УДК 517.923

А. А. Мохонько (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

ТЕОРЕМА МАЛЬМКВИСТА ДЛЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ

The Malmquist theorem (1913) on the growth of meromorphic solutions of the differential equation $f' = P(z,f)/Q(z,f)$, where $P(z,f)$ and $Q(z,f)$ are polynomials of all variables, is proved for the case of meromorphic solutions with logarithmic singularity at infinity.

Теорема Мальмквіста (1913) про ріст мероморфних розв'язків диференціального рівняння $f' = P(z,f)/Q(z,f)$, де $P(z,f)$, $Q(z,f)$ є поліномами за всіма змінними, доводиться для випадку мероморфних розв'язків з логарифмічною особливою точкою у нескінченності.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$f' = \frac{P(z,f)}{Q(z,f)} = \frac{\sum_{j=0}^{t} p_{j1}(z) f^j}{\sum_{j=0}^{s} p_{j2}(z) f^j}, \tag{1}$$

где $p_{jq}(z)$ — многочлены. Если в уравнении (1) $\deg_f P \le 2$, $\deg_f Q = 0$, получаем уравнение Риккати $f' = a_2(z) f^2 + a_1(z) f + a_0(z)$ ($a_i(z)$ — рациональные функции). Как пишет В. В. Голубев [1, с. 67 – 68]: „Мальмквист доказал следующую замечательную теорему: если уравнение (1) не есть уравнение Риккати, то любой его однозначный интеграл есть рациональная функция". Эквивалентное утверждение можно сформулировать в терминах неванлинновских характеристик (историю вопроса и библиографию см. в [2, 3]).

Пусть $f(z)$, $z \in G = \{z\colon 0 < r_0 \le |z| < +\infty\}$, — однозначная мероморфная функция. Обозначим через $n(r,f)$ число полюсов функции f в кольце $\{z\colon 0 < r_0 \le |z| \le r\}$ с учетом кратности. Для $x \ge 0$ обозначим $\ln^+ x = \max\{\ln x, 0\}$. Рассмотрим неванлинновские характеристики [4, с. 23] при $r_0 > 0$:

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi,$$
$$N(r,f) = \int_{r_0}^{r} \frac{n(t,f)}{t}\,dt, \qquad T(r,f) = m(r,f) + N(r,f). \tag{2}$$

В работе [5] доказано следующее утверждение.

Теорема А. *Пусть однозначная мероморфная функция $f(z)$, $z \in G$, — решение дифференциального уравнения (1). Если (1) не есть уравнение Риккати, то рост решения не превышает роста коэффициентов*:

$$T(r,f) = O\left(\sum_{j,q} T(r, p_{jq})\right) + O(\ln r), \qquad r \to +\infty. \tag{3}$$

Покажем, что из теоремы А следует утверждение теоремы Мальмквиста. Известно [4, с. 49, 50], что для рациональной функции $p(z)$, $z \in \mathbb{C}$, степени d

$$\lim \frac{T(r,p)}{\ln r} = d, \qquad r \to +\infty, \tag{4}$$

а для трансцендентной мероморфной функции $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$,

© А. А. МОХОНЬКО, 2004

$$\lim \frac{T(r,f)}{\ln r} = +\infty, \quad r \to +\infty. \tag{5}$$

Таким образом, трансцендентная функция растет быстрее любой рациональной функции. Коэффициенты $p_{jq}(z)$ уравнения (1) — рациональные функции, поэтому с учетом (3), (4) $T(r, p_{jq}) = O(\ln r)$, $T(r,f) = O(\ln r)$. Отсюда и из (5) следует, что f — рациональная функция.

Вторая формулировка теоремы Мальмквиста (теорема A) имеет то преимущество, что она остается справедливой и в случае, когда в уравнении (1) и решение $f(z)$, и коэффициенты $p_{jq}(z)$ — трансцендентные мероморфные функции. Если решение уравнения (1) растет быстрее, чем коэффициенты, то это возможно только для уравнения Риккати. Утверждение теоремы A справедливо и для многозначных алгеброидных решений уравнения (1) с алгеброидными коэффициентами.

