УДК 517.3

С. А. Ільченко, Ю. С. Мішура (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

УЗАГАЛЬНЕНІ ДВОПАРАМЕТРИЧНІ ІНТЕГРАЛИ ЛЕБЕГА – СТІЛЬТЬЄСА ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО ДРОБОВИХ БРОУНІВСЬКИХ ПОЛІВ

We consider two-parameter fractional integrals and the Weyl, Liouville, Marshaud fractional derivatives and justify some their properties. We introduce the notion of a generalized two-parameter Lebesgue – Stieltjes integral, consider its properties, and present computational formulas for the case of differentiable functions. For the two-parameter fractional integrals and derivatives of the Hölder functions, we consider their principal properties. As the separate case, we study the generalized two-parameter Lebesgue – Stieljes integrals for an integrator of bounded variation. We prove that the indicated integrals for the Hölder functions can be computed as limits of integral sums. As an example, we construct the generalized two-parameter integrals of fractional Brownian fields.

Розглянуто двопараметричні дробові інтеграли і дробові похідні за Вейлем, Ліувіллем, Маршо та обґрунтовано деякі їх властивості. Введено поняття узагальненого двопараметричного інтеграла Лебега – Стільтьєса, наведено його властивості та формули для обчислення у випадку диференційовних функцій. Розглянуто основні властивості двопараметричних дробових інтегралів та похідних від гельдерових функцій. Окремо вивчено узагальнені двопараметричні інтеграли Лебега – Стільтьєса для інтегратора обмеженої варіації. Доведено, що для гельдерових функцій вказані інтеграли можна обчислити як границі інтегральних сум. Як приклад розглянуто узагальнені двопараметричні інтеграли від дробових броунівських полів.

1. Вступ. У задачах стохастичного аналізу, а також при вивченні певних фізичних проблем, зокрема в гідромеханіці, потрібно будувати поле, тобто двопараметричні випадкові функції зі стаціонарними приростами. Прикладом таких функцій є дробові броунівські поля. Для того щоб розглянути, наприклад, стохастичні диференціальні рівняння з дробовими броунівськими полями, необхідно спочатку побудувати теорію інтегрування відносно таких полів, що і зроблено в даній роботі.

Стаття складається з шести пунктів. Пункти 2 – 4 є допоміжними. У п. 2 наведено означення дробових двопараметричних інтегралів та дробових похідних за Вейлем, Ліувіллем та Маршо (ці похідні порівнюються між собою). Також наведено деякі їхні властивості, що використовуються далі. Пункт 3 містить означення, властивості та деякі формули для обчислення дробових узагальнених двопараметричних інтегралів Лебега – Стільтьєса. У п. 4 наведено основні властивості двопараметричних дробових інтегралів та похідних від гельдерових функцій. Пункт 5 є основним. У ньому доведено, що у випадку неперервної підінтегральної функції та інтегратора обмеженої варіації узагальнений інтеграл є інтегралом Рімана – Стільтьєса. Крім того, доведено, що у випадку гельдерових функцій з достатньо високим порядком гельдеровості узагальнений інтеграл є границею інтегральних сум по рівномірних розбиттях. Пункт 6 містить конструкцію узагальненого інтеграла від дробових броунівських полів. В однопараметричному випадку теорію узагальненого інтегрування розроблено, зокрема, в роботах М. Целе, підходу яких ми дотримуємось. Доведення допоміжних лем, які, в цілому, аналогічні однопараметричному випадку, ми не наводимо.

2. Двопараметричні дробові інтеграли та похідні. Нехай функція $f\colon R_+^2 \to R$. Будемо використовувати означення прямих та обернених похідних, а також інтегралів дробового порядку за Ліувіллем на будь-якому прямокутнику

$$P = (a_1, b_1)\times(a_2, b_2)\subset R_+^2, \quad 0 < \alpha_1 < 1, \quad 0 < \alpha_2 < 1.$$

Означення 1 [1]. *Нехай $f \in L_1(P)$. Прямим та оберненим дробовим інтегралом порядків α_1, α_2 на прямокутнику P називаються функції*

$$\left(I_{(a_1, a_2)+}^{\alpha_1\alpha_2} f\right)(x, y) := \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_{a_1}^{x}\int_{a_2}^{y} \frac{f(s, t)}{(x-s)^{1-\alpha_1}(y-t)^{1-\alpha_2}}\, ds\, dt,$$

$$\left(I_{(b_1, b_2)-}^{\alpha_1\alpha_2} f\right)(x, y) := \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_{x}^{b_1}\int_{y}^{b_2} \frac{f(s, t)}{(s-x)^{1-\alpha_1}(t-y)^{1-\alpha_2}}\, ds\, dt,$$

$$a_1 \le x \le b_1, \quad a_2 \le y \le b_2.$$

Далі для скорочення введемо позначення $a+ := (a_1, a_2)+,\ b- := (b_1, b_2)-$.

Означення 2 [1]. *Прямою та оберненою дробовою похідною за Ліувіллем порядків α_1, α_2 на прямокутнику P називаються функції*

$$\left(D_{a+}^{\alpha_1\alpha_2} f\right)(x, y) :=$$

$$:= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)\Gamma(1-\alpha_2)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\int_{a_1}^{x}\int_{a_2}^{y} \frac{f(s, t)}{(x-s)^{\alpha_1}(y-t)^{\alpha_2}}\, ds\, dt\right)\cdot 1_P(x, y), \tag{1}$$

$$\left(D_{b-}^{\alpha_1\alpha_2} f\right)(x, y) :=$$

$$:= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)\Gamma(1-\alpha_2)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\int_{x}^{b_1}\int_{y}^{b_2} \frac{f(s, t)}{(s-x)^{\alpha_1}(t-y)^{\alpha_2}}\, ds\, dt\right)\cdot 1_P(x, y), \tag{2}$$

причому вирази (1) *і* (2) *розглядаються для тих функцій, для яких вони існують при всіх $(x, y) \in P$.*

Нехай прямокутник P є фіксованим. Будемо вважати, що функція $f(x, y) = 0,\ (x, y) \notin P$.

Позначимо через $I_{a+}^{\alpha_1\alpha_2}\left(L_p\right)$ та $I_{b-}^{\alpha_1\alpha_2}\left(L_p\right)$ класи функцій

$$f(x, y) = I_{a+}^{\alpha_1\alpha_2} \varphi(x, y)$$

та

$$f(x, y) = I_{b-}^{\alpha_1\alpha_2} \varphi(x, y),$$

де $\varphi \in L_p(P)$ для деякого $p \in [1, \infty)$.

