-j(\tau))}(t_j-\tau)\left(L^{j(\tau+\Delta\tau)} - L^{j(\tau)}\right)\psi_{\Delta\tau} \, d\alpha \right\| \le$$
$$\le \left| t_j - \tau \right| \int_0^1 \left\| \left(L^{j(\tau+\Delta\tau)} - L^{j(\tau)}\right)\psi_{\Delta\tau} \right\| d\alpha = \left| t_j - \tau \right| \left\| \left(L^{j(\tau+\Delta\tau)} - L^{j(\tau)}\right)\psi_{\Delta\tau} \right\|. \tag{13}$$

Далі

$$\left| \left(\left(L^{j(\tau+\Delta\tau)} - L^{j(\tau)}\right)\psi_{\Delta\tau}\right)(x) \right| = \frac{1}{2}\left| (j(\tau+\Delta\tau) - j(\tau))(\psi''_{\Delta\tau}(x)) \right| \le$$
$$\le \frac{1}{2}\| (j(\tau+\Delta\tau) - j(\tau)) \| \|\psi''_{\Delta\tau}(x)\| \le \frac{1}{2} C |\Delta\tau| \sup_{x\in H} \|\psi''_{\Delta\tau}(x)\|. \tag{14}$$

У роботі [5] доведено, що $\sup_{x\in H} \left\| (T^j(s)\varphi)''(x) \right\| \le \sup_{x\in H} \|\varphi''(x)\|$ для будь-якого додатного суттєво нескінченновимірного функціонала j, невід'ємного s та $\varphi \in \mathfrak{A}_0$. Тоді згідно з означенням $\psi_{\Delta\tau}$ та зазначеною властивістю, використовуючи (14), маємо $\left\| \left(L^{j(\tau+\Delta\tau)} - L^{j(\tau)}\right)\psi_{\Delta\tau} \right\| \le \frac{1}{2} C |\Delta\tau| \sup_{x\in H} \|\varphi''(x)\|$. А тому з (13) випливає

$$\left\| T^{j(\tau+\Delta\tau)}(t_j-\tau)\psi_{\Delta\tau} - T^{j(\tau)}(t_j-\tau)\psi_{\Delta\tau} \right\| \le \mathrm{const} \cdot |\Delta\tau| \sup_{x\in H} \|\varphi''(x)\|.$$

Звідси

$$\left\| T^{j(\tau+\Delta\tau)}(t_j-\tau)\psi_{\Delta\tau} - T^{j(\tau)}(t_j-\tau)\psi_{\Delta\tau} \right\| \xrightarrow[\Delta\tau\to 0-]{} 0.$$

З цієї рівності, а також з рівності (11), використовуючи (9), одержуємо $\| U(t_j, \tau+\Delta\tau)\varphi - U(t_j, \tau)\varphi \| \underset{\Delta\tau\to 0-}{\longrightarrow} 0$. Щоб довести, що

$$\| U(t_j, \tau+\Delta\tau)\varphi - U(t_j, \tau)\varphi \| \underset{\Delta\tau\to 0+}{\longrightarrow} 0,$$

зауважимо, що при $\Delta\tau \geq 0$ можемо записати

$$U(t_j, \tau+\Delta\tau)\varphi - U(t_j, \tau)\varphi = T^{j(\tau+\Delta\tau)}(t_j-\tau-\Delta\tau)\varphi - T^{j(\tau)}((t_j-\tau-\Delta\tau)+\Delta\tau)\varphi.$$

Всі подальші міркування є аналогічними таким у випадку $\Delta\tau < 0$. Отже, остаточно будемо мати

$$\| U(t_j, \tau+\Delta\tau)\varphi - U(t_j, \tau)\varphi \| \underset{\Delta\tau\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{15}$$

Знову повернемося до нерівності (8) та спробуємо оцінити перший доданок у правій частині цієї нерівності:

$$\| U(t+\Delta t, t_m)\tilde{\psi}_1(\Delta\tau) - U(t, t_m)\tilde{\psi}_1(\Delta\tau) \| =$$
$$= \left\| T^{j(t_m)}(t+\Delta t - t_m)\tilde{\psi}_1(\Delta\tau) - T^{j(t_m)}(t-t_m)\tilde{\psi}_1(\Delta\tau) \right\|. \tag{16}$$

