УДК 517.9

К. Г. Валеев, И. А. Джалладова (Киев. нац. эконом. ун-т)

ОПТИМИЗАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ РАЗНОСТНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

We present new results concerning the synthesis of optimal control for systems of difference equations that depend on semi-Markov or Markov stochastic process. We obtain necessary conditions of the optimality of solutions which generalize the known conditions of the optimality for deterministic systems of control. These necessary conditions of the optimality are obtained in the form convenient for the synthesis of optimal control. On the basis of the Lyapunov stochastic functions, we obtain matrix difference equations of the Riccati type whose integration enables one to synthesize the optimal control. The results obtained generalize the previous results for deterministic systems of difference equations.

Наведено нові результати по синтезу оптимального керування для систем різницевих рівнянь, що залежать від напівмарковського або марковського випадкового процесу. Отримано необхідні умови оптимальності розв'язків, які узагальнюють відомі умови оптимальності для детермінованих систем керування. Необхідні умови оптимальності одержано в формі, зручній для синтезу оптимального керування. На основі стохастичних функцій Ляпунова отримано матричні різницеві рівняння типу Ріккаті, інтегрування яких дозволяє провести синтез оптимального керування. Здобуті результати є узагальненням знайдених раніше результатів для детермінованих систем різницевих рівнянь.

1. Основные понятия. Случайная величина η полностью определяется функцией распределения

$$F_\eta(x) = \mathrm{P}\{\eta < x\}.$$

Для исследований оказывается удобной плотность распределения вероятностей $f_\eta(x)$, определяемая по формуле

$$F_\eta(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\eta(x)\,dx$$

и удовлетворяющая условиям

$$f_\eta(x) \geq 0, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f_\eta(x)\,dx = 1.$$

В частном случае, когда η — дискретная величина, принимающая значения θ_k с вероятностями $p_k = \mathrm{P}\{\eta = \theta_k\}$, $k = 1, \ldots, n$, полагаем

$$f_\eta(x) = \sum_{k=1}^{n} p_k \delta(x - \theta_k),$$

где $\delta(x)$ — δ-функция Дирака

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\delta(x-\theta)\,dx = \varphi(\theta).$$

Пусть скалярная случайная величина x имеет плотность распределения $f(x)$.

Символом $\langle \varphi(x) \rangle$ обозначаем математическое ожидание функции $\varphi(x)$, определяемое по формуле

$$\langle \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x)\,dx.$$

В частном случае величина

$$E \equiv \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

называется *математическим ожиданием случайной величины* x или *первым моментом случайной величины* x.

Пусть $X = (x_1, \ldots, x_m)^*$ — векторная случайная величина с плотностью распределения $f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Вектор первых моментов

$$E \equiv \langle X \rangle = \int_{E_m} X f(X) dX$$

называется *математическим ожиданием* случайной векторной величины X.

Матрица вторых начальных моментов определяется формулой

$$D \equiv \left\langle XX^* \right\rangle = \int_{E_m} XX^* f(k, X) dX,$$

где E_m — m-мерное пространство переменных $x_1, \ldots, x_m$, $dX = dx_1 dx_2 \ldots dx_m$.

В общем случае можно отождествлять случайную величину η с плотностью распределения $f_\eta(x)$ и рассматривать множество случайных величин как множество интегрируемых детерминированных функций, удовлетворяющих условиям

$$f(x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Такие функции называем *стохастическими*.

Пусть $\xi(t)$ — полумарковский случайный процесс, принимающий n различных состояний с вероятностями

$$p_s(t) = \mathrm{P}\{\xi(t) = \theta_s\}, \quad s = 1, 2, \ldots, n.$$

Предполагаем, что процесс $\xi(t)$ имеет скачки в последующие моменты времени t_j, $j = 0, 1, 2, \ldots, t_0 = 0$. Процесс $\xi(t)$ может изменить состояние лишь в момент скачка t_j.

В общем случае после скачка процесс может остаться в том же состоянии. Предполагаем, что $\xi(t)$ непрерывен в точках t_j справа.

Пусть при $t \geq 0$ заданы n различных функций $w_s(t, X)$, $s = 1, \ldots, n$. Будем называть функцию $w(t, X, \xi(t))$ *полумарковской*, если при $t_j \leq t \leq t_{j+1}$, $\xi(t) = \theta_s$ выполнено равенство $w(t, X, \xi(t)) = w_s(t - t_j, X)$.

Полумарковская функция $w(t, X, \xi(t))$ является функционалом от случайного процесса $\xi(t)$. Для вычисления $w(t, X, \xi(t))$ в момент t требуется знать значения $t, X, \xi(t)$ в момент t, а также значения момента последнего скачка t_j.

