УДК 519.21

А. Б. Ільєнко (Нац. техн. ун-т „КПІ", Київ)

ПРО ГРАНИЧНИЙ РОЗПОДІЛ ІНТЕГРАЛІВ ВІД ДРОБОВИХ ПРОЦЕСІВ

We establish limit theorems for integrals of the shot noise processes. In addition, we study the asymptotic behavior of moments of integrals of this sort.

Встановлюються граничні теореми для інтегралів від дробових процесів та вивчається асимптотична поведінка моментів таких інтегралів.

Вступ. Нехай $(\zeta(s), s \in \mathbb{R})$ — процес Леві, тобто стохастично неперервний однорідний випадковий процес з незалежними приростами; $\zeta(0) = 0$. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що процес є центрованим і не має гауссової компоненти. З огляду на однорідність процесу його міра Леві має вигляд

$$\Pi(ds, dx) = ds \times \Pi(dx),$$

де $\Pi(dx)$ — борелівська σ-скінченна міра на $\mathbb{R}$. Для додатних цілих p введемо спектральні моменти

$$\Pi_p = \int_{\pm\infty}^{\infty} x^p \Pi(dx), \qquad \overline{\Pi}_p = \int_{\pm\infty}^{\infty} |x|^p \, \Pi(dx)$$

і будемо надалі вважати, що $\overline{\Pi}_2 < \infty$.

Для кожної функції $g \in L_2(\mathbb{R})$ середньоквадратичний інтеграл

$$\theta(t) = \int_{\pm\infty}^{\infty} g(t \pm s)\, d\zeta(s), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

задає стаціонарний дробовий процес (див., наприклад, [1]). Функцію g будемо називати функцією відгуку і вважати, що вона належить як простору $L_2(\mathbb{R})$, так і простору $L_1(\mathbb{R})$.

Позначимо

$$\Theta(T) = \int_0^T \theta(u)\, du, \quad T > 0.$$

У даній роботі вивчається асимптотична поведінка інтегралів $\Theta(T)$, які розглядаються як $L_2(\Omega)$-інтеграли Рімана. У п. 1 досліджуються необхідні і достатні умови на функцію g, за яких випадкові величини $\Theta(T)$ є рівномірно $L_2(\Omega)$- (і $L_p(\Omega)$) обмеженими. У п. 2 вивчаються граничні розподіли, а в п. 3 з'ясовується залежність між швидкістю зростання моментів $\Theta(T)$ та властивостями функції g. У роботі продовжуються дослідження, розпочаті в [2].

1. Умови рівномірної $L_2(\Omega)$-обмеженості інтегралів $\Theta(T)$. Характеристична функція випадкової величини $\Theta(T)$ має вигляд

$$\varphi_T(\lambda) = \exp \int_{\pm\infty}^{\infty} \int_{\pm\infty}^{\infty} \left[\exp\left(i\lambda x \int_s^{s+T} g(u)du \right) \pm 1 \pm i\lambda x \int_s^{s+T} g(u)du \right] ds\, \Pi(dx), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

а її кумулянти задаються формулою

$$k_p(\Theta(T)) = \Pi_p \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_s^{s+T} g(u)\,du \right]^p ds, \quad p \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Наступне твердження встановлює необхідні і достатні умови на функцію відгуку g, за яких інтеграли $\Theta(T)$ є рівномірно $L_2(\Omega)$-обмеженими по $T > 0$.

Теорема 1. *Для того щоб інтеграли $\Theta(T)$, $T > 0$, мали обмежений по T другий момент, необхідно і достатньо виконання таких умов:*

1) $\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\,du = 0$;

2) $\sup\limits_{A \geq 0} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} g(u)g(v)\min\{u, v, A\}\,du\,dv < \infty$;

3) $\sup\limits_{A \geq 0} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} g(-u)g(-v)\min\{u, v, A\}\,du\,dv < \infty$.