Введемо модифікації прямої та оберненої дробових похідних, що мають назву похідних за Вейлем:

$$\tilde{D}_{a+}^{\alpha_1\alpha_2} f(x, y) = 1_P(x, y)\overline{D}_{a+}^{\alpha_1\alpha_2} f(x, y) :=$$

$$:= \frac{\alpha_1\alpha_2}{\Gamma(1-\alpha_1)\Gamma(1-\alpha_2)} \int_{R_+^2} \frac{\Delta_{x-s,\, y-t} f(x, y)}{s^{1+\alpha_1} t^{1+\alpha_2}}\, ds\, dt \cdot 1_P(x, y),$$

$$\tilde{D}_{b-}^{\alpha_1\alpha_2} f(x, y) = 1_P(x, y)\overline{D}_{b-}^{\alpha_1\alpha_2} f(x, y) :=$$

$$:= \frac{\alpha_1\alpha_2}{\Gamma(1-\alpha_1)\Gamma(1-\alpha_2)} \int\limits_{R_+^2} \frac{\Delta_{x,y} f(x+s, y+t)}{s^{1+\alpha_1} t^{1+\alpha_2}} ds\, dt \cdot 1_P(x, y).$$

Стаття [2] та деякі прості інтегральні перетворення дозволяють зробити висновок, що похідні за Вейлем та Ліувіллем збігаються між собою на класах $I_{a+}^{\alpha_1\alpha_2}(L_p)$ та $I_{b-}^{\alpha_1\alpha_2}(L_p)$, а також з похідними за Маршо, де, наприклад, пряма дробова похідна за Маршо порядків α_1, α_2 на прямокутнику P дорівнює

$$\tilde{D}_{a+}^{\alpha_1\alpha_2} f(x, y) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)\Gamma(1-\alpha_2)} \times$$

$$\times \left(\frac{f(x, y)}{(x-a_1)^{\alpha_1}(y-a_2)^{\alpha_2}} + \frac{\alpha_1}{(y-a_2)^{\alpha_2}} \int\limits_{a_1}^{x} \frac{f(x, y) - f(s, y)}{(x-s)^{1+\alpha_1}} ds + \right.$$

$$+ \frac{\alpha_2}{(x-a_1)^{\alpha_1}} \int\limits_{a_2}^{y} \frac{f(x, y) - f(x, t)}{(y-t)^{1+\alpha_2}} dt +$$

$$\left. + \alpha_1\alpha_2 \int\limits_{a_1}^{x} \int\limits_{a_2}^{y} \frac{\Delta_{st}(x, y)}{(x-s)^{1+\alpha_1}(y-t)^{1+\alpha_2}} ds\, dt \right) \cdot 1_P(x, y),$$

де

$$\Delta_{st} f(x, y) = f(x, y) - f(s, y) - f(x, t) + f(s, t).$$

Аналогічно до однопараметричного випадку доводяться наступні твердження.

Лема 1. 1. *Нехай* $f \in I_{a+}^{\alpha_1\alpha_2}(L_p)\left(I_{b-}^{\alpha_1\alpha_2}(L_p)\right)$ *для деякого* $p > 1$. *Тоді*:

а) $\underset{(b-)}{I_{a+}^{\alpha_1\alpha_2}} \left(\underset{(b-)}{D_{a+}^{\alpha_1\alpha_2}} f(x, y) \right) = f(x, y), \quad \underset{(b-)}{D_{a+}^{\alpha_1\alpha_2}} \left(\underset{(b-)}{I_{a+}^{\alpha_1\alpha_2}} f(x, y) \right) = f(x, y);$

б) $\lim\limits_{\substack{\alpha_1 \to 0 \\ \alpha_2 \to 0}} \underset{(b-)}{D_{a+}^{\alpha_1\alpha_2}} f(x, y) = f(x, y)$, *де границя береться в просторі* $L_p(P)$.

2. *Нехай, додатково, функція* f *неперервно диференційовна в околі точки* $(x, y) \in P$. *Тоді*

$$\lim_{\substack{\alpha_1 \to 1 \\ \alpha_2 \to 1}} \underset{(b-)}{D_{a+}^{\alpha_1\alpha_2}} f(x, y) = f_{12}''.$$

На підставі леми 1 покладемо, за означенням,

$$\underset{(b-)}{D_{a+}^{00}} f(x, y) = f(x, y), \qquad \underset{(b-)}{D_{a+}^{11}} f(x) = f_{12}''.$$

У книзі [1] доведено напівгрупову властивість дробових інтегралів, а саме,

$$\underset{(b-)}{I_{a+}^{\alpha_1\alpha_2}} \underset{(b-)}{I_{a+}^{\beta_1\beta_2}} f(x, y) = \underset{(b-)}{I_{a+}^{\alpha_1+\beta_1\alpha_2+\beta_2}} f(x, y), \quad f \in L_1(P),$$

а також формулу „дробового інтегрування за частинами"

$$\int\limits_P \varphi(s,t)\, I_{a+}^{\alpha_1\alpha_2} \psi(s,t)\, ds\, dt = \int\limits_P \psi(s,t)\, I_{b-}^{\alpha_1\alpha_2} \varphi(s,t)\, ds\, dt. \tag{3}$$

Уточнимо клас функцій, для яких має місце рівність (3). Для цього спочатку наведемо допоміжний результат.

Лема 2. *Нехай* $0 < \alpha_i < 1$, $1 < p < \min\left(\alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}\right)$. *Тоді оператор дробового інтегрування* $I_{a+}^{\alpha_1\alpha_2}$ *є обмеженим з* $L_p(P)$ *в* $L_q(P)$, *де*

$$1 < q < \min\left(\frac{p}{1-\alpha_1 p}, \frac{p}{1-\alpha_2 p}\right).$$

***Наслідок* 1.** *Формула* (3) *має місце, якщо* $\varphi \in L_p(P)$, $I_{a+}^{\alpha_1\alpha_2}\psi \in L_t(P)$,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{t} = 1, \qquad \psi \in L_q(P), \qquad t < \min\left(\frac{q}{1-\alpha_1 q}, \frac{q}{1-\alpha_2 q}\right),$$

тобто

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1 + \min(\alpha_1, \alpha_2).$$

Наведемо тепер аналогічні властивості дробових похідних.

Лема 3. 1. *Якщо* $f \in I_{a+}^{\alpha_1+\beta_1 \alpha_2+\beta_2}(L_1)$, $\alpha_i, \beta_i \ge 0$, $\alpha_i + \beta_i \le 1$, *то*

$$D_{\substack{a+\\(b-)}}^{\alpha_1\alpha_2} D_{\substack{a+\\(b-)}}^{\beta_1\beta_2} f = D_{\substack{a+\\(b-)}}^{\alpha_1+\beta_1 \alpha_2+\beta_2} f.$$

2. *Якщо* $f \in I_{a+}^{\alpha_1\alpha_2}(L_p)$, $g \in I_{b-}^{\alpha_1\alpha_2}(L_q)$, $p > 1$, $q > 1$, $1/p + 1/q < 1 + \min(\alpha_1, \alpha_2)$, *то*

$$\int\limits_P D_{a+}^{\alpha_1\alpha_2} f(s,t) g(s,t)\, ds\, dt = \int\limits_P f(s,t) D_{b-}^{\alpha_1\alpha_2} g(s,t)\, ds\, dt.$$

***Наслідок* 2.** *Використовуючи зображення двопараметричних дробових похідних у вигляді тензорного добутку одновимірних дробових похідних* [1, с. 344]

$$D_{\substack{a+\\(b-)}}^{\alpha_1\alpha_2} = D_{\substack{a_1+\\(b_1-)}}^{\alpha_1} \otimes D_{\substack{a_2+\\(b_2-)}}^{\alpha_2},$$

можна довести, аналогічно до твердження 2 *леми* 3, *такий результат: нехай*

$$f \in I_{a+}^{\alpha_1\alpha_2}(L_p), \qquad g = g(x) \in I_{b_1-}^{\alpha_1}\left(L_q(a_1, b_1)\right), \qquad h = h(y) \in I_{b_2-}^{\alpha_2}\left(L_q(a_2, b_2)\right),$$

$$p > 1, \qquad q > 1, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1 + \min(\alpha_1, \alpha_2);$$

тоді

$$\int\limits_P D_{a+}^{\alpha_1\alpha_2} f(s,t) g(s) h(t)\, ds\, dt = \int\limits_P f(s,t) D_{b_1-}^{\alpha_1} g(s) D_{b_2-}^{\alpha_2} h(t)\, ds\, dt.$$