Необходимость введения полумарковской функции выясняется при синтезе оптимальных регуляторов, так как для системы с кусочно-постоянными коэффициентами оптимальное управление оказывается полумарковской функцией.

2. Нелинейная система разностных уравнений, зависящая от марковской цепи. Пусть конечнозначная марковская цепь ξ_k принимает конечное число значений $\theta_1, \ldots, \theta_n$ с вероятностями $p_s(k) = \mathrm{P}\{\xi_k = \theta_s\}$, $s = 1, \ldots, n$, которые удовлетворяют системе разностных уравнений

$$p_s(k+1) = \sum_{j=1}^{n} \pi_{sj}(k) p_j(k), \quad s = 1, \ldots, n.$$

Рассмотрим систему нелинейных разностных уравнений

$$X_{k+1} = F(k, X_k, \xi_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

зависящую от марковской цепи ξ_k. Обозначим

$$Y = F_s(k, X), \quad s = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Обратные вектор-функции обозначим через

$$X = F_s^{-1}(k, Y), \quad s = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Предполагаем, что вектор-функции (2), (3) непрерывны, дифференцируемы и выполнены условия

$$\det \frac{DF_s(k, X)}{DX} \neq 0, \qquad \det \frac{DF_s^{-1}(k, X)}{DX} \neq 0. \tag{4}$$

Частные плотности распределения вероятности $f_s(k, X)$, $s = 1, \ldots, n$, системы случайных величин (X_k, ξ_k) при выполнении условий (4) удовлетворяют системе функциональных уравнений

$$f_s(k+1, X) = \sum_{j=1}^{n} \pi_{sj}(k) f_j\left(k, F_j^{-1}(k, X)\right) \left| \det \frac{DF_j^{-1}(k, X)}{DX} \right|, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Детерминированная система функциональных уравнений (5) соответствует системе разностных уравнений (1), где ξ_n — случайная марковская цепь.

Для исследования системы уравнений (5) можно применять общий метод Бубнова – Галеркина, задавая частные плотности распределения в виде суммы стандартных плотностей распределения, например:

$$f_s(k, X) = \sum_{l=1}^{N_s} \alpha_{sl}(k) \varphi\left(A_l^{-1}(X - B_l)\right) |\det A_l^{-1}|,$$

где $\varphi(X)$ — некоторая определенная плотность распределения.

Использование моментных уравнений для исследования системы (5) ограничивается нелинейными системами разностных уравнений (1) и является, по-видимому, эффективным для квазилинейных уравнений.

3. Оптимизация решений системы нелинейных уравнений с полумарковской правой частью. Рассматривается система нелинейных разностных уравнений

$$X_{k+1} = F(k, X_k, U_k, \xi_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

где ξ_n — полумарковская цепь, принимающая значения $\theta_1, \ldots, \theta_n$ и определенная интенсивностями $q_{ls}(k)$, $l, s = 1, \ldots, n$; $k = 0, 1, 2, \ldots$, перехода из состояния θ_s в состояние θ_l. Предполагаем, что выполнено условие $F(k, 0, 0, \xi_k) \equiv \equiv 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, и правая часть системы (6) удовлетворяет условиям Липшица

$$\| F(k, X, U_1, \xi_k) - F(k, X_2, U_2, \xi_k) \| \leq \rho \| X_1 - X_2 \| + \rho \| U_1 - U_2 \|. \tag{6$'$}$$

Задается некоторая определенно положительная функция $w(k, X, U, \xi_k)$ такая, что

$$w(k, 0, 0, \xi_k) \equiv 0, \qquad w(k, X, U, \xi_k) > 0 \quad \text{при} \quad \| X \| + \| U \| > 0 \tag{6$''$}$$

и вводится функционал

$$\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \langle w(k, X_k, U_k, \xi_n) \rangle. \tag{7}$$

Предполагается, что ряд (7) сходится.

Ставится задача об отыскании оптимального управления

$$U_k = S(k, X_k, \xi_n), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

такого, что при управлении (8) минимизируются значения функционала ν. Предполагается, что правая часть системы уравнений (6), функция $w(k, X_k, U_n, \xi_n)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, и вектор-функция $S(k, X_k, \xi_n)$ являются полумарковскими. Другими словами, существуют n детерминированных систем управления

$$X_{k+1} = F_s(k, X_k, U_n), \qquad F_s(k, 0, 0) \equiv 0, \quad s = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

n детерминированных определенно положительных функций

$$w_s = w_s(k, X_k, U_k), \qquad w_s(k, X_k, U_k) \geq 0, \quad s = 1, \ldots, n,$$

и n детерминированных вектор-функций

$$U_k = S_k(k, X_k), \qquad s = 1, \ldots, n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

таких, что при $k_j \leq k < k_{j+1}$, $\xi_n = \Theta_s$ система уравнений (6) принимает вид

$$X_{k+1} = F_s(k - k_j, X_k, U_k),$$

функция w записывается в виде

$$w(k, X_k, U_k, \xi_n) = w_s(k - k_j, X_k, U_k),$$

а оптимальные управления (8) — в виде

$$U_k = S_s(k - k_j, X_k).$$

К системе управлений (6) применимы результаты [1].