Доведення. Із формули (3) видно, що умова

$$\sup_{T>0} \mathrm{E}\Theta^2(T) < \infty \tag{4}$$

еквівалентна умові

$$\sup_{T>0} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_s^{s+T} g(u)\,du \right]^2 ds < \infty. \tag{5}$$

Остання умова в свою чергу виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_s^{\infty} g(u)\,du \right]^2 ds < \infty. \tag{6}$$

Для доведення імплікації (5) $\rightarrow$ (6) достатньо застосувати до функцій

$$G_T(s) = \int_s^{s+T} g(u)\,du$$

теорему Фату та скористатися тим, що $g \in L_1(\mathbb{R})$. Обернена імплікація випливає з нерівності

$$\left[\int_s^{s+T} g(u)\,du \right]^2 \leq 2\left[\int_s^{\infty} g(u)\,du \right]^2 + 2\left[\int_{s+T}^{\infty} g(u)\,du \right]^2, \quad s \in \mathbb{R}.$$

З (6) випливає, що $\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\,du$ може дорівнювати тільки нулю, тобто умова 1 є необхідною. Використовуючи рівність

$$\int_{-A}^{A} \left[\int_s^{\infty} g(u)\,du \right]^2 ds = \int_0^{A} \left[\int_s^{\infty} g(u)\,du \right]^2 ds + \int_0^{A} \left[\int_{-\infty}^{s} g(-u)\,du \right]^2 ds,$$

запишемо (6) у вигляді таких умов:

$$\begin{cases} \int\limits_{\pm\infty}^{\infty} g(u) = 0, \\ \sup\limits_{A>0} \int\limits_0^A \left[\int\limits_s^{\infty} g(u)\,du \right]^2 ds < \infty, \\ \sup\limits_{A>0} \int\limits_0^A \left[\int\limits_s^{\infty} g(\pm u)\,du \right]^2 ds < \infty. \end{cases}$$

Застосовуючи до двох останніх умов теорему Фубіні, одержуємо потрібне. Теорему доведено.

***Зауваження* 1.** Як видно з доведення теореми 1, вимога неперервності параметра T не є суттєвою. З урахуванням цього теорема може бути підсилена таким чином: умови 1 – 3 є достатніми для виконання умови $\sup_{k\geq 1} \mathrm{E}\Theta^2(T_k) < \infty$ з будь-якою послідовністю $T_k \to \infty$ та необхідними хоча б з однією такою послідовністю.

Позначимо через $\mathcal{K}$ множину функцій $g \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, які задовольняють умови 1 – 3. Дві останні характеризують поведінку функції на нескінченності. Як легко бачити з нерівності $\min\{u, v\} \leq \sqrt{uv}$, $u, v \geq 0$, умови 2, 3 будуть виконані, якщо, наприклад,

$$\int\limits_{\pm\infty}^{\infty} |g(u)| \sqrt{|u|}\, du \; < \; \infty .$$

У п. 3 буде наведено характеризацію класу $\mathcal{K}$ у термінах перетворення Фур'є функції g (наслідок 5).

Множина $\mathcal{K}$ зберігає свої властивості і для метрик $L_p(\Omega)$, p парне. Більш точно, справедливе наступне твердження.

***Наслідок* 1.** *Нехай* $\overline{\Pi}_p < \infty$ *для деякого парного* $p > 0$. *Тоді умова*

$$\sup_{T>0} \mathrm{E}\Theta^p(T) \; < \; \infty \tag{7}$$

виконується для всіх $g \in \mathcal{K}$ *і тільки для них.*

Доведення. Для доведення достатньо показати еквівалентність умов (4) і (7). Імплікація (4) $\to$ (7) випливає з формули (3), нерівності

$$\left| \int\limits_{\pm\infty}^{\infty} \left[\int\limits_s^{s+T} g(u)\,du \right]^m ds \right| \; \leq \; \|g\|_{L_1(\mathbb{R})}^{m\pm 2} \int\limits_{\pm\infty}^{\infty} \left[\int\limits_s^{s+T} g(u)\,du \right]^2 ds, \quad 2 \leq m \leq p, \tag{8}$$

і співвідношення між моментами та кумулянтами випадкової величини (див., наприклад, [3], теорема II.12.6). Обернена імплікація є наслідком нерівності Ляпунова.