3. Дробові узагальнені двопараметричні інтеграли Лебега – Стільтьєса. Нехай $0 \le \alpha_i \le 1$, $i = 1, 2$, є фіксованими. Далі вважаємо, що всі функції, які розглядаються, належать до простору $D(P)$, тобто мають у кожній точці $(x, y) \in P$ границі в чотирьох квадрантах

$$Q^{++}(x, y) = \{(s, t) \in P : s \geq x, t \geq y\},$$
$$Q^{+-}(x, y) = \{(s, t) \in P : s \geq x, t < y\},$$
$$Q^{-+}(x, y) = \{(s, t) \in P : s < x, t \geq y\},$$
$$Q^{--}(x, y) = \{(s, t) \in P : s < x, t < y\},$$

причому

$$f(x, y) = \lim_{(s, t) \in Q^{++}(x, y)} f(s, t),$$

а на сторонах прямокутника існують ті границі, які можна визначити, і позначаються $f(x, b_2-)$, $f(b_1-, y)$, $f(b-)$. Позначимо

$$f_{a+}(x, y) = \Delta_a f(x, y) \cdot 1_P(x, y),$$
$$f_{b-}(x, y) = \big(f(x, y) - f(x, b_2-) - f(b_1-, y) + f(b-)\big) \cdot 1_P(x, y),$$
$$a := (a_1, a_2), \quad b := (b_1, b_2).$$

Означення 3. *Узагальненим дробовим двопараметричним інтегралом Лебега – Стільтьеса функції f відносно функції g називається інтеграл вигляду*

$$\int_P f\,dg := \int_P f(x, y)\,dg(x, y) := \int_P D_{a+}^{\alpha_1\alpha_2} f_{a+}(x, y) D_{b-}^{1-\alpha_1 1-\alpha_2} g_{b-}(x, y)\,dx\,dy \;+$$
$$+ \int_{a_1}^{b_1} D_{a_1+}^{\alpha_1} f_{a_1+}(x, a_2) D_{b_1-}^{1-\alpha_1}\big(g_{b_1-}(x, b_2-) - g_{b_1-}(x, a_2)\big)\,dx \;+$$
$$+ \int_{a_2}^{b_2} D_{a_2+}^{\alpha_2} f_{a_2+}(a_1, y) D_{b_2-}^{1-\alpha_2}\big(g_{b_2-}(b_1-, y) - g_{b_2-}(a_1, y)\big)\,dy + f(a)\Delta_a g(b), \tag{4}$$

де

$$f_{a_1+}(x, a_2) = f(x, a_2) - f(a), \qquad f_{a_2+}(a_1, y) = f(a_1, y) - f(a),$$
$$g_{b_1-}(x, b_2-) = g(x, b_2-) - g(b-), \qquad g_{b_1-}(x, a_2) = g(x, a_2) - g(b_1-, a_2),$$
$$g_{b_2-}(b_1-, y) = g(b_1-, y) - g(b-), \qquad g_{b_2-}(a_1, y) = g(a_1, y) - g(a_1, b_2-),$$

і права частина (4) *визначена при*

$$f_{a+} \in I_{a+}^{\alpha_1\alpha_2}\big(L_p(P)\big), \qquad g_{b-} \in I_{b-}^{1-\alpha_1 1-\alpha_2}\big(L_q(P)\big),$$
$$f_{a_i+}(\cdot, a_j) \in I_{a_i+}^{\alpha_i}\big(L_p(a_i, b_i)\big), \qquad g_{b_i-}(\cdot, b_j-) \in I_{b_i-}^{1-\alpha_i}\big(L_p(a_i, b_i)\big), \qquad i = 1, 2,$$
$$j = 3 - i, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1, \qquad 0 \leq \alpha_i \leq 1, \qquad i = 1, 2.$$

Розглянемо ще функції $g : (a_1, b_1) \to R$ та $h : (a_2, b_2) \to R$, які в кожній точці неперервні справа та мають границі зліва.

Означення 4. *Узагальненим дробовим двопараметричним інтегралом Лебега – Стільтьеса другого роду функції f відносно функцій $g : (a_1, b_1) \to R$ та $h : (a_2, b_2) \to R$ називається інтеграл вигляду*

$$\int_P f d_1 g d_2 h := \int_P f(x, y)\, d_1 g(x) d_2 h(y) :=$$
$$:= \int_P D_{a+}^{\alpha_1\alpha_2} f_{a+}(x, y) D_{b_1-}^{1-\alpha_1} g_{b_1-}(x) D_{b_2-}^{1-\alpha_2} h_{b_2-}(y)\,dx\,dy \;+$$

$$+\int_{a_1}^{b_1} D_{a_1+}^{\alpha_1} f_{a_1+}(x, a_2) D_{b_1-}^{1-\alpha_1} g(x)\, dx \cdot \Delta_{a_2} h(b_2) +$$

$$+\int_{a_2}^{b_2} D_{a_2+}^{\alpha_2} f_{a_2+}(a_1, y) D_{b_2-}^{1-\alpha_2} h(y)\, dy \cdot \Delta_{a_1} g(b_1-) + f(a)\Delta_{a_1} g(b_1-)\Delta_{a_2} h(b_2-), \quad (5)$$

де

$$\Delta_{a_i} z(b_i-) = z(b_i-) - z(a_i), \quad z = g, h,$$

права частина (5) *визначена при*

$$f_{a+} \in I_{a+}^{\alpha_1\alpha_2}(L_p), \quad g_{b_1-} \in I_{b_1-}^{1-\alpha_1}\big(L_q(a_1, b_1)\big), \quad h_{b_2-} \in I_{b_2-}^{1-\alpha_2}\big(L_q(a_2, b_2)\big),$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \le 1, \quad 0 \le \alpha_i \le 1, \quad i = 1, 2.$$

Теорема 1. *Означення* 3 *і* 4 *є коректними, тобто праві частини* (4) *і* (5) *не залежать від вибору* α_1 *та* α_2.

Доведення. Враховуючи відповідний результат для однопараметричних інтегралів [3] (твердження 2.1), в означенні 3 достатньо розглянути лише інтеграл

$$J := \int_P D_{a+}^{\alpha_1\alpha_2} f_{a+}(x, y) D_{b-}^{1-\alpha_1\, 1-\alpha_2} g_{b-}(x, y)\, dx\, dy.$$

З рівності (3) випливає, що у випадку, коли

$$f_{a+} \in I_{a+}^{\alpha_1\alpha_2}\big(L_p(P)\big) \cap I_{a+}^{\alpha_1'\alpha_2'}\big(L_{p'}(P)\big),$$

$$g_{b-} \in I_{b-}^{\alpha_1\alpha_2}\big(L_q(P)\big) \cap I_{b-}^{\alpha_1'\alpha_2'}\big(L_{q'}(P)\big),$$

причому, наприклад,

$$\alpha_1' = \alpha_1 + \beta_1, \quad \alpha_2' = \alpha_2 - \beta_2, \quad \beta_i > 0,$$