Введем обозначения

$$H(k, X_k, \xi_n) \equiv F(k, X_k, S_k(k, X_k, \xi_n), \xi_n);$$

$$g(k, X_k, \xi_n) \equiv w(n, X_k, S_k(k, X_k, \xi_n), \xi_n).$$

При этом приходим к системе разностных уравнений с полумарковской правой частью

$$X_{n+1} = H(k, X_n, \xi_n), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{10}$$

для которой ищется значение функционала

$$\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \langle g(k, X_k, \xi_n) \rangle. \tag{11}$$

Вводим стохастические функции Ляпунова

$$\nu_s(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle g(k, X_k, \xi_n) | X_0 = X, \ \xi_n = \Theta_s \rangle, \quad s = 1, \ldots, n,$$

удовлетворяющие системе функциональных уравнений

$$\nu_s(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_0(k) g_s(k, N_s(k, X)) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{n} q_{ls}(k) \nu_l(N_s(k, X)), \quad s = 1, \ldots, n, \tag{12}$$

где $X_k = N_s(k, X_0)$ — решение систем разностных уравнений

$$X_{k+1} = H_s(k, X_k), \quad s = 1, \ldots, n.$$

Если функции $\nu_s(X)$, $s = 1, \ldots, n$, найдены, то значение функционала (11) может быть найдено согласно формуле

$$\nu = \int_{E_m} \sum_{s=1}^{n} \nu_s(X) f_s(0, X)\, dX, \quad dX = dX_1 \ldots dX_m. \tag{13}$$

Поскольку $f_s(0, X) \geq 0$, $s = 1, \ldots, n$, то минимизация функционала ν приводит к задаче минимизации значений $\nu_s(X)$, $s = 1, \ldots, n$, при каждом фиксированном значении X. Значения функций $\nu_s(X)$, $s = 1, \ldots, n$, не зависят от начальных значений $f_s(0, X)$, $s = 1, \ldots, n$, для случайного решения системы (6), но зависят от выбора вектор-функций $U_k = S_s(k, X)$, $s = 1, \ldots, n$. Можно положить $f_s(0, X) \geq 0$, $f_j(0, X) \equiv 0$, $j \neq s$; $j = 1, \ldots, n$, и формула (13) принимает вид

$$\nu = \int_{E_m} \nu_s(X) f(0, X)\, dX.$$

Нулевое решение системы (10) *называем* L_2*-устойчивым, если для любого решения* X_k *с ограниченным начальным значением математического ожидания* $D_0 = \left\langle X_0 X_0^* \right\rangle$ *сходится ряд*

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \left\langle \| X_k \|^2 \right\rangle.$$

Теорема 1. *Пусть выбран закон управления* (8) *такой, что нулевое решение системы* (6), (10) L_2*-устойчиво и существуют стохастические функции Ляпунова* $\nu_s(X)$, $s = 1, \ldots, n$ (12). *Тогда существует минимальное при каждом* X *значение функции* $\nu_s(X)$, *которое достигается при одном выборе оптимального управления*

$$V_s(X) = \min_{U_s(k,X),\, k \geq 0} \nu_s(X) = \min_{U_s(k,X),\, k\geq 0} \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_s(k) g_s(k, N_s(k, X)) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{n} q_{ls}(k) \nu_l(N_s(k, X)), \quad s = 1, \ldots, n. \tag{14}$$

Положим для простоты записи $q_{ls}(0) = 0$, $s = 1, \ldots, n$. При этом система управлений (14) принимает вид

$$V_s(X) = \min_{U_s(k,X),\, k\geq 0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\Psi_s(k) g_s(k, N_s(k, X)) + \sum_{l=1}^{n} q_{ls}(k) \nu_l(N_s(k, X)) \right), s = 1, \ldots, n. \tag{15}$$

Обозначим индексом s решения систем уравнений

$$X_{k+1}^{(s)} = H_s\left(k, X_k^{(s)}\right), \quad s = 1, \ldots, n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

и положим

$$U_k^{(s)} = S_s\left(k, X_k^{(s)}\right), \quad s = 1, \ldots\ n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Для того чтобы использовать идеи Р. Беллмана [2], введем вспомогательные функции

$$V_s\left(k, X_k^{(s)}\right) = \min_{U_s(j,X),\, j\geq k} \sum_{j=k}^{\infty} \left(\Psi_s(j) g_s\left(j, X_j^{(s)}\right) + \sum_{l=1}^{n} q_{ls}(j) V_l\left(X_j^{(s)}\right) \right), \tag{16}$$
$$s = 1, \ldots, n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