В настоящей статье выводы этой теоремы распространяются на решения с логарифмической особой точкой в ∞.

Уравнения первого порядка, алгебраические относительно неизвестной функции и ее производной, не могут иметь в интегралах подвижных трансцендентных и существенно особых точек [1, с. 54], однако могут иметь неподвижные трансцендентные и существенно особые точки. Например, интеграл уравнения $2zff' = 1$ имеет вид $f(z) = \sqrt{\ln(z/C)}$, $C = \text{const}$; функция $f(z) = \exp(\ln^2 z)$ — решение уравнения $zf' = 2f\ln z$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (1), где

$$p_{jq}(z) = h_{jq}(z)z^{a_{jq}}(\ln z)^{b_{jq}}, \quad h_{jq}(z) = c_{jq} + o(1), \quad c_{jq} \in \mathbb{C}, \quad c_{t1},\ c_{s2} \neq 0, \tag{6}$$

a_{jq}, $b_{jq} \in \mathbb{R}$, $p_{jq}(z)$, $z \in G = \{z\colon r_0 \le |z| < +\infty\}$ — аналитические функции. Будем предполагать, что асимптотические соотношения (6) выполняются равномерно по θ в любой угловой области, а именно,

$$(\forall\, \alpha, \beta;\ -\infty < \alpha < \beta < +\infty)\ (\forall\, \varepsilon > 0)\ (\exists\, d = d(\alpha, \beta, \varepsilon) > 0)\colon\ h_{jq}(z) = c_{jq} + v_{jq}(z),$$

$$\left|v_{jq}(z)\right| < \varepsilon, \quad z \in \{z = re^{i\theta}\colon d \le r < +\infty,\ \alpha \le \theta \le \beta\},$$

$v_{jq}(z)$ — некоторая аналитическая функция.

Пусть $f(z)$, $z \in G$, — мероморфная функция с логарифмической особой точкой в ∞ (точное определение будет дано ниже). Выберем произвольные α, β, $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$. Положим $k = \pi/(\beta - \alpha)$. Рассмотрим угловую область $g_{\alpha\beta} = \{z = re^{i\theta}\colon \alpha \le \theta \le \beta,\ 0 < r_0 \le r < +\infty\}$ и соответствующую однозначную ветвь $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$, функции $f(z)$, $z \in G$. Неванлинновские характеристики ветви $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$, определяются следующим образом [4, с. 40]:

$$A_{\alpha\beta}(r,f) = \frac{k}{\pi}\int_{r_0}^{r}\left(\frac{1}{t^{k+1}} - \frac{t^{k-1}}{r^{2k}}\right)\left[\ln^+\left|f(te^{i\alpha})\right| + \ln^+\left|f(te^{i\beta})\right|\right]dt,$$

$$B_{\alpha\beta}(r,f) = \frac{2k}{\pi r^k}\int_{\alpha}^{\beta}\ln^+\left|f(re^{i\theta})\right|\sin(k(\theta - \alpha))\,d\theta, \tag{7}$$

$$C_{\alpha\beta}(r,f) = 2k\int_{r_0}^{r} c_{\alpha\beta}(t,f)\left(\frac{1}{t^{k+1}} + \frac{t^{k-1}}{r^{2k}}\right)dt,$$

где $c_{\alpha\beta}(t,f) = c_{\alpha\beta}(t,\infty) = \sum_{r_0 < |\rho_n| \le t,\, \alpha \le \psi_n \le \beta}\sin(k(\psi_n - \alpha))$, а $\rho_n e^{i\psi_n}$ — полюсы функции $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$, рассматриваемые с учетом кратности,

$$S_{\alpha\beta}(r,f) = A_{\alpha\beta}(r,f) + B_{\alpha\beta}(r,f) + C_{\alpha\beta}(r,f). \tag{8}$$

Символы Ландау $O(\ldots)$, $o(\ldots)$ в статье используются при $r \to +\infty$.