і

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \le 1, \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} \le 1,$$

$$J := \int_P D_{a+}^{\alpha_1'-\beta_1\, \alpha_2'+\beta_2} f_{a+}(x, y) D_{b-}^{1-\alpha_1'+\beta_1\, 1-\alpha_2'-\beta_2} g_{b-}(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_P I_{a+}^{\beta_1 0} D_{a+}^{\alpha_1'\alpha_2'+\beta_2} f_{a+}(x, y) D_{b-}^{1-\alpha_1'+\beta_1\, 1-\alpha_2'-\beta_2} g_{b-}(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_P D_{a+}^{\alpha_1'\alpha_2'+\beta_2} f_{a+}(x, y) I_{b-}^{\beta_1 0} D_{b-}^{1-\alpha_1'+\beta_1\, 1-\alpha_2'-\beta_2} g_{b-}(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_P D_{a+}^{0\beta_2} D_{a+}^{\alpha_1'\alpha_2'} f_{a+}(x, y) D_{b-}^{1-\alpha_1'\, 1-\alpha_2'-\beta_2} g_{b-}(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_P D_{a+}^{0\beta_2} D_{a+}^{\alpha_1'\alpha_2'} f_{a+}(x, y) I_{b-}^{0\beta_2} D_{b-}^{1-\alpha_1'\, 1-\alpha_2'} g_{b-}(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_P I_{a+}^{0\beta_2} D_{a+}^{0\beta_2} D_{a+}^{\alpha_1'\alpha_2'} f_{a+}(x, y) D_{b-}^{1-\alpha_1'\, 1-\alpha_2'} g_{b-}(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_P D_{a+}^{\alpha_1'\alpha_2'} f_{a+}(x, y) D_{b-}^{1-\alpha_1'\, 1-\alpha_2'} g_{b-}(x, y)\, dx\, dy.$$

Отже, означення 3 є коректним.

Коректність означення 4 доводиться в цілому аналогічно.

Теорему доведено.

***Зауваження* 1.** Нехай $g \in C^2(\overline{P})$, $\overline{P} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Покладаючи в (4) і (5) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, одержуємо

$$\int_P f\, dg = \int_P \Delta_a f(x, y) g''_{12}(x, y)\, dx\, dy +$$

$$+ \int_{a_1}^{b_1} \big(f(x, a_2) - f(a)\big)\big(g'_1(x, b_2) - g'_1(x, a_2)\big)\, dx +$$

$$+ \int_{a_2}^{b_2} \big(f(a_1, y) - f(a)\big)\big(g'_2(b_1, y) - g'_2(a_1, y)\big)\, dy +$$

$$+ f(a)\Delta_a g(b) = \int_P f(x, y) g''_{12}(x, y)\, dx\, dy,$$

де в правій частині міститься звичайний інтеграл Рімана; аналогічно

$$\int_P f d_1 g d_2 h = \int_P f(x, y) g'(x) h'(y)\, dy.$$

При $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $f \in C^2(\overline{P})$ маємо

$$\int_P f\, dg = \int_P \big(-f''_{12}(x, y) g(x, y) - f'_1(x, y) g'_2(x, y) -$$

$$- f'_2(x, y) g'_1(x, y)\big)\, dx\, dy + \Delta_a (fg)(b-),$$

$$\int_P f d_1 g d_2 h = \int_P f''_{12}(x, y)\big(g(b_1-) - g(x)\big)\big(h(b_2-) - h(y)\big)\, dx\, dy +$$

$$+ \int_{a_1}^{b_1} f'_1(x, a_2)\big(g(b_1-) - g(x)\big)\, dx \cdot \Delta_{a_1} h(b_1-) +$$

$$+ \int_{a_2}^{b_2} f'_2(a_1, y)\big(h(b_2-) - h(y)\big)\, dy \cdot \Delta_{a_2} g(b_2-) + f(a)\Delta_{a_1} g(b_1-)\Delta_{a_2} h(b_2-) =$$

$$= \int_P f''_{12}(x, y)\, g(x) h(y)\, dx\, dy - \int_{a_1}^{b_1} g(x)\big(f'_1(x, b_2) h(b_2-) - f'_1(x, a_2) h(a_2)\big)\, dx -$$

$$- \int_{a_2}^{b_2} h(y)\big(f'_2(b_1-, y) g(b_1) - f'_2(a_1, y) g(a_1)\big)\, dy + f(b) g(b_1-) h(b_2-) -$$

$$- f(a_1, b_2) g(a_1) h(b_2-) - f(b_1, a_2) g(b_1-) h(a_2) + f(a) g(a_1) h(a_2).$$

4. Дробові інтеграли та похідні від двопараметричних гельдерових функцій. Нехай функція $f\colon P \to R$.

Означення 5. *Функція* $f \in H^{\lambda_1, \lambda_2}(P)$ *для* $0 < \lambda_i \leq 1$ *(f — гельдерова порядків* λ_1, λ_2 *на* P*), якщо існує така стала* $c > 0$, *що для всіх*

$$a = (a_1, a_2) < (x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) < b = (b_1, b_2)$$

$$\left|\Delta_{x_1y_1} f(x_2, y_2)\right| \le c\left|x_1 - x_2\right|^{\lambda_1}\left|y_1 - y_2\right|^{\lambda_2},$$

$$\left|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_1)\right| \le c\left|x_1 - x_2\right|^{\lambda_1},$$

$$\left|f(x_1, y_1) - f(x_1, y_2)\right| \le c\left|y_1 - y_2\right|^{\lambda_2}.$$

Теорема 2. *Якщо* $f \in H^{\lambda_1, \lambda_2}(P)$, $\lambda_i + \alpha_i < 1$, $i = 1, 2$, *то*

$$I_{a+}^{\alpha_1\alpha_2}(f_{a+}) \in H^{\lambda_1+\alpha_1, \lambda_2+\alpha_2}(P).$$

Доведення. Оскільки $H^{\lambda_1, \lambda_2}(P) \subset L_1(P)$, то інтеграл $F := I_{a+}^{\alpha_1\alpha_2}(f_{a+})$ коректно означений. Введемо позначення

$$g(z_1, z_2) = f_{a+}(x_1 - z_1, y_1 - z_2) - f_{a+}(x_1, y_1)$$

та запишемо для $h_1 > 0$, $h_2 > 0$, $(x_1 + h_1, y_1 + h_2) \in P$:

$$\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Delta_{x_1y_1} F(x_1 + h_1, y_1 + h_2) =$$

$$= \frac{f_{a+}(x_1, y_1)}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}\Big[(x_1 - a_1 + h_1)^{\alpha_1}(y_1 - a_2 + h_2)^{\alpha_2} -$$

$$- (x_1 - a_1)^{\alpha_1}(y_1 - a_2 + h_2)^{\alpha_2} - (x_1 - a_1 + h_1)^{\alpha_1}(y_1 - a_2)^{\alpha_2} +$$

$$+ (x_1 - a_1)^{\alpha_1}(y_1 - a_2)^{\alpha_2}\Big] + \int_{-h_1}^{0}\int_{-h_2}^{0} \frac{g(z_1, z_2)}{(z_1 + h_1)^{1-\alpha_1}(z_2 + h_2)^{1-\alpha_2}}\, dz_1\, dz_2 +$$

$$+ \int_{0}^{x_1-a_1}\int_{-h_2}^{0} g(z_1, z_2)\Big((z_1 + h_1)^{\alpha_1-1}(z_2 + h_2)^{\alpha_2-1} - z_1^{\alpha_1-1}(z_2 + h_2)^{\alpha_2-1}\Big)\, dz_1\, dz_2 +$$

$$+ \int_{-h_1}^{0}\int_{0}^{y_1-a_2} g(z_1, z_2)\Big((z_1 + h_1)^{\alpha_1-1}(z_2 + h_2)^{\alpha_2-1} - (z_1 + h_1)^{\alpha_1-1}z_2^{\alpha_2-1}\Big)\, dz_1\, dz_2 +$$

$$+ \int_{0}^{x_1-a_1}\int_{0}^{y_1-a_2} g(z_1, z_2)\Big((z_1 + h_1)^{\alpha_1-1}(z_2 + h_2)^{\alpha_2-1} - z_1^{\alpha_1-1}(z_2 + h_2)^{\alpha_2-1} -$$

$$- (z_1 + h_1)^{\alpha_1-1}z_2^{\alpha_2-1} + z_1^{\alpha_1-1}z_2^{\alpha_2-1}\Big)\, dz_1\, dz_2 =: \sum_{i=1}^{5} I_i.$$