При этом справедливы равенства

$$V_s(X) = V_s(0, X), \quad s = 1, \ldots, n.$$

Выделяя одно слагаемое в сумме (16), получаем уравнения типа Беллмана

$$V_s\left(k, X_k^{(s)}\right) = \min_{U_k^{(s)}}\left(\Psi_s(k) w_s\left(k, X_k^{(s)}, U_k^{(s)}\right) + \sum_{l=1}^{n} q_{ls}(k) V_l\left(X_k^{(s)}\right) + V_s\left(k+1, X_{k+1}^{(s)}\right)\right),$$
$$s = 1, \ldots, n,$$

которые можно записать в виде

$$\min_{U_k^{(s)}}\left(V_s\left(k+1, F_s\left(k, X_k^{(s)}, U_k^{(s)}\right)\right) - V_s\left(k, X_k^{(s)}\right) + \Psi_s(k) w_s\left(k, X_k^{(s)}, U_k^{(s)}\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{l=1}^{n} q_{ls}(k) V_s\left(0, X_k^{(s)}\right)\right) = 0, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{17}$$

Полученный результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Система уравнений* (17) *определяет необходимые условия оптимальности и пригодна для отыскания оптимального управления* $U_k^{(k)}$.

Систему уравнений (15) можно записать в виде

$$V_s(X) = \min_{U_s(k, X),\, k \geq 0} \sum_{k=0}^{\infty}\left(\Psi_s(k) q_s(k, N_s(k, X)) + \sum_{l=1}^{n} q_{ls}(k+1) V_l(N_s(k+1, X))\right),$$
$$s = 1, \ldots, n.$$

Вводим вспомогательные функции

$$z_s\left(k, X_k^{(s)}\right) = \min_{U_s(j, X),\, j \geq k} \sum_{j=k}^{\infty}\left(\Psi_s(j) g_s\left(j, X_j^{(s)}\right) + \sum_{l=1}^{n} q_{ls}(j+1) V_l\left(X_{j+1}^{(s)}\right)\right),$$
$$s = 1, \ldots, n; \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Выделяя одно слагаемое в сумме, приходим к системе уравнений

$$z_s\left(k, X_k^{(s)}\right) = \min_{U_k^{(s)}}\left(\Psi_s(k) w_s\left(k, X_k^{(s)}, U_k^{(k)}\right) + \sum_{l=1}^{n} q_{ls}(k+1) V_l\left(X_{k+1}^{(s)}\right) + z_s\left(k+1, X_{k+1}^{(s)}\right)\right),$$
$$s = 1, \ldots, n,$$

которую можно записать в виде

$$\min_{U_k^{(s)}}\left(z_s\left(k+1, F_s\left(k, X_k^{(s)}, U_k^{(s)}\right) - z_s\left(k, X_k^{(s)}\right) + \Psi_s(k) w_s\left(k, X_k^{(s)}, U_k^{(s)}\right) + \right.\right.$$
$$\left. + \sum_{l=1}^{n} q_{ls}^{(k+1)}(k+1) z_l\left(0, F_s\left(0, X_k^{(s)}, U_k^{(s)}\right)\right)\right) = 0, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{18}$$

Теорема 3. *Система уравнений* (18) *равносильна системе уравнений* (17) *и определяет необходимые условия оптимальности.*

Отметим, что $V_s(X) \equiv z_s(0, X)$, $s = 1, \ldots, n$.

4. Оптимизация решений системы разностных уравнений, зависящей от марковской цепи. Пусть ξ_n — марковская цепь, определенная системой разностных уравнений

$$p_s(k+1) = \sum_{j=1}^{n} \pi_{sj}(k) p_j(k), \quad s = 1, \ldots, n.$$

Используя систему равенств

$$\pi_{ls} \geq 0, \quad \sum_{l=1}^{n} \pi_{ls} = 1, \quad l, s = 1, \ldots, n,$$

$$q_{ss}(j) = 0, \quad s = 1, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

$$q_{ls}(j) = \pi_{ls} \cdot \pi_{ss}^{j-1}, \quad l, s = 1, \ldots, n,$$

марковскую цепь будем рассматривать как частный случай полумарковской цепи. Другой способ описания марковской цепи с помощью полумарковской заключается в задании интенсивностей $q_{ls}(k)$ скачка из состояния θ_s в состояние θ_l:

$$q_{ss}(k) \equiv 0, \quad s = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\psi_{ss}(k) = \pi_{ss}^{k}, \quad s = 1, \ldots, n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$q_{ls}(k) = \pi_{ls}\psi_s(k-1) = \pi_{ls}\pi_{ss}^{k-1}, \quad l \neq s, \quad l, s = 1, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Предполагаем, что системы уравнений (9) являются автономными и имеют вид

$$X_{k+1} = F_s(X_k, U_k), \quad F_s(0,0) = 0, \quad s = 1, \ldots, n,$$

а функция $w(k, X, U, \xi)$ не зависит явно от времени k и при этом минимизируемый функционал (7) задается выражением

$$\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \langle w(X_k, U_k, \xi_k) \rangle.$$