До цього твердження може бути зроблене зауваження, аналогічне зауваженню 1.

2. Гранична теорема. У даному пункті повністю досліджується питання про граничні розподіли інтегралів $\Theta(T)$. Тут необхідно виділити два випадки. Розглянемо спочатку випадок, коли $\sup_{T>0} \mathrm{E}\Theta^2(T) < \infty$, що внаслідок теореми 1 еквівалентно умові $g \in \mathcal{K}$.

Теорема 2. *Якщо функція* g *належить до класу* $\mathcal{K}$, *то інтеграли* $\Theta(T)$ *збігаються при* $T \to \infty$ *за розподілом до випадкової величини, характеристична функція якої має вигляд*

$$\varphi(\lambda) = \exp\left\{-4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sin^2\left[\frac{\lambda x}{2}\int_{-\infty}^{s}g(u)du\right]ds\,\Pi(dx)\right\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Зауваження 2. З доведення теореми випливає, що $\varphi(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, є характеристичною функцією симетризованого розподілу дробового процесу

$$\hat{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)\,d\zeta(s),$$

де

$$G(s) = \int_{-\infty}^{s} g(u)du.$$

Доведення теореми 2. Нехай $\varphi_T(\lambda)$ — характеристична функція випадкової величини $\Theta(T)$. Припустимо спочатку, що носій функції g є підмножиною відрізку $[-a, a]$. Тоді при $T \geq 2a$ внаслідок умови $\int_{-\infty}^{\infty} g(u)du = 0$ з формули (2) одержуємо

$$\varphi_T(\lambda) = \exp\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-a-T}^{a-T}\left[\exp\left(i\lambda x\int_{s}^{s+T}g(u)du\right) - 1 - i\lambda x\int_{s}^{s+T}g(u)du\right]ds\,\Pi(dx) + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-a}^{a}\left[\exp\left(i\lambda x\int_{s}^{s+T}g(u)du\right) - 1 - i\lambda x\int_{s}^{s+T}g(u)du\right]ds\,\Pi(dx)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-a-T}^{a-T}\left[\exp\left(i\lambda x\int_{-\infty}^{s+T}g(u)du\right) - 1 - i\lambda x\int_{-\infty}^{s+T}g(u)du\right]ds\,\Pi(dx) + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-a}^{a}\left[\exp\left(i\lambda x\int_{s}^{\infty}g(u)du\right) - 1 - i\lambda x\int_{s}^{\infty}g(u)du\right]ds\,\Pi(dx)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-a}^{a}\left[\exp\left(i\lambda x\int_{-\infty}^{s}g(u)du\right) - 1 - i\lambda x\int_{-\infty}^{s}g(u)du + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \exp\left(i\lambda x\int_{s}^{\infty}g(u)du\right) - 1 - i\lambda x\int_{s}^{\infty}g(u)du\right]ds\,\Pi(dx)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\exp\left(i\lambda x\int_{-\infty}^{s}g(u)du\right) - 1 - i\lambda x\int_{-\infty}^{s}g(u)du + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \exp\left(i(-\lambda)x\int_{-\infty}^{s}g(u)du\right) - 1 - i(-\lambda)x\int_{-\infty}^{s}g(u)du\right]ds\,\Pi(dx)\right\} =$$

$$= \exp\left\{-4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sin^2\left[\frac{\lambda x}{2}\int_{-\infty}^{s}g(u)du\right]ds\,\Pi(dx)\right\}.$$

Теорему доведено для фінітних функцій g.

Нехай тепер g — довільна функція з $\mathcal{K}$. Введемо такі позначення:

$$\Delta_a^+ = \int_a^\infty g(u)\,du, \quad \Delta_a^\pm = \int_{\pm\infty}^{\pm a} g(u)\,du, \quad a > 0;$$

$$g_a(u) = g(u)\chi_{[-a,a]}(u) + \chi_{[a\pm\Delta_a^+,a]}(u) + \chi_{[\pm a,\pm a+\Delta_a^\pm]}(u), \quad u \in \mathbb{R}, \quad a > 0,$$