Мають місце оцінки

$$I_1 := \left|\frac{f_{a+}(x_1, y_1)}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}\Big[(x_1 - a_1 + h_1)^{\alpha_1} - (x_1 - a_1)^{\alpha_1}\Big] \times\right.$$

$$\left.\times \Big[(y_1 - a_2 + h_2)^{\alpha_2} - (y_1 - a_2)^{\alpha_2}\Big]\right| \le$$

$$\le c(x_1 - a_1)^{\lambda_1}(y_1 - a_2)^{\lambda_2} h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} \le c h_1^{\alpha_1+\lambda_1} h_2^{\alpha_2+\lambda_2},$$

якщо $x_1 - a_1 \le h_1$, $y_1 - a_2 \le h_2$.

Якщо $0 < h_1 < x_1 - a_1$, $y_1 - a_2 \le h_2$, то, використавши нерівність $(1 + t)^\beta - 1 \le \beta t$, $t > 0$, $0 < \beta < 1$, одержимо

$$I_1 \le c(x_1 - a_1)^{\lambda_1}(y_1 - a_2)^{\lambda_2}(x_1 - a_1)^{\alpha_1}\left[\left(1 + \frac{h_1}{x_1 - a_1}\right)^{\alpha_1} - 1\right] h_2^{\alpha_2} \le$$

$$\le c(x_1 - a_1)^{\lambda_1 + \alpha_1}\alpha_1 \frac{h_1}{x_1 - a_1} h_2^{\alpha_2 + \lambda_2} \le c h_1^{\alpha_1 + \lambda_1} h_2^{\alpha_2 + \lambda_2}.$$

Випадки $x_1 - a_1 \le h_1$, $0 < h_2 < y_1 - a_2$ і $0 < h_1 < x_1 - a_1$, $0 < h_2 < y_1 - a_2$ розглядаються аналогічно. Таким чином, $I_1 \le c h_1^{\alpha_1 + \lambda_1} h_2^{\alpha_2 + \lambda_2}$.

Далі, використаємо оцінки, одержані при доведенні теореми 3.1 [1], і запишемо

$$I_2 := \left| \int_{-h_1}^{0}\int_{-h_2}^{0} \frac{g(z_1, z_2)}{(z_1 + h_1)^{1-\alpha_1}(z_2 + h_2)^{1-\alpha_2}}\, dz_1\, dz_2 \right| \le$$

$$\le c \int_{-h_1}^{0}\int_{-h_2}^{0} \frac{|z_1|^{\lambda_1}|z_2|^{\lambda_2}}{(z_1 + h_1)^{1-\alpha_1}(z_2 + h_2)^{1-\alpha_2}}\, dz_1\, dz_2 \le c h_1^{\alpha_1 + \lambda_1} h_2^{\alpha_2 + \lambda_2},$$

$$I_3 := \left| \int_{0}^{x_1 - a_1}\int_{-h_2}^{0} g(z_1, z_2)(z_2 + h_2)^{\alpha_2 - 1}\left((z_1 + h_1)^{\alpha_1 - 1} - z_1^{\alpha_1 - 1}\right) dz_1\, dz_2 \right| \le$$

$$\le c \int_{0}^{x_1 - a_1} z_1^{\lambda_1}\left((z_1 + h_1)^{\alpha_1 - 1} - z_1^{\alpha_1 - 1}\right) dz_1 \times$$

$$\times \int_{-h_2}^{0} z_2^{\lambda_2}(z_2 + h_2)^{\alpha_2 - 1}\, dz_2 \le c h_1^{\alpha_1 + \lambda_1} h_2^{\alpha_2 + \lambda_2};$$

аналогічно

$$I_4 := \left| \int_{-h_1}^{0}\int_{0}^{y_1 - a_2} g(z_1, z_2)(z_1 + h_1)^{\alpha_1 - 1}\left((z_2 + h_2)^{\alpha_2 - 1} - z_2^{\alpha_2 - 1}\right) dz_1\, dz_2 \right| \le$$

$$\le c h_1^{\alpha_1 + \lambda_1} h_2^{\alpha_2 + \lambda_2},$$

$$I_5 := \left| \int_{0}^{x_1 - a_1}\int_{0}^{y_1 - a_2} g(z_1, z_2)\left((z_1 + h_1)^{\alpha_1 - 1} - z_1^{\alpha_1 - 1}\right)\left((z_2 + h_2)^{\alpha_2 - 1} - z_2^{\alpha_2 - 1}\right) dz_1\, dz_2 \right| \le$$

$$\le c \left| \int_{0}^{x_1 - a_1} z_1^{\lambda_1}\left((z_1 + h_1)^{\alpha_1 - 1} - z_1^{\alpha_1 - 1}\right) dz_1 \right| \times$$

$$\times \left| \int_{0}^{y_1 - a_2} z_2^{\lambda_2}\left((z_2 + h_2)^{\alpha_2 - 1} - z_2^{\alpha_2 - 1}\right) dz_2 \right| \le c h_1^{\alpha_1 + \lambda_1} h_2^{\alpha_2 + \lambda_2}.$$

Прирости $\Delta_{x_1 y_1} F(x_1 + h_1, y_1)$ та $\Delta_{x_1 y_1} F(x_1, y_1 + h_2)$ оцінюються аналогічно.

Теорему доведено.

Лема 4. *Нехай функція* $G \in H^{\lambda_1, \lambda_2}(P)$, $G(x, y) I_{R_+^2 \setminus P}(x, y) = 0$. *Тоді* $G_{b-} \in I_{b-}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\left(L_q(P)\right)$ *для будь-яких* $q \ge 1$ *та* $0 < \varepsilon_i < \lambda_i$, $i = 1, 2$. *Крім того,* $D_{b-}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2} G \in H^{\lambda_1 - \varepsilon_1, \lambda_2 - \varepsilon_2}(P)$.

***Наслідок* 3.** *Якщо функція* $G \in H^{\lambda_1, \lambda_2}(P)$, *то* $D_{b-}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2} G \in C(P)$ *для всіх* $0 < \varepsilon_i < \lambda_i$, $i = 1, 2$. *Аналогічні твердження мають місце і для* $\overline{P}$.

5. Узагальнені дробові інтеграли відносно функцій обмеженої варіації та гельдерових функцій. Покажемо, що для функцій g, що мають на P обмежену варіацію, і неперервних f інтеграл $\int f\,dg$ з означення 3 є звичайним інтегралом Рімана – Стільтьєса. Замість відкритої множини P для спрощення викладок будемо розглядати $\overline{P} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ з очевидними змінами в означеннях.

Теорема 3. *Нехай*

$$f \in C(\overline{P}), \qquad g \in BV(\overline{P}), \qquad f_{a+} \in I_{a+}^{\alpha_1 \alpha_2}\big(L_p(\overline{P})\big),$$

$$g_{b-} \in I_{b-}^{1-\alpha_1\, 1-\alpha_2}\big(L_p(\overline{P})\big), \qquad f_{a_i+}(\cdot, a_j) \in I_{a_i+}^{\alpha_i}\big(L_p[a_i, b_i]\big),$$

$$g_{b_i-}(\cdot, b_j) \in I_{b_i-}^{1-\alpha_i}\big(L_q[a_i, b_i]\big), \qquad i = 1, 2, \quad j = 3 - i,$$

$$1/p + 1/q \le 1, \qquad 0 \le \alpha_i \le 1, \qquad i = 1, 2.$$

Тоді узагальнений дробовий двопараметричний інтеграл Лебега – Стільтьєса $\int_{\overline{P}} f\,dg$ *дорівнює інтегралу Рімана – Стільтьєса* $\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\,dg(x, y)$.