Оскільки півгрупа $T^{j(t_m)}$ є сильно неперервною, то

$$T^{j(t_m)}(t+\Delta t - t_m) \xrightarrow[(\Delta t, \Delta\tau)\to(0,0)]{s} T^{j(t_m)}(t-t_m). \tag{17}$$

Далі можемо записати

$$\tilde{\psi}_1(\Delta\tau) \xrightarrow[(\Delta t, \Delta\tau)\to(0,0)]{} U(t_m, t_{m-1})U(t_{m-1}, t_{m-2})\ldots U(t_j, \tau)\varphi. \tag{18}$$

Дійсно, згідно з означенням $\tilde{\psi}_1(\Delta\tau)$ та властивостями операторів $U(t_k, t_{k-1})$ маємо

$$\| \tilde{\psi}_1(\Delta\tau) - U(t_m, t_{m-1})U(t_{m-1}, t_{m-2})\ldots U(t_j, \tau)\varphi \| =$$
$$= \| U(t_m, t_{m-1})U(t_{m-1}, t_{m-2})\ldots U(t_j, \tau+\Delta\tau)\varphi -$$
$$- U(t_m, t_{m-1})U(t_{m-1}, t_{m-2})\ldots U(t_j, \tau)\varphi \| \leq \| U(t_j, \tau+\Delta\tau)\varphi - U(t_j, \tau)\varphi \|,$$

звідки, використовуючи (15), і одержимо (18). З рівності (16), враховуючи (17) та (18), отримуємо

$$\| U(t+\Delta t, t_m)\tilde{\psi}_1(\Delta\tau) - U(t, t_m)\tilde{\psi}_1(\Delta\tau) \| \xrightarrow[(\Delta t, \Delta\tau)\to(0,0)]{} 0. \tag{19}$$

Із нерівності (8), враховуючи (19) та (15), робимо остаточний висновок, що $\| U_q(t+\Delta t, \tau+\Delta\tau)\varphi - U_q(t, \tau)\varphi \| \xrightarrow[(\Delta t, \Delta\tau)\to(0,0)]{} 0$. Таким чином, доведено неперервність $U_q(t, \tau)\varphi$ по $(t, \tau) \in T_\Delta$ при кожному фіксованому розбитті q, а тому й неперервність по $(t, \tau) \in T_\Delta$ функції $\tilde{U}(t, \tau)\varphi$. Для завершення доведення залишилося перевірити виконання другого твердження теореми. Нехай $\varphi_m \in \mathfrak{A}_0$ та $\| \varphi_m \| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Нам потрібно довести, що $\| \tilde{U}(t, \tau)\varphi_m \| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ рівномірно по $(t, \tau) \in T_\Delta$. Відмітимо, що $\forall q \in \{q\}$, $\forall (t, \tau) \in T_\Delta : \| U_g(t, \tau) \| \leq$ ≤ 1, тобто сім'я операторів $U_q(t, \tau)$, $q \in \{q\}$, $(t, \tau) \in T_\Delta$ є рівномірною в термінології [3]. Це випливає з означення $U_q(t, \tau)$, того, що півгрупа $T^j(t)$, побудована за будь-яким додатним суттєво нескінченновимірним функціоналом j, є півгрупою стисків, а також з того факту, що норма добутку обмежених лінійних операторів не перевищує добутку їхніх норм. Згідно з твердженням 2.1 з гл. 6 [3] сім'я $\tilde{U}(t, \tau)$, $(t, \tau) \in T_\Delta$, також є рівномірною (обмеженою за нормою). Тому для деякої додатної константи C_1, будь-якого $(t, \tau) \in T_\Delta$ та будь-якого натурального m будемо мати $\| \tilde{U}(t, \tau)\varphi_m \| \leq C_1 \| \varphi_m \|$. Тоді зрозуміло, що $\| \tilde{U}(t, \tau)\varphi_m \| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ та збіжність є рівномірною по $(t, \tau) \in T_\Delta$.

Теорему доведено.