де через $\chi_B(u)$ позначено індикатор множини B;

$$\theta_a(t) = \int_{\pm\infty}^{\infty} g_a(t \pm s)\,d\zeta(s), \quad t \in \mathbb{R}, \quad a > 0;$$

$\Theta_a(T)$ і $\varphi_{a,T}(\lambda)$ — аналог інтегралу $\Theta(T)$, побудований за процесом $\theta_a(t)$, і його характеристична функція відповідно;

$$\varphi_a(\lambda) = \exp\left\{\pm 4 \int_{\pm\infty}^{\infty} \int_{\pm\infty}^{\infty} \sin^2\left[\frac{\lambda x}{2}\int_{\pm\infty}^{s} g_a(u)\,du\right] ds\,\Pi(dx)\right\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Легко бачити, що $\int_{\pm\infty}^{\infty} g_a(u)\,du = 0$, $a > 0$, і при великих a носій $g_a(u)$ є підмножиною відрізка $[-a, a]$.

У цих позначеннях для будь-якого $a > 0$

$$|\varphi_T(\lambda) - \varphi(\lambda)| \le |\varphi_T(\lambda) - \varphi_{a,T}(\lambda)| + |\varphi_{a,T}(\lambda) - \varphi_a(\lambda)| + |\varphi_a(\lambda) - \varphi(\lambda)|, \tag{10}$$

$$\lambda \in \mathbb{R}.$$

Другий доданок справа, як випливає з першої частини доведення, при великих T дорівнює нулю для всіх λ. Тому для доведення теореми достатньо показати, що перший і третій доданки збігаються при $a \to \infty$ до нуля, причому перший — рівномірно за T.

З формули (3) випливає, що для достатньо великих a

$$|\varphi_T(\lambda) - \varphi_{a,T}(\lambda)| \le |\lambda| \{E[\Theta(T) - \Theta_a(T)]^2\}^{1/2} =$$

$$= |\lambda| \left\{\Pi_2 \int_{\pm\infty}^{\infty} \left[\int_s^{s+T} (g(u) \pm g_a(u))\,du\right]^2 ds\right\}^{1/2} \le$$

$$\le 2|\lambda| \left\{\Pi_2 \int_{\pm\infty}^{\infty} \left[\int_s^{\infty} (g(u) \pm g_a(u))\,du\right]^2 ds\right\}^{1/2} \le$$

$$\le 2\sqrt{2\Pi_2}\,|\lambda| \left\{\int_{\pm\infty}^{\infty} \left[\int_s^{\infty} (g(u)\chi_{(a,\infty)}(u) \pm \chi_{[a\pm\Delta_a^+,a]}(u))\,du\right]^2 ds +\right.$$

$$\left. + \int_{\pm\infty}^{\infty} \left[\int_{\pm\infty}^{s} (g(u)\chi_{(\pm\infty,\pm a)}(u) \pm \chi_{[\pm a,\pm a+\Delta_a^\pm]}(u))\,du\right]^2 ds\right\}^{1/2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Розглянемо перший доданок останнього виразу (11). Оскільки

$$\int_s^{\infty} (g(u)\chi_{(a,\infty)}(u) \pm \chi_{[a\pm\Delta_a^+,a]}(u))\,du = 0, \quad s \le a - \Delta_a^+,$$

можемо записати цей доданок таким чином:

$$I_1 = \int\limits_{a-\Delta_a^+}^{\infty} \left[\int\limits_{s}^{\infty} (g(u)\chi_{(a,\infty)}(u) - \chi_{[a-\Delta_a^+, a]}(u))\,du \right]^2 ds =$$

$$= \int\limits_{a-\Delta_a^+}^{a} \left[\int\limits_{a}^{\infty} (g(u)\,du - (a-s) \right]^2 ds + \int\limits_{a}^{\infty} \left[\int\limits_{s}^{\infty} g(u)\,du \right]^2 ds.$$

Легко бачити, що перший доданок у правій частині збігається при $a \to \infty$ до нуля разом з Δ_a^+. Скінченність (і, очевидно, збіжність) другого доданка випливає з формули (6) у доведенні теореми 1.