Ищем оптимальные управления вида

$$U_k = S_s(X_k), \quad s = 1, \ldots, n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Система уравнений (18) типа Беллмана принимает вид

$$\min_{U_k^{(s)}} \Big(z_s\big(k+1, F_s\big(X_k^{(s)}, U_k^{(s)}\big) - z_s\big(k, X_k^{(s)}\big) + \pi_{ss}^{k} w_s\big(X_k^{(s)}, U_k^{(k)}\big) +$$

$$+ \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq s}}^{n} \pi_{ls}\pi_{ss}^{k} z_l\big(0, F_s\big(X_k^{(s)}, U_k^{(s)}\big)\big)\Big) = 0. \qquad (19)$$

Положим в системе уравнений (19)

$$z_s(k, X) = \pi_{ss}^{k} V_s(X), \quad s = 1, \ldots, n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

и получим систему уравнений типа Беллмана

$$\min_{U_k^{(s)}} \left(\sum_{l=1}^{n} \pi_{ls} V_l\big(F_s\big(X_k^{(s)}, U_k^{(s)}\big)\big) - V_s\big(X_k^{(s)}\big) + w_s\big(X_k^{(s)}, U_k^{(k)}\big) \right) = 0, \quad s = 1, \ldots, n. \qquad (20)$$

Для рассматриваемого случая оптимального управления $U_k^{(s)}$ зависит только от $X_k^{(s)}$ и не зависит явно от времени k.

Теорема 4. *Система уравнений* (20) *определяет необходимые условия оптимальности решений системы уравнений* (6) *в случае, когда случайная цепь* ξ_n *является марковской.*

Замечание 1. Детерминированный случай и случай линейных стохастических систем рассмотрен ранее во многих работах, например, в [1].

5. Случай системы линейных разностных уравнений с полумарковскими коэффициентами. Рассматривается дискретная система управления

$$x_{k+1} = A(k,\xi_k)X_k + B(k,\xi_k)U_k, \quad k = 0,1,2,\dots, \tag{21}$$

с полумарковскими коэффициентами. Ищем вектор управления U_k из условия минимума квадратичного функционала:

$$\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \left\langle \left(X_k^* Q(k,\xi_k)X_k + U_k^* L(k,\xi_k)U_k \right) \right\rangle, \tag{22}$$

где $Q(k,z_k)$, $L(k,z_k)$ — симметрическая положительно определенная матрица. Предполагаем, что при $k \in \left[k_j, k_{j+1}\right)$, $\xi_k = \theta_s$ матричные коэффициенты в формулах (21), (22) определяются выражениями

$$\begin{gathered} A(k,\xi_k) = A_s(k-k_j), \qquad B(k,\xi_n) = B_s(k-k_j), \\ Q(k,\xi_k) = Q_s(k-k_j), \qquad L(k,\xi_k) = L_s(k-k_j), \qquad s = 1,\dots,n, \end{gathered} \tag{23}$$

где $A_s(k)$, $B_s(k)$, $Q_s(k)$, $L_s(k)$, $s = 1,\dots,n$, — наперед заданные детерминированные матрицы, зависящие от дискретного времени $k = 0,1,2,\dots$.

Предполагаем, что оптимальное управление имеет вид

$$U_k = S(k,\xi_k)X_k, \quad k = 0,1,2,\dots, \tag{24}$$

где $S(k,\xi_n)$ — матрица с полумарковскими коэффициентами.

Предполагаем также, что при $k \in \left[k_j, k_{j+1}\right)$, $\xi_k = \theta_s$ справедливы равенства

$$S(k,\xi_k) = S_s(k-k_j), \quad s = 1,\dots,n. \tag{25}$$

Введем обозначения

$$\begin{gathered} H(k,\xi_n) = A(k,\xi_n) + B(k,\xi_n)S(k,\xi_n), \\ G(k,\xi_n) = Q(k,\xi_n) + S^*(k,\xi_n)L(k,\xi_n)S(k,\xi_k). \end{gathered} \tag{26}$$