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть мероморфная функция $f(z)$, $z \in G$, с логарифмической особой точкой в ∞ является решением уравнения* (1), *коэффициенты p_{jq} которого определены в* (6). *Если* (1) *не есть уравнение Риккати, то для любой ветви $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$,*

$$S_{\alpha\beta}(r,f) = O\left(\sum_{j,q} S_{\alpha\beta}(r, p_{jq})\right) + O(1) = O(1). \tag{9}$$

Уточним, как мы понимаем операции над многозначными функциями. Рассмотрим круг $g = \{z : |z - r_0| < \varepsilon\}$, где r_0, $\varepsilon > 0$, ε — достаточно малое. Выберем любые правильные элементы [6, с. 480] $\exp(a_{jq} \ln_0 z)$, $(\ln_0 z)^{b_{jq}}$, $z \in g$, соответственно функций $z^{a_{jq}} = \exp(a_{jq} \ln z)$, $(\ln z)^{b_{jq}}$. Из свойств этих функций следует, что взятые элементы можно аналитически продолжить вдоль любой непрерывной кривой в области $G = \{z : r_0 \le |z| < +\infty\}$. Предположим, что существует правильный элемент $f_0(z)$, $z \in g$, такой, что при подстановке $f_0(z)$, $\exp(a_{jq} \ln_0 z)$, $(\ln_0 z)^{b_{jq}}$, $z \in g$ в (1), (6) вместо соответственно f, $z^{a_{jq}}$, $(\ln z)^{b_{jq}}$ образуется тождество при $z \in g$. Мы предполагаем, что элемент $f_0(z)$, $z \in g$, можно аналитически продолжить вдоль любой непрерывной кривой $z = \lambda(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, $\lambda(t_0) = r_0$, $\lambda(t_1) = z_1$, принадлежащей G, причем результатом продолжения является либо правильный элемент $f_1(z)$, $z \in \{z : |z - z_1| < \varepsilon_1\}$, $\varepsilon_1 > 0$, либо элемент, имеющий в точке z_1 неразветвленный полюс (элемент вида $\sum_{j=-s}^{+\infty} a_j (z - z_1)^j$, $s \in \mathbb{N}$). Предположим, что для любого $z_1 \in G$ существует бесконечное множество различных элементов указанного вида с центром z_1, которые являются непосредственными аналитическими продолжениями элемента $f_0(z)$, $z \in g$. Множество всех таких элементов обозначим через $f(z)$, $z \in G$. Будем говорить, что $f(z)$, $z \in G$, — мероморфная функция с логарифмической особой точкой в ∞. В частности, если при всех аналитических продолжениях элемента $f_0(z)$, $z \in g$, в области G результатом продолжения является правильный элемент, то $f(z)$, $z \in G$, имеет в ∞ изолированную логарифмическую особую точку.

Выберем произвольные α, β, $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$. Пусть, например, $\alpha > 0$. Рассмотрим кривую $z = r_0 e^{it} = \mu(t)$, $0 \le t \le \alpha$, $\mu(0) = r_0$, $\mu(\alpha) = r_0 e^{i\alpha}$. Аналитически продолжим элементы $f_0(z)$, $\exp(a_{jq} \ln_0 z)$, $(\ln_0 z)^{b_{jq}}$, $z \in g$, вдоль кривой $\mu(t)$, $0 \le t \le \alpha$. В результате продолжения получим элементы $f_\alpha(z)$, $\exp(a_{jq} \ln_\alpha z)$, $(\ln_\alpha z)^{b_{jq}}$ с центром в точке $r_0 e^{i\alpha}$. Далее аналитически продолжим эти элементы вдоль всех возможных кривых $z = r(t) e^{i\theta(t)}$, $t \in [t_1, t_2]$, где $r(t)$, $\theta(t)$ — непрерывные функции, такие, что $r_0 \le r(t) < +\infty$, $\alpha \le \theta(t) \le \beta$, $t_1 \le t \le t_2$. Множество всех элементов, полученных в результате таких продолжений, будем обозначать соответственно через

$$\begin{gathered} f(z), \quad z \in g_{\alpha\beta} = \{z = re^{i\theta} : \alpha \le \theta \le \beta,\ r_0 \le r < +\infty\}, \\ z^{a_{jq}}, \quad z \in g_{\alpha\beta}, \quad (\ln z)^{b_{jq}}, \quad z \in g_{\alpha\beta}, \end{gathered} \tag{10}$$