Другий інтеграл в останньому виразі (11) розглядається аналогічно. Таким чином, перший доданок в (10) збігається по a до нуля при кожному λ рівномірно по T.

Наведені міркування доводять і збіжність останнього доданка в (10). Дійсно, позначаючи через $\hat{\theta}_a(t)$ і $\hat{\theta}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, дробові процеси, побудовані за тим же вхідним процесом та функціями відгуку $\int_{-\infty}^{s} g_a(u)\,du$ і $\int_{-\infty}^{s} g(u)\,du$ відповідно, і враховуючи формули

$$\varphi_a(\lambda) = |\varphi_{\hat{\theta}_a(0)}(\lambda)|^2, \quad \varphi(\lambda) = |\varphi_{\hat{\theta}(0)}(\lambda)|^2, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

та співвідношення

$$|\varphi_{\hat{\theta}_a(0)}(\lambda) - \varphi_{\hat{\theta}(0)}(\lambda)| \le |\lambda| \left\{ \mathrm{E}[\hat{\theta}_a(0) - \hat{\theta}(0)]^2 \right\}^{1/2} =$$

$$= |\lambda| \left\{ \Pi_2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\int\limits_{s}^{\infty} (g_a(u) - g(u))\,du \right]^2 ds \right\}^{1/2}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

знову одержуємо (11). Таким чином, теорему повністю доведено.

Із доведення безпосередньо випливає, що за умови $g \in \mathcal{K}$ моменти $\mathrm{E}\Theta^2(T)$ збігаються при $T \to \infty$ до другого моменту граничного розподілу, тобто до величини $2\Pi_2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{s} g(u)\,du \right]^2 ds$. Більш того, якщо замість другого моменту використати в (11) момент будь якого парного порядку та застосувати теорему про зв'язок моментів і кумулянтів випадкової величини ([3], теорема II.12.6), можна одержати такий наслідок.

Наслідок 2. *Нехай $\overline{\Pi}_p < \infty$ для всякого парного $p > 0$ і $g \in \mathcal{K}$. Тоді моменти $\mathrm{E}\Theta^p(T)$ збігаються при $T \to \infty$ до p-го моменту граничного розподілу.*

Зауваження 3. Припустимо тепер, що інтеграл в (1) береться за процесом $\sigma w(s)$, де $w(s)$, $s \in \mathbb{R}$, — стандартний вінерівський процес. Тоді $\Theta(T)$ буде нормально розподіленою випадковою величиною з нульовим середнім та дисперсією $\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{s}^{s+T} g(u)\,du \right]^2 ds$. Наведені міркування показують, що в цьому випадку інтеграли $\Theta(T)$ також збігаються до відповідного симетризованого розподілу, який тепер є нормальним з нульовим середнім і дисперсією $2\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{s} g(u)\,du \right]^2 ds$. Тому в загальному випадку, коли вхідний процес має гауссівську компоненту і $g \in \mathcal{K}$, інтеграли $\Theta(T)$ збігаються за розподілом до випадкової величини, характеристична функція якої має вигляд

$$\varphi(\lambda) = \exp\left\{\pm 4 \int_{\pm\infty}^{\infty}\int_{\pm\infty}^{\infty} \sin^2\left[\frac{\lambda x}{2}\int_{\pm\infty}^{s} g(u)\,du\right] ds\,\Pi(dx) - \right.$$

$$\left. - \sigma^2\lambda^2 \int_{\pm\infty}^{\infty}\left[\int_{\pm\infty}^{s} g(u)\,du\right]^2 ds\right\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Тепер розглянемо випадок, коли $\sup_{T>0} \mathrm{E}\Theta^2(T) = \infty$, тобто $g \notin \mathcal{K}$. З формули (3) та співвідношення

$$\int_{\pm\infty}^{\infty}\left[\int_{s}^{s+T} g(u)\,du\right]^2 ds \;\le\; T\,\|g\|^2_{L_1(\mathbb{R})}$$

випливає, що $\sup_{T\le A} \mathrm{E}\Theta^2(T) < \infty$ для всіх $A \ge 0$. Тому внаслідок зауваження 1 одержуємо

$$\lim_{T\to\infty} \mathrm{E}\Theta^2(T) = \infty. \tag{12}$$

Має місце таке твердження.