2. Властивості розв'язку задачі Коші для рівняння $\partial u(t,x)/\partial t = L_x^{j(t)}u(t,x) + Zu(t,x)$. Будемо говорити, що векторне поле Z на просторі H належить класу $\mathfrak{A}_0$, якщо: 1) Z має обмежений носій; 2) Z — двічі неперервно диференційовне на H, і при цьому друга похідна Z є рівномірно неперервною на H операторнозначною функцією; 3) $\{ Z'(x) \mid x \in H \}$ — майже компактна множина; 4) $\{ (\xi, Z''(x)) = (\xi, Z)''(x) \mid \|\xi\| \le 1;\ x \in H \}$ — майже компактна множина.

Наведемо пояснення щодо умови 4. При будь-якому $x \in H$ $Z''(x)$ є обмеженим тензором третього рангу $Z''(x)(\xi, h_1, h_2)$, симетричним за сукупністю першого та другого аргументів. Тензор третього рангу на H можна трактувати як білінійний оператор $C: H \times H \to H$, для якого $T(h_1, h_2, \xi) = (\xi, C(h_1, h_2))$. Тоді при фіксованому $\xi \in H$

$$(\xi, C(h_1, h_2)) = (A(\xi)h_1, h_2),$$

де $A(\xi)$ — оператор в H. Саме в цьому сенсі розуміємо оператор $(\xi, Z''(x))$ в умові 4 означення класу $\mathfrak{A}_0$ векторних полів.

Розглянемо тепер у просторі функцій X рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = L_x^{j(t)} u(t,x) + Zu(t,x), \tag{20}$$

де $L^{j(t)} : \mathfrak{A}_0 \to X;\ \forall \varphi \in \mathfrak{A}_0 \colon (L^{j(t)})(x) = j(t)(\varphi''_{xx})/2,\ t \in [0, T]$, а Z — векторне поле класу $\mathfrak{A}_0$. Як і раніше, вважаємо, що $j(\cdot)$ задовольняє умову Ліпшиця на відрізку $[0, T]$. Течію $\Phi_\theta(x) = \Phi(\theta, x)$, що відповідає такому векторному полю, визначено при всіх $(\theta, x) \in R \dotplus H$. Визначимо у просторі X півгрупу $P(\theta)$ за формулою $\forall \varphi \in \mathfrak{A}_0\ \ (P(\theta)\varphi)(\cdot) = \varphi(\Phi_\theta(\cdot))$. У роботі [8] доведено, що $P(\theta)$ є (C_0)-півгрупою стисків. Нехай у цьому пункті $U(t,\tau) = T^{j(\tau)}(t-\tau) \times P(t-\tau)$, де $\tau \le t$. У роботі [8] доведено, що задача Коші на відрізку $[\tau, T]$, $0 \le \tau < T$, для рівняння (20) з початковою умовою $\varphi \in \mathfrak{A}_0$ в точці τ має розв'язок, і притому єдиний, а $\tilde{U}(t,\tau)\varphi = \lim_q U_q(t,\tau)\varphi$ — відповідна еволюційна сім'я.

Встановимо властивості розв'язку задачі Коші в трикутнику T_Δ для рівняння (20).

Теорема 2. *Розв'язок задачі Коші в трикутнику T_Δ для рівняння* (20) *є неперервною функцією за сукупністю змінних $(t, s) \in T_\Delta$. Розв'язок неперервно залежить від початкових даних у тому сенсі, що із збіжності $\varphi_m \in \mathfrak{A}_0$ до нуля випливає рівномірна по $(t, s) \in T_\Delta$ збіжність до нуля відповідних розв'язків $\tilde{U}(t,s)\varphi_m$.*

Доведення. Насамперед перевіримо неперервність у T_Δ за сукупністю змінних цього розв'язку. Із доведення теореми 2.1 гл. 6 [3] випливає, що збіжність $\tilde{U}(t,\tau)\varphi = \lim_q U_q(t,\tau)\varphi$ є рівномірною по $(t,\tau) \in T_\Delta$. Тому для доведення неперервності $\tilde{U}(t,\tau)\varphi$ по $(t,\tau) \in T_\Delta$ достатньо довести неперервність $U_q(t,\tau)\varphi$ при кожному фіксованому розбитті q. Отже, нехай $q = \{ t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots, t_n = T \}$ — довільне розбиття відрізка $[0, T]$ та $t_{j-1} < \tau < t_j < t_{j+1} < \ldots < t_m < t < t_{m+1}$. Тоді

$$U_q(t,\tau)\varphi = U(t, t_m) U(t_m, t_{m-1}) \ldots U(t_{j+1}, t_j) U(t_j, \tau)\varphi,$$