$g_{\alpha\beta}$ — угловая область на римановой поверхности функции $f(z)$, $z \in G$. Если $\beta - \alpha < 2\pi$, то согласно теореме о монодромии [6, с. 488] функции (8) — однозначные аналитические функции в области $g_{\alpha\beta} \subset \mathbb{C}$. Если $\beta - \alpha \geq 2\pi$, то область $g_{\alpha\beta}$ можно рассматривать как односвязную область на римановой поверхности функции $f(z)$, $z \in G$. В этой области также применима теорема о монодромии. Поэтому функции (8) — однозначные аналитические функции на куске римановой поверхности $g_{\alpha\beta}$.

Неванлинновские характеристики имеют такие свойства [4, с. 41, 45]: если $f(z)$ и $w(z)$, $z \in G$, — мероморфные функции с логарифмической особой точкой в ∞, а $f(z)$ и $w(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$, — однозначные ветви этих функций в угловой области $g_{\alpha\beta}$, то

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta}(r, f+w) &\leq S_{\alpha\beta}(r, f) + S_{\alpha\beta}(r, w) + O(1), \\ S_{\alpha\beta}(r, f\cdot w) &\leq S_{\alpha\beta}(r, f) + S_{\alpha\beta}(r, w) + O(1), \\ S_{\alpha\beta}(r, f^2) &= 2S_{\alpha\beta}(r, f), \\ S_{\alpha\beta}(r, 1/f) &= S_{\alpha\beta}(r, f) + O(1). \end{aligned} \tag{11}$$

Через M обозначим любое из полей: поле однозначных мероморфных в G функций, поле алгеброидных в G функций, поле мероморфных функций с логарифмической особой точкой в ∞. Справедлива следующая теорема [6, 7]: пусть

$$F = P(f)/Q(f) = \frac{\sum_{j=0}^{t} p_{j1} f^j}{\sum_{j=0}^{s} p_{j2} f^j}, \quad d = \max(t, s), \tag{12}$$

f, $p_{jq} \in M$, p_{t1}, $p_{s2} \neq 0$, причем $P(f)$, $Q(f)$ взаимно просты, как многочлены от f над полем M. Тогда

$$S_{\alpha\beta}(r, F) = d\cdot S_{\alpha\beta}(r, f) + O\left(\sum_{j,q} S_{\alpha\beta}(r, p_{jq})\right) + O(1); \tag{13}$$

если M — поле однозначных мероморфных или алгеброидных функций, то

$$T(r, F) = d\cdot T(r, f) + O\left(\sum_{j,q} T(r, p_{jq})\right) + O(\ln r).$$

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $f(z)$, $z \in \{z = re^{i\theta}: \alpha_1 \leq \theta \leq \beta_1,\ r_0 \leq r < +\infty\}$, — *мероморфная функция. Если* $\alpha_1 \leq \alpha < \beta \leq \beta_1$, *то*

$$S_{\alpha_1\beta_1}(r, f) \geq S_{\alpha\beta}(r, f) + O(1). \tag{14}$$

Доказательство. Выберем произвольные γ, Γ: $0 < \gamma < \Gamma < +\infty$. Обозначим

$$D = \left\{z = \rho e^{i\theta}: r_0 \leq \rho < t,\ \alpha \leq \theta \leq \beta,\ \gamma \leq |f(z)| \leq \Gamma\right\},$$

$$\Omega_{\alpha\beta}(t, f) = \frac{1}{\pi(\Gamma^2 - \gamma^2)} \iint_D \left|f'(\rho e^{i\theta})\right|^2 \sin(k(\theta - \alpha))\rho d\rho d\theta.$$

Имеет место соотношение [9] (формула (23)), [10]

$$S_{\alpha\beta}(r,f) + O(1) = 2k\int_{r_0}^{r}\Omega_{\alpha\beta}(t,f)\left(\frac{1}{t^{k+1}}+\frac{t^{k-1}}{r^{2k}}\right)dt \overset{\mathrm{df}}{=} S^*_{\alpha\beta}(r,f). \qquad (15)$$