Теорема 3. *Якщо функція g не належить до класу $\mathcal{K}$, то випадкові величини $\Theta(T)\big/\sqrt{\mathrm{E}\Theta^2(T)}$ збігаються при $T \to \infty$ за розподілом до стандартної гауссівської випадкової величини.*

Доведення. Будемо використовувати схему доведення граничної теореми з [2]. Внаслідок формули (2) достатньо показати, що

$$I(T) = \left|\int_{\pm\infty}^{\infty}\int_{\pm\infty}^{\infty}\left[\exp\frac{i\lambda x\int_s^{s+T} g(u)\,du}{\left(\Pi_2\int_{\pm\infty}^{\infty}\left[\int_s^{s+T} g(u)\,du\right]^2 ds\right)^{1/2}} - 1 - \frac{i\lambda x\int_s^{s+T} g(u)\,du}{\left(\Pi_2\int_{\pm\infty}^{\infty}\left[\int_s^{s+T} g(u)\,du\right]^2 ds\right)^{1/2}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\lambda^2 x^2\left[\int_s^{s+T} g(u)\,du\right]^2}{2\Pi_2\int_{\pm\infty}^{\infty}\left[\int_s^{s+T} g(u)\,du\right]^2 ds}\right] ds\Pi(dx)\right| \to 0$$

при $T \to \infty$. Зафіксуємо деяке $A > 0$ та позначимо через $I_1(T)$ та $I_2(T)$ величину $I(T)$ з заміною зовнішнього інтеграла по x на $\int_{|x|\le A}$ та $\int_{|x|>A}$ відповідно. З нерівності $|e^{i\alpha} - 1 - i\alpha + \alpha^2/2| \le |\alpha|^3/6$ одержуємо

$$I_1(T) \le \int_{\pm A}^{A}\int_{\pm\infty}^{\infty} \frac{|\lambda|^3 |x|^3\left[\int_s^{s+T} |g(u)|\,du\right]^3}{\left(\Pi_2\int_{\pm\infty}^{\infty}\left[\int_s^{s+T} |g(u)|\,du\right]^2 ds\right)^{3/2}}\, ds\,\Pi(dx) \;\le$$

$$\le \frac{A|\lambda|^3\int_{\pm A}^{A} |x|^2\,\Pi(dx)\,\|g\|_{L_1(\mathbb{R})}}{\Pi_2^{3/2}\left(\int_{\pm\infty}^{\infty}\left[\int_s^{s+T} |g(u)|\,du\right]^2 ds\right)^{1/2}}.$$

Тому внаслідок (3) і (12) $\lim_{T\to\infty} I_1(T) = 0$. Далі, з нерівності

$$\left| e^{i\alpha} - 1 - i\alpha + \frac{\alpha^2}{2} \right| \le |e^{i\alpha} - 1 - i\alpha| + \frac{|\alpha|^2}{2} \le |\alpha|^2$$

одержимо

$$I_2(T) \le \Pi_2^{-1}\lambda^2 \int_{|x|>A} x^2 \Pi(dx).$$

Останній вираз відповідним вибором числа A можна зробити як завгодно малим. Залишається зауважити, що $I(T) \le I_1(T) + I_2(T)$. Теорему доведено.

3. Асимптотична поведінка моментів інтегралів $\Theta(T)$. У цьому пункті для з'ясування залежності між швидкістю зростання моментів $\Theta(T)$ та властивостями функції g використовуються методи аналізу Фур'є.