а при достатньо малих Δt та $\Delta\tau$ має місце рівність

$$U_q(t+\Delta t, \tau+\Delta\tau)\varphi = U(t+\Delta t, t_m)U(t_m, t_{m-1}) \ldots U(t_{j+1}, t_j)U(t_j, \tau+\Delta\tau)\varphi.$$

Міркуючи, як і при доведенні теореми 1, отримуємо нерівність, яка виконується при достатньо малих Δt та $\Delta\tau$:

$$\| U_q(t+\Delta t, \tau+\Delta\tau)\varphi - U_q(t, \tau)\varphi \| \leq \| U(t+\Delta t, t_m)\tilde{\psi}_1(\Delta\tau) - U(t, t_m)\tilde{\psi}_1(\Delta\tau) \| +$$
$$+ \| U(t_j, \tau+\Delta\tau)\varphi - U(t_j, \tau)\varphi \|, \tag{21}$$

де $\tilde{\psi}_1(\Delta\tau) = U(t_m, t_{m-1})U(t_{m-1}, t_{m-2}) \ldots U(t_j, \tau+\Delta\tau)\varphi \in \mathfrak{A}_0$. Нерівність (21) є аналогічною (8), але оператори $U(\cdot, \cdot)$ мають тут інший сенс. Дослідимо другий доданок нерівності (21):

$$\| U(t_j, \tau+\Delta\tau)\varphi - U(t_j, \tau)\varphi \| =$$
$$= \left\| T^{(\tau+\Delta\tau)}(t_j-\tau-\Delta\tau)P(t_j-\tau-\Delta\tau)\varphi - T^{(\tau)}(t_j-\tau)P(t_j-\tau)\varphi \right\|. \tag{22}$$

З доведення теореми 1 випливає

$$T^{j(\tau+\Delta\tau)}(t_j-\tau-\Delta\tau) \xrightarrow[(\Delta t, \Delta\tau)\to(0,0)]{s} T^{j(\tau)}(t_j-\tau).$$

Внаслідок сильної неперервності півгрупи P

$$P(t_j-\tau-\Delta\tau) \xrightarrow[(\Delta t, \Delta\tau)\to(0,0)]{s} P(t_j-\tau).$$

Тому, використовуючи відому властивість сильно збіжних операторів, робимо висновок, що права, а отже, і ліва частини рівності (22) прямують до нуля, коли $(\Delta t, \Delta\tau) \to (0, 0)$. Те, що перший доданок в (21) прямує до нуля при $(\Delta t, \Delta\tau) \to \to (0, 0)$, випливає з сильної неперервності півгруп $P(\cdot)$ та $T^j(\cdot)$ (j — додатний суттєво нескінченновимірний), а також з (18), де оператори $U(\cdot, \cdot)$ мають відповідний сенс. Тож неперервність розв'язку в трикутнику доведено. Перевірка другого твердження теореми є аналогічною тому, як це було виконано при доведенні теореми 1.

Теорему доведено.

1. *Богданский Ю. В.* Задача Коши для параболических уравнений с существенно бесконечномерными эллиптическими операторами // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 6. – С. 781–784.
2. *Богданский Ю. В.* Параболические уравнения с существенно бесконечномерными эллиптическими операторами. – Киев, 1977. – 50 с. – Деп. в УкрНИИНТИ, № 4Б269-77Деп.
3. *Далецкий Ю. Л., Фомин С. В.* Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
4. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
5. *Мальцев А. Ю.* Еволюційні суттєво нескінченновимірні рівняння // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 2. – С. 214–220.
6. *Богданский Ю. В.* Задача Коши для уравнения теплопроводности с нерегулярным эллиптическим оператором // Там же. – 1989. – **41**, № 5. – С. 584–590.
7. *Богданский Ю. В.* Задача Коши для существенно бесконечномерного параболического уравнения с переменными коэффициентами // Там же. – 1994. – **46**, № 6. – С. 663–670.
8. *Bogdansky Yu. V.* Cauchy problem for the essentially infinite-dimensional heat equation on a surface in Hilbert space // Там же. – 1995. – **47**, № 6. – С. 737–746.

Одержано 17.03.2003