При этом получаем систему линейных разностных уравнений

$$X_{k+1} = H(k,\xi_n)X_k, \quad k = 0,1,2,\dots, \tag{27}$$

для которой ищется квадратичный функционал

$$\nu = \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} X_k^* G(k,\xi_k)X_k \right\rangle. \tag{28}$$

Введем основные стохастические функции Ляпунова

$$\nu_s(X) \equiv X^* C_s X = \sum_{k}^{\infty} \left\langle X_k^* G(k,\xi_n)X_k \mid X_0 = X,\ \xi_0 = \theta_s \right\rangle, \quad s = 1,\dots,n. \tag{29}$$

Если функции $\nu_s(X)$, $s = 1,\dots,n$, известны, то величину функционала (22) можно найти из формулы соотношения

$$\nu = \int_{E_m} \sum_{s=1}^{n} X^* C_s X f_s(0,X)\,dX = \sum_{s=1}^{n} C_s \circ D_s(0), \tag{30}$$

где используются матрицы частных моментов второго порядка

$$D_s(k) = \int_{E_m} X X^* f_s(k,X)\,dX, \qquad dX = dx_1 \dots dx_m, \qquad s = 1,\dots,n. \tag{31}$$

Рассмотрим системы линейных разностных уравнений (27). Будем предполагать, что решения системы (27) умножаются дополнительно на постоянные матрицы X_{sl}, $\det C_{sl} \neq 0$, $l = 1, \ldots, n$, в момент, когда случайный процесс ξ_n имеем скачок в момент k_j:

$$\xi_{k_{j-1}} = \theta_l, \quad \xi_{k_j} = \theta_s.$$

Пусть система линейных разностных уравнений

$$X_{k+1}^{(s)} = H_s(k) X_k^{(s)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots; \quad s = 1, \ldots, n, \tag{32}$$

имеет фундаментальные матрицы решений $N_s(k)$:

$$X_k^{(s)} = N_s(k) X_0^{(s)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{33}$$

Предполагаем, что при выполнении условий

$$\xi_k = \theta_l, \quad k \in \left[k_{j-1}, k_j\right); \quad \xi_n = \theta_s, \quad k \in \left[k_j, k_{j+1}\right),$$

справедливы формулы

$$X_k = N_l(k - k_{j-1}) X_{k_{j-1}}, \quad k_{j-1} \leq k < k_j;$$

$$X_{k_j} = C_{sl} N_l(k_j - k_{j-1}) X_{k_{j-1}}, \quad \det C_{sl} \neq 0;$$

$$X_k = N_s(k - k_j) X_{k_j}, \quad k_j \leq k < k_{j+1}, \tag{34}$$

т. е. в момент k_j скачка полумарковской цепи s_n решение систем (27) умножается слева дополнительно на неособую матрицу c_{sl}. Из (14) находим систему уравнений

$$\nu_s(X) \equiv X^* C_s X = \sum_{k=0}^{\infty} X^* N_s^*(k) \left(\psi_s(k) G_s(k) + \sum_{l=1}^{n} q_{ls}(k) C_{ls}^* C_l C_{ls} N_s(k) \right) X, \tag{34$'$}$$
$$s = 1, \ldots, n, \quad q_{ls}(0) = 0.$$

Полагая

$$G_s(k) = Q_s(k) + S_s^*(k) L_s(k) S_s(k), \quad U_k^{(s)} = S_s(k) X_k^{(s)}, \quad s = 1, \ldots, n, \tag{35}$$

можем переписать формулы (34′) в виде

$$\nu_s(X) \equiv X^* C_s X =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(X_k^{(s)}\right)^* \left(\psi_s(k) Q_s(k) + \sum_{l=1}^{n} q_{ls}(k) C_{ls}^* C_l C_{ls} \right) X_k^{(s)} + \left(U_k^{(s)}\right)^* \psi_s(k) L_s(k) U_k^{(s)} \right]. \tag{36}$$

Минимизация функционала (30) сводится к минимизации функций $\nu_s(X)$. Таким образом, задача отыскания оптимального управления (24) состоит из n задач оптимизации детерминированных систем управления

$$X_{k+1}^{(s)} = A_s(k) X_k^{(s)} + B_s(k) U_k^{(s)}, \quad s = 1, \ldots, n, \tag{37}$$

где оптимальное управление $U_k^{(s)}$ ищется из условия минимума квадратичного функционала $\nu_s(X)$, $s = 1, \ldots, n$.

Используем известные методы отыскания оптимального уравнения для линейной системы разностных уравнений, изложенные, например, в работах [2–8].