Теорема 4. *Нехай $(\hat{g}(\lambda), \lambda \in \mathbb{R})$ — перетворення Фур'є функції g і для деякого $\alpha \ge 0$ існує скінченна ненульова границя*

$$C = \lim_{\lambda \to 0} \frac{|\hat{g}(\lambda)|}{\lambda^\alpha}.$$

Тоді має місце асимптотична рівність

$$\mathrm{E}\Theta^2(T) \sim \begin{cases} k(\alpha)\Pi_2 C^2 T^{1-2\alpha}, & \text{якщо} \quad 0 \le \alpha < \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2}{\pi}\Pi_2 C^2 \ln T, & \text{якщо} \quad \alpha = \dfrac{1}{2}, \\ 2\Pi_2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{s} g(u)du \right]^2 ds, & \text{якщо} \quad \alpha > \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

де

$$k(\alpha) = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{2\alpha-2} \sin^2 \frac{\lambda}{2} d\lambda.$$

Зауваження 4. З формули $k(0) = 1$ (див., наприклад, [4, с. 633]) одержимо, що при $\int_{-\infty}^{\infty} g(u)du \ne 0$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \mathrm{E}\Theta^2(T) = \Pi_2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(u)du \right]^2 > 0.$$

Доведення теореми 4. Використовуючи рівність Парсеваля, з формули (3) одержуємо

$$\mathrm{E}\Theta^2(T) = \Pi_2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_s^{s+T} g(u)du \right]^2 ds = \frac{\Pi_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{g}(\lambda)|^2}{\lambda^2} |1 - \exp(-i\lambda T)|^2 d\lambda =$$

$$= \frac{4\Pi_2}{\pi} \int_0^\infty \frac{|\hat{g}(\lambda)|^2}{\lambda^2} \sin^2 \frac{\lambda T}{2} d\lambda. \tag{13}$$

Із нерівності

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{|\hat{g}(\lambda)|^2}{\lambda^2} \sin^2 \frac{\lambda T}{2} d\lambda \le \frac{1}{\varepsilon^2} \int_\varepsilon^\infty |\hat{g}(\lambda)|^2 d\lambda \le \frac{1}{\varepsilon^2} \|g\|^2_{L_2(\mathbb{R})}, \quad \varepsilon > 0, \tag{14}$$

видно, що у випадку $0 \le \alpha \le 1/2$ відповідні асимптотичні співвідношення достатньо довести для інтегралів $\int_0^\varepsilon \dfrac{|\hat{g}(\lambda)|^2}{\lambda^2} \sin^2 \dfrac{\lambda T}{2} d\lambda$.

Зафіксуємо $\delta > 0$ і виберемо ε таким, що

$$C - \delta \leq \frac{|\hat{g}(\lambda)|}{\lambda^{\alpha}} \leq C + \delta \quad \text{при} \quad 0 \leq \lambda \leq \varepsilon.$$

Тоді при $0 \leq \alpha < 1/2$ потрібний результат випливає з нерівності

$$(C-\delta)^2 T^{1-2\alpha} \int_0^{\varepsilon T} \lambda^{2\alpha-2} \sin^2 \frac{\lambda}{2} d\lambda \leq \int_0^{\varepsilon} \frac{|\hat{g}(\lambda)|^2}{\lambda^2} \sin^2 \frac{\lambda T}{2} d\lambda \leq$$

$$\leq (C+\delta)^2 T^{1-2\alpha} \int_0^{\varepsilon T} \lambda^{2\alpha-2} \sin^2 \frac{\lambda}{2} d\lambda, \quad T > 0, \tag{15}$$

та скінченності інтеграла $\int_0^{\infty} \lambda^{2\alpha-2} \sin^2(\lambda/2) d\lambda$, а при $\alpha = 1/2$ — із співвідношення

$$(C-\delta)^2 \left[\frac{\ln \varepsilon}{2} + \int_0^1 \frac{\sin^2(\lambda/2)}{\lambda} d\lambda - \frac{1}{2} \int_1^{\varepsilon T} \frac{\cos\lambda}{\lambda} d\lambda \right] + (C-\delta)^2 \frac{\ln T}{2} =$$

$$= (C-\delta)^2 \int_0^{\varepsilon T} \frac{\sin^2(\lambda/2)}{\lambda} d\lambda \leq \int_0^{\varepsilon} \frac{|\hat{g}(\lambda)|^2}{\lambda^2} \sin^2 \frac{\lambda T}{2} d\lambda \leq$$

$$\leq (C+\delta)^2 \int_0^{\varepsilon T} \frac{\sin^2(\lambda/2)}{\lambda} d\lambda =$$

$$= (C+\delta)^2 \left[\frac{\ln \varepsilon}{2} + \int_0^1 \frac{\sin^2(\lambda/2)}{\lambda} d\lambda - \frac{1}{2} \int_1^{\varepsilon T} \frac{\cos\lambda}{\lambda} d\lambda \right] +$$

$$+ (C+\delta)^2 \frac{\ln T}{2}, \quad T > 0,$$

та обмеженості по T виразу в квадратних дужках.