Из определения следует, что $S^*_{\alpha\beta}(r,f)$ — строго возрастающая функция. Если $\alpha_1 < \alpha \le \theta \le \beta < \beta_1$, то

$$k_1 = \pi/(\beta_1-\alpha_1) < k = \pi/(\beta-\alpha),$$

$$\sin(k_1(\theta-\alpha_1)) > \min\{\sin(k_1(\alpha-\alpha_1)), \sin(k_1(\beta-\beta_1))\} = c > 0,$$

и

$$D \subset D_1 = \left\{z = \rho e^{i\theta}:\ r_0 \le \rho < t,\ \alpha_1 \le \theta \le \beta_1,\ \gamma \le |f(z)| \le \Gamma\right\}.$$

Поэтому

$$\pi(\Gamma^2-\gamma^2)\Omega_{\alpha_1\beta_1}(t,f) = \iint_{D_1}\left|f'(\rho e^{i\theta})\right|^2\sin(k_1(\theta-\alpha_1))\rho d\rho d\theta \ge \iint_{D}\ldots >$$

$$> c\iint_{D}\left|f'(\rho e^{i\theta})\right|^2\rho d\rho d\theta > c\iint_{D}\left|f'(\rho e^{i\theta})\right|^2\sin(k(\theta-\alpha))\rho d\rho d\theta = \pi c(\Gamma^2-\gamma^2)\Omega_{\alpha\beta}.$$

Отсюда следует

$$\Omega_{\alpha_1\beta_1}(t,f) > c\Omega_{\alpha\beta}(t,f), \quad c = \mathrm{const} > 0, \quad \alpha_1 < \alpha < \beta < \beta_1.$$

Существует $r_1 > 0$ такое, что $k_1 c > kt^{-(k-k_1)}$, $t > r_1 \ge r_0$. Тогда

$$S_{\alpha_1\beta_1}(r,f) = 2k_1\int_{r_0}^{r}\Omega_{\alpha_1\beta_1}(t,f)\left(1+\frac{t^{2k_1}}{r^{2k_1}}\right)\frac{dt}{t^{k_1+1}} > 2k_1\int_{r_1}^{r}\ldots >$$

$$> 2\int_{r_1}^{r}k_1c\Omega_{\alpha\beta}(t,f)\left(1+\frac{t^{2k_1}}{r^{2k_1}}\right)\frac{dt}{t^{k_1+1}} > 2k\int_{r_1}^{r}\Omega_{\alpha\beta}(t,f)\frac{1}{t^{k+1}}\left(1+\frac{t^{2k}}{r^{2k}}\right)dt =$$

$$= 2k\int_{r_0}^{r}\Omega_{\alpha\beta}(t,f)\frac{1}{t^{k+1}}\left(1+\frac{t^{2k}}{r^{2k}}\right)dt + O(1) = S_{\alpha\beta}(r,f) + O(1).$$

Следовательно, выполняется (14).

***Доказательство теоремы* 1.** Выполним в (1) замену $f = u^{-1}+\kappa$, где κ — такая константа, что $P(z,\kappa) \not\equiv 0$, $Q(z,\kappa) \not\equiv 0$. Получим

$$u' = R(z,u)/V(z,u), \qquad (16)$$

где R, V — многочлены относительно u с коэффициентами $P_{jq}(z)$ вида (6), являющимися линейными комбинациями коэффициентов $p_{jq}(z)$ уравнения (1), (6). Степени R, V относительно u равны соответственно t и $t-2$ (если $t-2 \ge s$) и $s+2$ и s (если $t-2 < s$). Пусть, для определенности, $t-2 \ge s$. Тогда $\deg_u R/V = t$. Применяя к (16) формулу (13), получаем

$$S_{\alpha\beta}(r,u') = tS_{\alpha\beta}(r,u) + O\left(\sum S_{\alpha\beta}(r,P_{jq})\right) + O(1). \qquad (17)$$