Для этого вводим квадратичные формы

$$V_s\left(k, X_k^{(s)}\right) \equiv \left(X_k^{(s)}\right)^* K(k) X_k^{(s)} =$$

$$= \min_{u_s(j,X),\, j \geq k} \sum_{j=k}^{\infty} \left(\psi_s(j) g_s(j), X_j^{(s)}\right) + \sum_{l=1}^{n} q_{ls}(j) V_l\left(X_j^{(s)}\right), \tag{38}$$

$$s = 1, \ldots, n; \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где полагаем

$$V_s\left(X_0^{(s)}\right) = \left(X_0^{(s)}\right) C_s X_0^{(s)} = V_s\left(0, X_0^{(s)}\right), \quad s = 1, \ldots, n.$$

Получаем систему нелинейных матричных разностных уравнений типа Риккати

$$K_s(k) = \psi_s(k) Q_s(k) + \sum_{l=1}^{n} q_{ls}(k) C_{ls}^* C_l C_{ls} + A_s^*(k) R_s(k);$$

$$R_s(k) \equiv \left(E + K_s(k+1) B_s^*(k) \psi_s^{-1}(k) L_s^{-1}(k) B_s(k)\right)^{-1} K_s(k+1) A_s(k), \quad s = 1, \ldots, n, \tag{39}$$

и оптимальное управление имеет вид

$$U_k^{(s)} = -\psi_s^{-1}(k) L_s^{-2}(k) B_s^*(k) R_s(k) X_k^{(s)}, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{40}$$

При этом справедливы равенства

$$C_l = K_l(0), \quad l = 1, \ldots, n. \tag{41}$$

Систему уравнений (39) – (41) можно записать в равносильном виде

$$S_s(k) \equiv -\left(L_s(k) \psi_s(k) + B_s^*(k) K_s(k+1) B_s(k)\right)^{-1} B_s^*(k) K_s(k+1) A_s(k), \tag{42}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где симметрические матрицы $K_s(n)$ удовлетворяют матричным разностным уравнениям

$$K_s(n) = \psi_s(k) Q_s(n) + \sum_{l=1}^{n} q_{ls}(k) l_{ls}^* K_l(0) c_{ls} +$$

$$+ A_s^*(k) K_s(k+1)\left(A_s(k) + B_s(k) S_s(k)\right), \quad s = 1, \ldots, n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{43}$$

Для того, чтобы упростить вычисления, введем вспомогательные матрицы

$$P_s(k+1) = \frac{1}{\psi_s(k)} K_s(k+1), \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{44}$$

При этом система уравнений (42), (43) принимает более простой для вычислений вид

$$S_s(k) = -\left(Q_s(k) + B_s^*(k) P_s(k+1) B_s(k)\right)^{-1} B_s^*(k) P_s(k+1) A_s(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{45}$$

где

$$P_s(k) = \frac{\psi_s(k)}{\psi_s(k-1)}\left(Q_s(k) + A_s^*(k) P_s(k+1)\left(A_s(k) + B_s(k) S_s(k)\right)\right) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} \frac{q_{ls}(k)}{\psi_s(k-1)} C_{ls}^* k_l(0) C_{ls}, \quad s = 1, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{46}$$

Уравнение (43), соответствующее индексу $n = 0$, имеет вид

$$K_s(0) \equiv K_s = Q_s(0) + A_s^*(0) P_s(1)\left(A_s(0) + B_s(0) S_s(0)\right), \tag{47}$$

так как $q_{ls}(0) = 0$, $s = 1, \ldots, n$.

Полученный вывод запишем в виде следующей теоремы.

Теорема 5. *Пусть дискретная система управления* (21) *имеет полумарковские коэффициенты, зависящие от полумарковской цепи* ξ_k, *определяемой интенсивностями* $q_{ls}(k)$, $s = 1, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots$. *Пусть коэффициент системы управления* (21) *и функционал* (22) *определяются системой уравнений* (23). *Оптимальное управление* U_k, $k = 0, 1, 2$, *ищется в виде* (24) *и решение оптимизированной системы управления имеет скачки решения, определяемые формулами* (34). *Если оптимальное управление ищется из условия минимума квадратичного функционала* (22), *то необходимые условия оптимальности определяются системой уравнений* (45) – (47).

Замечания 2. Формулы (39) – (41) или (45) – (47) можно получить из системы уравнений (14).

Из системы уравнений (14) можно найти другие равносильные формулы для синтеза оптимального управления.