Доведення. Згідно з зауваженням 1, яке легко поширюється на $\overline{P}$, обидва інтеграли дорівнюють

$$\int_{\overline{P}} \big(f_{12}''(x, y) g(x, y) + f_1'(x, y) g_2'(x, y) + f_2'(x, y) g_1'(x, y)\big)\,dx\,dy + \Delta_a(fg)(b),$$

якщо $f \in C^2(\overline{P})$. Якщо ж $f \in C(\overline{P})$, то розглянемо послідовність

$$\big\{\psi_n(x, y), (x, y) \in R_+^2, n \ge 1\big\}$$

апроксимацій 1, тобто

$$\psi_n \in C^\infty\big(R_+^2\big), \qquad \psi_n \ge 0, \qquad \psi_n = 0,$$

якщо

$$|x| \ge \frac{1}{n}, \qquad |y| \ge \frac{1}{n}, \qquad \int_{R_+^2} \psi_n(x, y)\,dx\,dy = 1,$$

і покладемо

$$f^{(n)}(x, y) = 1_P(x, y) \cdot \int_{R_+^2} f(x - s, y - t)\psi_n(s, t)\,ds\,dt = (f * \psi_n)(x, y) \cdot 1_P(x, y).$$

Тоді $f^{(n)} \in C^\infty(\overline{P})$,

$$D_{a+}^{\alpha_1 \alpha_2} f_{a+}^{(n)}(x, y) = \Big(D_{a+}^{\alpha_1 \alpha_2} f_{a+} * \psi_n\Big)(x, y) \cdot 1_{\overline{P}}(x, y),$$

$$D_{a_1+}^{\alpha_1} f_{a_1+}^{(n)}(x, a_2) = \Big(D_{a_1+}^{\alpha_1} f_{a_1+} * \psi_n\Big)(x, a_2) \cdot 1_{\overline{P}}(x, y),$$

$$D_{a_2+}^{\alpha_2} f_{a_2+}^{(n)}(a_1, y) = \Big(D_{a_2+}^{\alpha_2} f_{a_2+} * \psi_n\Big)(a_1, y) \cdot 1_{\overline{P}}(x, y),$$

тому має місце збіжність

$$D_{a+}^{\alpha_1 \alpha_2} f_{a+}^{(n)}(x, y) \to D_{a+}^{\alpha_1 \alpha_2} f_{a+}(x, y) \quad \text{в} \quad L_p(\overline{P}),$$

$$D^{\alpha_1}_{a_1+}f^{(n)}_{a_1+}(x, a_2) \to D^{\alpha_1}_{a_1+}f_{a_1+}(x, a_2) \quad \text{в} \quad L_p[a_1, b_1],$$

$$D^{\alpha_2}_{a_2+}f^{(n)}_{a_2+}(a_1, y) \to D^{\alpha_2}_{a_2+}f_{a_2+}(a_1, y) \quad \text{в} \quad L_p[a_2, b_2],$$

і на підставі нерівності Гельдера права частина зображення (4) для

$$\int_{\overline{P}} \left(f - f^{(n)}\right) dg$$

прямує до нуля. Отже,

$$\int_{\overline{P}} f\, dg = \lim_{n\to\infty} \int_{\overline{P}} f^{(n)}\, dg =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f^{(n)}(x, y)\, dg\,(x, y) = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\, dg\,(x, y),$$

де останній граничний перехід має місце внаслідок обмеженості f, а значить і $f^{(n)}$, на $\overline{P}$.

Теорему доведено.

Перейдемо до розгляду узагальнених дробових інтегралів від гельдерових функцій. Спочатку розглянемо функції f, що є індикаторами прямокутників

$$P_1 := (c_1, d_1] \times (c_2, d_2] \subset \overline{P}.$$

Лема 5. *Якщо* $g \in H^{\lambda_1, \lambda_2}(\overline{P})$ *для деяких* $0 < \lambda_i \le 1$, $i = 1, 2$, *то*

$$\int_{\overline{P}} 1_{P_1}(x, y)\, dg(x, y) = \Delta_{c_1, c_2} g(d_1, d_2). \tag{6}$$

Доведення. Підрахуємо дробову похідну за Ліувіллем індикатора $f(x, y) :=$ $:= 1_{P_1}(x, y)$:

$$D^{\alpha_1\alpha_2}_{a+} 1_{P_1}(x, y) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)\Gamma(1-\alpha_2)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_{a_1}^{x}\int_{a_2}^{y} \frac{1_{P_1}(s, t)}{(x-s)^{\alpha_1}(y-t)^{\alpha_2}}\, ds\, dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)\Gamma(1-\alpha_2)} \frac{\partial}{\partial x} \int_{[x\wedge c_1,\, x\wedge d_1]} (x-s)^{-\alpha_1}\, ds \frac{\partial}{\partial y} \int_{[x\wedge c_2,\, x\wedge d_2]} (y-t)^{-\alpha_2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)\Gamma(1-\alpha_2)} \left(1_{(c_1, b_1)}(x)(x-c_1)^{-\alpha_1} - 1_{(d_1, b_1)}(x)(x-d_1)^{-\alpha_1}\right) \times$$

$$\times \left(1_{(c_2, b_2)}(y)(y-c_2)^{-\alpha_2} - 1_{(d_2, b_2)}(y)(y-d_2)^{-\alpha_2}\right).$$

Очевидно, $D^{\alpha_1\alpha_2}_{a+} 1_{P_1}(x, y) \in L_p(\overline{P})$, якщо $\alpha_i p < 1$, $i = 1, 2$. Отже,

$$1_{P_1}(x, y) \in I^{\alpha_1\alpha_2}_{a+}\left(L_p(\overline{P})\right) \quad \text{для} \quad p < \min\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}\right).$$

Далі, якщо $g \in H^{\lambda_1, \lambda_2}(\overline{P})$, то, згідно з лемою 4 та наслідком 3, функція

$$g_{b-} \in I^{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{b-}\left(L_q(\overline{P})\right)$$

для будь-якого $q \ge 1$ та $0 < \varepsilon_i < \lambda_i$. Тому до $f = 1_{P_1}$ та g можна застосувати означення 3 при будь-яких $\alpha_1 = 1-\varepsilon_i$, $0 < \varepsilon_i < \lambda_i$, причому

$$f_{a_1+}(x, a_2) = f_{a_2+}(a_1, y) = f(a) = 0,$$

звідки

$$\int\limits_{\overline{P}} 1_{P_1}(x, y)\, dg(x, y) = \int\limits_{\overline{P}} D_{a+}^{1-\varepsilon_1 1-\varepsilon_2} 1_{P_1}(x, y) D_{b-}^{\varepsilon_1\varepsilon_2} g_{b-}(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= I_{b-}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(D_{b-}^{\varepsilon_1\varepsilon_2} g_{b-}(c_1, c_2)\right) - I_{b-}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(D_{b-}^{\varepsilon_1\varepsilon_2} g_{b-}(c_1, d_2)\right) -$$

$$- I_{b-}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(D_{b-}^{\varepsilon_1\varepsilon_2} g_{b-}(d_1, c_2)\right) + I_{b-}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(D_{b-}^{\varepsilon_1\varepsilon_2} g_{b-}(d_1, d_2)\right) = \Delta_{c_1, c_2} g(d_1, d_2),$$

тобто рівність (6) доведено.