Поскольку коэффициенты $P_{jq}(z)$ являются линейными комбинациями коэффициентов $p_{jq}(z)$ уравнения (1), (6), из (11) следует $S_{\alpha\beta}(r,P_{jq}) = O\left(\sum S_{\alpha\beta}(r,p_{jq})\right) + O(1)$. Отсюда с учетом (17) имеем

$$S_{\alpha\beta}(r,u') = tS_{\alpha\beta}(r,u) + O\Big(\sum S_{\alpha\beta}(r,p_{jq})\Big) + O(1). \tag{18}$$

Покажем, что

$$S_{\alpha\beta}(r,u') \le 2S_{\alpha\beta}(r,u) + O(1), \quad r \notin \Delta, \quad \operatorname{mes}\Delta < +\infty. \tag{19}$$

Заметим, что применить лемму о логарифмической производной [4, с. 137] мы не можем, поскольку в общем случае для функции, мероморфной в угловой области, она не верна [11].

Известно [9] (теорема 1), [10], что мероморфное решение $u(z)$, $z \in G$, с логарифмической особой точкой в ∞ дифференциального уравнения (1), (6) имеет конечный порядок роста p. Пусть A, B такие, что $A < \alpha < \beta < B$. Рассмотрим однозначные ветви $u(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$, и $u(z)$, $z \in g_{AB} = \{z = re^{i\theta}: A \le \theta \le B,$ $r_0 \le r < +\infty\}$ функции $u(z)$, $z \in G$. Пусть $\{c_q\}$ — множество всех нулей и полюсов ветви $u(z)$, $z \in g_{AB}$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и для каждого $c_q \in \{c_q\}$ построим окружность с центром c_q радиуса $\delta_q = \left|c_q\right|^{-p-1-(\varepsilon/2)}$. Через E обозначим множество точек области g_{AB} римановой поверхности функции $u(z)$, $z \in G$, лежащих внутри всех этих окружностей. Тогда [9] (лемма 4) $(\exists\, d = d(A,B,\varepsilon) > 0)$:

$$\begin{gathered} \left|u'(z)/u(z)\right| < |z|^{2p+2+\varepsilon}, \quad z \in g_{AB}\backslash E, \quad |z| \ge d, \\ \sum \delta_q = \sum \left|c_q\right|^{-p-1-(\varepsilon/2)} < K = \text{const} < +\infty, \quad c_q \in \{c_q\}. \end{gathered} \tag{20}$$

Для каждого $c_q \in \{c_q\}$ построим интервал $[|c_q| - \delta_q, |c_q| + \delta_q]$. Пусть Δ — множество точек, принадлежащих этим интервалам. Из (20) следует, что E — множество кругов с конечной суммой радиусов, $\operatorname{mes}\Delta < 2K$.

Можно считать, что лучи $\Lambda(\alpha) = \{z = re^{i\alpha}: r \ge d\}$, $\Lambda(\beta) = \{z = re^{i\beta}: r \ge d\}$ не пересекаются с E, когда d — достаточно большое $(E \cap (\Lambda(\alpha) \cup \Lambda(\beta)) = \varnothing)$. Действительно, поскольку E — множество кругов с конечной суммой радиусов, то $(\exists\, \alpha_1 : A < \alpha_1 < \alpha)$ $(\exists\, d = d(A,\alpha) > 0)$ такое, что луч $\Lambda(\alpha_1) = \{z: z = re^{i\alpha_1}, r \ge d\}$ не пересекает круги из множества E $(\Lambda(\alpha_1) \cap E = \varnothing)$ [12] (формула (31)). Аналогично существует β_1, $\beta < \beta_1 < B$, такое, что луч $\Lambda(\beta_1) = \{z = re^{i\beta_1}, r \ge d\}$ не пересекает круги из E $(\Lambda(\beta) \cap E = \varnothing)$. Поэтому вместо ветви $u(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$, можно рассматривать ветвь $u(z)$, $z \in g_{\alpha_1\beta_1}$, где $A < \alpha_1 \le \alpha < \beta \le \beta_1 < B$.