3. Рассмотрим важный частный случай полумарковской цепи, когда в каждом состоянии θ_s цепь ξ_n может находиться не более чем N_s шагов, т. е.

$$\psi_s(N_s) = 0, \quad \sum_{l=1}^{k} q_{ls}(N_s) \neq 0, \quad q_{ls}(N_s+1) = 0. \tag{48}$$

Из системы уравнений (39) находим уравнения

$$\begin{gathered} K_s(N_s+1) = 0, \quad R_s(N_s+1) = 0, \quad s = 1, \ldots, n, \\ K_s(N_s) = \sum_{l=1}^{n} q_{ls}(N_s) C_{ls}^{*} K_l(0), \quad s = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{49}$$

Затем последовательно вычисляются матрицы $K_s(k)$, $R_s(k)$ при $k = N_s - 1$, $N_s - 2, \ldots, 1, 0$. Матрицы $K_l(0)$, $l = 1, \ldots, n$, сначала неизвестны и задаются произвольно, например, $K_l(0)$, $l = 1, \ldots, n$. Затем находятся уточненные значения матриц $K_l(0)$, $l = 1, \ldots, n$, и подставляются в формулы (45). При решении численных примеров изложенный метод последовательных приближений для отыскания матриц $K_l(0)$, $l = 1, \ldots, n$, быстро сходился.

6. Оптимизация решений системы линейных разностных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами. Рассмотрим важный частный случай, когда коэффициенты системы уравнений (21) являются случайными кусочно-постоянными и могут изменять свои значения лишь при скачке полумарковской цепи ξ_k, т. е. при $k \in [k_j, k_{j+1})$, $\xi_k = \theta_s$ справедливы равенства

$$\begin{gathered} A(k, \xi_k) = A_s, \quad B(k, \xi_k) = B_s, \quad Q(k, \xi_k) = Q_s, \\ L(k, \xi_k) = L_s, \quad s = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{50}$$

При этом система разностных уравнений (45), (46) упрощается и принимает вид

$$\begin{gathered} S_s(k) = -\left(Q_s + B_s^{*} P_s(k+1) B_s\right)^{-1} B_s^{*} P_s(k+1) A_s, \\ P_s(k) = \frac{\psi_s(k)}{\psi_s(k-1)}\left(Q_s + A_s^{*} P_s(k+1)\left(A_s + k_s S_s(k)\right)\right) + \\ + \sum_{l=1}^{n} \frac{q_{ls}(k)}{\psi_s(k-1)} C_{ls}^{*} k_l(0) C_{ls}, \quad s = 1, \ldots, n, \quad k = 1, 2. \end{gathered} \tag{51}$$

Если введем обозначения

$$W_s(k) = \frac{1}{\psi_s(k)} R_s(k), \quad s = 1, \ldots, n,$$

то систему уравнений (51) можно переписать в виде

$$W_s(k) = \left(E + P_s(k+1) B_s L_s^{-1} B_s^*\right)^{-2} P_s(k+1) A_s,$$

$$P_s(k) = \frac{\psi_s(k)}{\psi_s(k-1)} \left(Q_s + A_s^* W_s(k)\right) + \sum_{l=1}^{n} \frac{q_{ls}(k)}{\psi_s(k-1)} C_{ls}^* k_l(0) C_{ls}, \tag{52}$$

$$S_s(k) = -L_s^{-1} B_s^* W_s(k), \quad s = 1, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Следует отметить, что в случае кусочно-постоянных коэффициентов системы (21) оптимальное управление является полумарковским и нестационарным.

Рассмотрим важный частный случай, когда полумарковская цепь ξ_n совпадает с марковской цепью. Система разностных уравнений (52) принимает вид

$$\begin{gathered} W_s(k) = \left(E + P_s(k+1) B_s L_s^{-1} B_s^*\right)^{-1} P_s(k+1) A_s, \\ P_s(k) = \pi_{ss}\left(Q_s + A_s^* W_s(k)\right) + \sum_{l=1,\, l \neq s}^{n} \pi_{ls} C_{ls}^* K_l(0) C_{ls}, \\ P_s(0) = Q_s + A_s^* W_s(0), \\ S_s(n) = -L_s^{-1} B_s^* V_s(k), \quad u_k^{(s)} = S_s(k) X_k^{(s)}, \\ s = 1, \ldots, n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \end{gathered} \tag{53}$$

Полученные уравнения являются новыми, но имеют стационарные решения, совпадающие со стационарными решениями системы нелинейных разностных уравнений типа Риккати.

1. *Валеев К. Г., Джалладова И. А.* Оптимизация системы линейных дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 4. – С. 556–562.
2. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
3. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970. – 240 с.
4. *Царьков Е. Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. – Рига: Зинатне, 1989. – 421 с.
5. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения. – К.: Наук. думка, 1976. – 182 с.
6. *Кац И. Я., Красовский Н. Н.* Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикл. математика и механика. – 1960. – № 24. – С. 809–823.
7. *Королюк В. С., Свищук А. В.* Полумарковские случайные эволюции. – К.: Наук. думка, 1992. – 256 с.
8. *Валеев К. Г., Корелова О. Л., Горелов В. И.* Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами. – М.: Изд-во РУДН, 1996. – 240 с.

Получено 01.11.99,
после доработки — 21.03.2001