***Наслідок* 4.** *Нехай* $g \in H^{\lambda_1, \lambda_2}(P)$, *причому* $\pi = \pi^1 \times \pi^2$, *де*

$$\pi^i = \left\{a_i = x_0^i < x_1^i < \ldots < x_{n_i}^i = b_i\right\}$$

— розбиття відрізка $[a_i, b_i]$,

$$f_\pi(x, y) = \sum_{i=1,2} \sum_{j_i=0}^{n_i-1} f_{j_1 j_2} 1_{P_{j_1 j_2}}(x, y),$$

де

$$P_{j_1 j_2} = \left(x_{j_1}^1, x_{j_1+1}^1\right] \times \left(x_{j_2}^2, x_{j_2+1}^2\right].$$

Тоді

$$\int\limits_P f_\pi(x, y)\, dg(x, y) = \sum_{i=1,2} \sum_{j_i=0}^{n_i-1} f_{j_1 j_2} \Delta_{x_j} g(x_{j+1}),$$

де $x_j = \left(x_{j_1}^1, x_{j_2}^2\right)$.

Позначимо суму $\sum_{i=1,2} \sum_{j_i=0}^{n_i-1}$ через $\sum_{j_1, j_2}$.

Нехай тепер π_n — послідовність розбиттів прямокутника $\overline{P}$ того ж вигляду, що й розбиття π з наслідку 4, причому $\pi^n \subset \pi^{n+1}$ і $|\pi_n| = \operatorname{diam} \pi_n \to 0$, $n \to \infty$. Утворимо відповідну послідовність кусково-сталих функцій f_{π_n}.

Теорема 4. 1. *Якщо* $f \in H^{\lambda_1, \lambda_2}(\overline{P})$ *для деяких* $0 < \lambda_i \leq 1$, $i = 1, 2$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\pi_n} \left\| f_{\pi_n} - f \right\|_{L_\infty(\overline{P})} = 0,$$

де $\sup\limits_{\pi_n}$ *береться по всіх послідовностях розбиттів вказаного вигляду.*

2. *Для всіх* $\alpha_1 \vee \alpha_2 < \lambda_1 \wedge \lambda_2$ *і всіх* π_n'*-рівномірних розбиттів множини* $\overline{P}$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\pi_n'} \left\| D_{a+}^{\alpha_1\alpha_2}\left(f_{\pi_n'}\right)_{a+} - D_{a+}^{\alpha_1\alpha_2} f_{a+} \right\|_{L_1(\overline{P})} = 0.$$

Доведення. Твердження 1 є безпосереднім наслідком рівномірної неперервності f на $\overline{P}$. Для доведення твердження 2 скористаємось тим фактом, що для $f \in H^{\lambda_1, \lambda_2}(\overline{P})$ і всіх $\alpha_i < \lambda_i$ похідні за Ліувіллем і Маршо збігаються. Значить, потрібно довести, що кожна з функцій

$$G_1^n(x, y) := g_n(x, y)(x-a_1)^{-\alpha_1}(y-a_2)^{-\alpha_2},$$

$$G_2^n(x, y) := (y-a_2)^{-\alpha_2} \int_{a_1}^{x} \big(g_n(x, y) - g_n(s, y)\big)(x-s)^{-1-\alpha_1}\, ds,$$

$$G_3^n(x, y) := (x-a_1)^{-\alpha_1} \int_{a_2}^{y} \big(g_n(x, y) - g_n(x, t)\big)(y-t)^{-1-\alpha_2}\, dt,$$

$$G_4^n(x, y) := \int_{a_1}^{x}\int_{a_2}^{y} \Delta_{st} g_n(x, y)(x-s)^{-1-\alpha_1}(y-t)^{-1-\alpha_2}\, ds\, dt,$$

де

$$g_n(x, y) = f_{\pi_n}(x, y) - f(x, y),$$

прямує до нуля в $L_1(\overline{P})$.

Спочатку зауважимо, що

$$\big|g_n(x, y)\big| \le c\Big(\big|\pi_n\big|^{\lambda_1} + \big|\pi_n\big|^{\lambda_2}\Big).$$

Тоді

$$\big\|G_1^n\big\|_{L_1(\overline{P})} \le c\Big(\big|\pi_n\big|^{\lambda_1} + \big|\pi_n\big|^{\lambda_2}\Big) \prod_{i=1,2} (b_i-a_i)^{1-\alpha_i} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Нехай $(x, y) \in P_{j_1 j_2}$. Тоді

$$G_2^n(x, y) = (y-a_2)^{-\alpha_2} \times$$

$$\times \left(\sum_{k=0}^{j_1-1} \int_{x_k^1}^{x_{k+1}^1} \Big(\Big(f\big(x_{j_1}^1, x_{j_2}^2\big) - f(x, y)\Big) - \Big(f\big(x_k^1, x_{j_2}^2\big) - f(s, y)\Big)\Big)(x-s)^{-1-\alpha_1}\, ds\; + \right.$$

$$\left. + \int_{x_{j_1}^1}^{x} \Big(\Big(f\big(x_{j_1}^1, x_{j_2}^2\big) - f(x, y)\Big) - \Big(f\big(x_{j_1}^1, x_{j_2}^2\big) - f(s, y)\Big)\Big)(x-s)^{-1-\alpha_1}\, ds,\right.$$

звідки

$$\big|G_2^n(x, y)\big| I\big\{(x, y) \in P_{j_1 j_2}\big\} \le$$

$$\le C(y-a_2)^{-\alpha_2}\left[\Big(\big(x-x_{j_1}^1\big)^{\lambda_1} + \big(y-x_{j_2}^2\big)^{\lambda_2}\Big)\big(x-x_{j_1}^1\big)^{-\alpha_1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{j_1-1}\Big(\big(x_{k+1}^1 - x_k^1\big)^{\lambda_1} + \big(y_{j_2+1}^2 - y_{j_2}^2\big)^{\lambda_2}\Big) \int_{x_k^1}^{x_{k+1}^1} (x-s)^{-1-\alpha_1}\, ds + \big(x-x_{j_1}^1\big)^{\lambda_1-\alpha_1}\right].$$

Тому

$$\big\|G_2^n\big\|_{L_1(\overline{P})} \le \sum_{j_1, j_2} \big\|G_2^n\big\|_{L_1\left(P_{j_1 j_2}\right)} \le$$

$$\le C\left[(b_2-a_2)^{1-\alpha_2}\big|\pi_n\big|^{\lambda_1-\alpha_1} + \big|\pi_n\big|^{\lambda_2}(b_2-a_2)^{1-\alpha_2} \sum_{j_1}\big(x_{j_1+1}^1 - x_{j_1}^1\big)^{1-\alpha_1} + \right.$$

$$+\ (b_2-a_2)^{1-\alpha_2}\sum_{k=0}^{n}\left(x_{k+1}^1-x_k^1\right)^{\lambda_1}\int\limits_{x_k^1}^{x_{k+1}^1}\int\limits_{x_{k+1}^1}^{b_1}(x-s)^{-1-\alpha_1}\,ds\ +$$

$$+\ (b_2-a_2)^{-\alpha_2}\left|\pi_n\right|^{\lambda_2}\sum_{j_1}\int\limits_{x_{j_1}^1}^{x_{j_1+1}^1}\int\limits_{a_1}^{x_{j_1}^1}(x-s)^{-1-\alpha_1}\,ds\,dx+(b_2-a_2)^{-\alpha_2}\left|\pi_n\right|^{\lambda_1-\alpha_1}\Bigg].\quad (7)$$