Если $r \notin \Delta$, то, учитывая (20) и то, что $k = \pi/(\beta - \alpha) > 0$, $\sin(k(\theta - \alpha)) \ge 0$, $\alpha \le \theta \le \beta$, получаем $\left|u'(re^{i\theta})/u(re^{i\theta})\right| < r^{2p+2+\varepsilon}$, $\alpha \le \theta \le \beta$,

$$B_{\alpha\beta}(r,u'/u) = \frac{2k}{\pi r^k}\int_\alpha^\beta \ln^+\left|\frac{u'(re^{i\theta})}{u(re^{i\theta})}\right| \sin k(\theta-\alpha)\,d\theta <$$

$$< 2k\pi^{-1}(2p+2+\varepsilon)r^{-k}\ln r(\beta-\alpha) = o(1), \quad r \to +\infty, \quad r \notin \Delta. \tag{21}$$

На лучах $\Lambda(\alpha)$, $\Lambda(\beta)$ выполняется оценка (20). Поэтому

$$A_{\alpha\beta}(r,u'/u) = \frac{k}{\pi}\int_{r_0}^r \left(\frac{1}{t^k} - \frac{t^k}{r^{2k}}\right)\left[\ln^+\left|\frac{u'(te^{i\alpha})}{u(te^{i\alpha})}\right| + \ln^+\left|\frac{u'(te^{i\beta})}{u(te^{i\beta})}\right|\right]\frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{k}{\pi}\left(\int_{r_0}^d \ldots + \int_d^r \ldots\right) < O(1) + \frac{2k}{\pi}\int_d^r \left(\frac{1}{t^k} - \frac{t^k}{r^{2k}}\right)\frac{(2p+2+\varepsilon)\ln t\,dt}{t} = O(1). \tag{22}$$

Каждому полюсу порядка m функции $u(z)$ соответствует полюс порядка $m+1$ производной $u'(z)$. Поэтому $c_{\alpha\beta}(r,u') \le 2c_{\alpha\beta}(r,u)$,

$$C_{\alpha\beta}(r,u') \le 2C_{\alpha\beta}(r,u). \tag{23}$$

Выполняются оценки [4, с. 45] (формула (6.9))

$$\begin{aligned} B_{\alpha\beta}(r,u') &= B_{\alpha\beta}\left(r, u\frac{u'}{u}\right) \le B_{\alpha\beta}(r,u) + B_{\alpha\beta}\left(r,\frac{u'}{u}\right), \\ A_{\alpha\beta}(r,u') &= A_{\alpha\beta}\left(r, u\frac{u'}{u}\right) \le A_{\alpha\beta}(r,u) + A_{\alpha\beta}\left(r,\frac{u'}{u}\right). \end{aligned} \tag{24}$$

Поэтому, учитывая (21), (22), получаем

$$B_{\alpha\beta}(r,u') \le B_{\alpha\beta}(r,u) + o(1), \quad r \notin \Delta,\ r \to \infty, \quad A_{\alpha\beta}(r,u') \le A_{\alpha\beta}(r,u) + O(1). \tag{25}$$

Отсюда и из (8), (23) следует (19). Завершим доказательство теоремы 1. Учитывая (18), (19), имеем

$$2S_{\alpha\beta}(r,u) \ge tS_{\alpha\beta}(r,u) + O\left(\sum S_{\alpha\beta}(r,p_{jq})\right) + O(1), \quad r \notin \Delta.$$

Таким образом, если $t>2$ (а значит, уравнение (1) не является уравнением Риккати), то

$$\begin{aligned} (t-2)S_{\alpha\beta}(r,u) &= O\left(\sum S_{\alpha\beta}(r,p_{jq})\right) + O(1), \quad r \notin \Delta, \\ S_{\alpha\beta}(r,u) &= O\left(\sum S_{\alpha\beta}(r,p_{jq})\right) + O(1), \quad r \notin \Delta. \end{aligned} \tag{26}$$