Якщо $\alpha > 1/2$, то внаслідок (14) і нерівності

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{|\hat{g}(\lambda)|^2}{\lambda^2} \sin^2 \frac{\lambda T}{2} d\lambda \leq \varepsilon^{2\alpha-1} \int_0^{\varepsilon} \frac{|\hat{g}(\lambda)|^2}{\lambda^{1+2\alpha}} d\lambda \leq (C+\delta)^2 \varepsilon^{2\alpha}$$

одержимо, що $\sup_{T>0} \mathrm{E}\Theta^2(T) < \infty$, тобто $g \in \mathcal{K}$. Тому остання частина твердження випливає із зауваження 2. Теорему доведено.

Наведемо декілька наслідків теореми 4.

Наслідок 3. *Нехай* $\overline{\Pi}_p < \infty$ *для деякого парного* $p > 0$. *Тоді в умовах теореми* 4 *має місце асимптотична рівність*

$$\mathrm{E}\Theta^p(T) \sim \begin{cases} k^{p/2}(\alpha)\Pi_2^{p/2} C^p T^{p(1-2\alpha)/2}, & \text{якщо} \quad 0 \leq \alpha < \frac{1}{2}, \\ \left(\frac{2}{\pi}\right)^{p/2} \Pi_2^{p/2} C^p \ln^{p/2} T, & \text{якщо} \quad \alpha = \frac{1}{2}, \\ m_p, & \text{якщо} \quad \alpha > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

де m_p *—* p*-й момент граничного розподілу (див. п.* 2).

Доведення при $0 \leq \alpha \leq 1/2$ випливає з формул (3), (8), теореми 4 та співвідношення між моментами і кумулянтами випадкової величини ([3], теорема II.12.6), а при $\alpha > 1/2$ — з наслідку 2.

Наслідок 4. *Для того щоб виконувалася оцінка*

$$E\Theta^2(T) = o(T), \quad T \to \infty,$$

необхідно і достатньо, щоб $\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\,du = 0$.

Доведення. Необхідність випливає із зауваження 4, а достатність — з правої нерівності в (15), якщо там покласти $C = \alpha = 0$.

Наслідок 5. *Функція* g *належить до класу* $\mathcal{K}$ *тоді і тільки тоді, коли для деякого* $\varepsilon > 0$

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{|\hat{g}(\lambda)|^2}{\lambda^2}\,d\lambda < \infty.$$

Доведення. Нехай $g \in \mathcal{K}$. Тоді внаслідок (6) функція

$$G(s) = \int_{-\infty}^{s} g(u)\,du$$

належить простору $L_2(\mathbb{R})$. Позначаючи через $(\hat{G}(\lambda), \lambda \in \mathbb{R})$ її L_2-перетворення Фур'є (звичайного може не існувати), одержуємо

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{|\hat{g}(\lambda)|^2}{\lambda^2}\,d\lambda \le \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{G}(\lambda)|^2\,d\lambda < \infty.$$

Обернена імплікація випливає безпосередньо з формули (13).

Автор щиро вдячний своєму науковому керівнику проф. В. В. Булдигіну за постановку задачі та постійну допомогу в роботі.

1. *Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В.* Метрические характеристики случайных величин и процессов. – К.: ТВІМС, 1998. – 290 с.
2. *Ільєнко А. Б.* Асимптотична поведінка вибіркових середніх дробових процесів // Теорія ймовірностей і мат. статистика (у друці).
3. *Ширяев А. Н.* Вероятность. – М.: Наука, 1980. – 576 с.
4. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. – М.: Наука, 1966. – Т. 2. – 800 с.

Одержано 29.12.2000