Из (6) – (8) получаем

$$S_{\alpha\beta}(r,p_{jq}) = O(1). \tag{27}$$

Отсюда с учетом (26) следует

$$S_{\alpha\beta}(r,u) = O(1), \quad r \notin \Delta. \tag{28}$$

Покажем, что в (28) исключительное множество Δ можно отбросить. Как отмечалось выше (см. (15)),

$$S^*_{\alpha\beta}(r,u) = S_{\alpha\beta}(r,u) + O(1), \tag{29}$$

где $S^*_{\alpha\beta}(r,u)$ — строго возрастающая функция. Из (28), (29) получаем $S^*_{\alpha\beta}(r,u) = O(1)$, $r \notin \Delta$, $\operatorname{mes}\Delta < \infty$. Поскольку $S^*_{\alpha\beta}(r,u)$ — возрастающая функция, то из предыдущего следует $S^*_{\alpha\beta}(r,u) < C = \text{const}$ $\forall\, r \ge r_0$. Поэтому с учетом (29)

$$S_{\alpha\beta}(r,u) < \text{const} \quad \forall\, r \ge r_0. \tag{30}$$

По определению $f = u^{-1} + \kappa$, $\kappa = \text{const}$. Поэтому из (8), (11), (30) следует

$$S_{\alpha\beta}(r,f) = S_{\alpha\beta}(r, u^{-1}+\kappa) \le S_{\alpha\beta}(r,u) + S_{\alpha\beta}(r,\kappa) = O(1).$$

Отсюда, учитывая (27), получаем соотношение (9).

Пусть $t \le 2$. По предположению $t-2 \ge s$. Следовательно, $0 \ge t-2 \ge s \ge 0$, поэтому $s=0$, $t \le 2$ и (1) — уравнение Риккати.

Если бы луч $\Lambda(\alpha) = \{z = re^{i\alpha} : r \ge d\}$ или луч $\Lambda(\beta) = \{z = re^{i\beta} : r \ge d\}$ при любом d пересекал множество E (см. (20)), то, как отмечалось выше, мы рассматривали бы ветвь $u(z)$, $r \in g_{\alpha_1\beta_1}$, $A < \alpha_1 < \alpha < \beta < \beta_1 < B$, и, аналогично предыдущему, доказали бы оценку $S_{\alpha_1\beta_1}(r, f) = O(1)$. Поскольку $\alpha_1 < \alpha < \beta < \beta_1$, то из (14) следует $S_{\alpha\beta}(r, f) < S_{\alpha_1\beta_1}(r, f) + O(1) = O(1)$. Поэтому утверждение теоремы справедливо для любой ветви.

1. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. – 436 с.
2. *Malmquist J.* Sur les fonctions á un nombre fini de branches définies par les équations différentielles du premier order // Acta Math. – 1913. – **36**. – P. 297 – 343.
3. *Гольдберг А. А., Левин Б. Я., Островский И. В.* Целые и мероморфные функции // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления / ВИНИТИ. – 1991. – **85**. – С. 5 – 186.
4. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
5. *Yosida K.* A generalization of a Malmquist's theorem // Jap. J. Math. – 1933. – **9**. – P. 253 – 256.
6. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций: В 2 т. – М.: Наука, 1968. – Т. 2. – 624 с.
7. *Мохонько А. З.* Поле алгеброидных функций и оценки их неванлинновских характеристик // Сиб. мат. журн. – 1981. – **22**, № 3. – С. 214 – 218.
8. *Мохонько А. З.* О неванлинновских характеристиках некоторых мероморфных функций // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1971. – Вып. 14. – С. 83 – 87.
9. *Mokhon'ko A. Z., Mokhon'ko V. D.* On order of growth of analytic solutions for algebraic differential equations having logarithmic singularity // Math. Stud. – 2000. – **13**, № 2. – P. 203 – 218.
10. *Гольдберг А. А., Мохонько А. З.* О скорости роста решений алгебраических дифференциальных уравнений в угловых областях // Дифференц. уравнения. – 1975. – **11**, № 9. – С. 1568 – 1574.
11. *Гольдберг А. А.* Лемма Неванлинны о логарифмической производной мероморфной функции // Мат. заметки. – 1975. – **17**, № 4. – С. 525 – 529.
12. *Мохонько А. З.* О мероморфных решениях алгебраических дифференциальных уравнений в угловых областях // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 4. – С. 514 – 523.

Получено 29.10.2002