Перший, третій та п'ятий доданки правої частини (7) оцінюються $c\left|\pi_n\right|^{\lambda_1-\alpha_1}\to$ $\to 0,\ n\to\infty$, причому ці оцінки мають місце для довільних розбиттів π_n. Для оцінки другого та четвертого доданків скористаємось рівномірністю π_n, тобто вважаємо, що

$$x_{j_1+1}^1-x_{j_1}^1=\frac{b_1-a_1}{n}.$$

Тоді

$$\left|\pi_n\right|^{\lambda_2}\sum_{j_1}\left(x_{j_1+1}^1-x_{j_1}^1\right)^{1-\alpha_1}=\left|\pi_n\right|^{\lambda_2-\alpha_1}\left(\frac{b_1-a_1}{n}\right)^{\lambda_2-\alpha_1}\to 0,\qquad n\to\infty,$$

і

$$\left|\pi_n\right|^{\lambda_2}\sum_{j_1}\int\limits_{x_{j_1}^1}^{x_{j_1+1}^1}\int\limits_{a_1}^{x_{j_1}^1}(x-s)^{-1-\alpha_1}\,ds\,dx\ \le\ c\left|\pi_n\right|^{\lambda_2}\sum_{j_1}\int\limits_{x_{j_1}^1}^{x_{j_1+1}^1}\left(x-x_{j_1}^1\right)^{-\alpha_1}dx\ \le$$

$$\le\ c\left|\pi_n\right|^{\lambda_2}\sum_{j_1}\left(x_{j_1+1}^1-x_{j_1}^1\right)^{1-\alpha_1}\ \le\ c\left(\frac{1}{n}\right)^{\lambda_2-\alpha_1}\to 0,\qquad n\to\infty.$$

Отже, $G_2^n\to 0$ в $L_1(\overline{P})$. Доданки G_3^n та G_4^n оцінюються аналогічно. Теорему доведено.

Розглянемо для будь-якого розбиття π_n інтегральну суму вигляду

$$S_n=\sum_{j_1,j_2}f(x_j)\Delta_{x_j}g(x_{j+1}).$$

Означення 6. *Будемо говорити, що існує лівосторонній інтеграл Рімана – Стільтьєса* $\left(\int_{\overline{P}}f\,dg\right)_{\mathrm{left}}$, *якщо суми* S_n *мають спільну границю по всіх послідовностях* π_n *рівномірних розбиттів прямокутника* $\overline{P}$.

Теорема 5. *Нехай* $f\in H^{\lambda_1,\lambda_2}(\overline{P})$, $g\in H^{\mu_1,\mu_2}(\overline{P})$, *причому* $\lambda_i+\mu_i>1$, $i=1,2$. *Тоді існують як узагальнений двопараметричний інтеграл Лебега – Стільтьєса* $\int_{\overline{P}}f\,dg$, *так і* $\left(\int_{\overline{P}}f\,dg\right)_{\mathrm{left}}$, *і ці інтеграли рівні між собою.*

Доведення. З огляду на означення 6 достатньо довести, що $S_n\to\int_{\overline{P}}f\,dg$. Але, згідно з лемою 5 та наслідком 4, ці суми дорівнюють

$$S_n=\int\limits_{\overline{P}}f^{(n)}\,dg=\int\limits_{\overline{P}}D_{a+}^{\alpha_1\alpha_2}f_{a+}^{(n)}(x,y)D_{b-}^{1-\alpha_1 1-\alpha_2}g_{b-}(x,y)\,dx\,dy\ +$$

$$+\int\limits_{a_1}^{b_1}D_{a_1+}^{\alpha_1}f_{a_1+}^{(n)}(x,a_2)D_{b_1-}^{1-\alpha_1}\left(g_{b_1-}(x,b_2)-g_{b_1-}(x,a_2)\right)dx\ +$$

$$+ \int_{a_2}^{b_2} D_{a_2+}^{\alpha_{21}} f_{a_2+}^{(n)}(a_1, y) D_{b_2-}^{1-\alpha_{12}} \left(g_{b_2-}(b_1, y) - g_{b_2-}(a_1, y) \right) dy + f^{(n)}(a) \Delta_a g(b)$$

для будь-яких $1 - \mu_i < \alpha_i < \lambda_i$. Згідно з наслідком 3 та властивостями однопараметричних дробових похідних від гельдерових функцій, $D_{b-}^{1-\alpha_1 1-\alpha_2} g_{b-}(x, y)$, $D_{b_1-}^{1-\alpha_1}\left(g_{b_1-}(x, b_2) - g_{b_1-}(x, a_2) \right)$ та $D_{b_2-}^{1-\alpha_2}\left(g_{b_2-}(b_1, y) - g_{b_2-}(a_1, y) \right)$ неперервні, а отже, і обмежені на $\overline{P}$, $[a_1, b_1]$ та $[a_2, b_2]$ відповідно. На підставі теореми 4 та теореми 4.1.1 [3]

$$D_{a+}^{\alpha_1\alpha_2} f_{a+}^{(n)}(x, y) \to D_{a+}^{\alpha_1\alpha_2} f_{a+}(x, y) \quad \text{в} \quad L_1(\overline{P}),$$

$$D_{a_1+}^{\alpha_1} f_{a_1+}^{(n)}(x, a_2) \to D_{a_1+}^{\alpha_1} f_{a_1+}(x, a_2) \quad \text{в} \quad L_1[a_1, b_1],$$

$$D_{a_2+}^{\alpha_2} f_{a_2+}^{(n)}(a_1, y) \to D_{a_2+}^{\alpha_2} f_{a_2+}(a_1; y) \quad \text{в} \quad L_1[a_2, b_2].$$

Теорему доведено.

Зауваження 2. Використовуючи гельдеровість f, за тих самих умов можна довести, що

$$\int_{\overline{P}} f\, dg = \lim \tilde{S}_n,$$

де

$$\tilde{S}_n = \sum_{j_1, j_2} \left(f\left(x_{j_1}^1, \xi_{j_2}^2\right) + f\left(\xi_{j_1}^1, x_{j_2}^2\right) - f(\xi_j) \right) \Delta_{x_j} g(x_{j+1}),$$

де

$$\xi_j = \tilde{S}_n = \left(\xi_{j_1}^1, \xi_{j_2}^2 \right)$$

— будь-яка точка з P_{j_1, j_2}.

6. Узагальнені інтеграли від дробових броунівських полів. Дробові броунівські поля на площині можуть бути означені різними способами. Ми будемо розглядати поля, які мають дробову броунівську властивість покоординатно.

Означення 7. *Випадкове поле* $\left\{ B_t, t \in R_+^2 \right\}$ *називається дробовим броунівським полем з індексами Хюрста* H_1 *та* H_2, $H_i \in (0, 1)$, *якщо воно задовольняє умови*:

1) B_t — *гауссівське поле*, $B_t = 0$, $t \in \partial R_+^2$;

2) $EB_t = 0$, $EB_t B_s = \dfrac{1}{4} \prod_{i=1,2} \left(t_i^{2H_i} + s_i^{2H_i} - |t_i - s_i|^{2H_i} \right)$;

3) *траєкторії* B_t *неперервні з імовірністю* 1;

4) *прирости* $\Delta_s B_t$ *є стаціонарними*.

Зауважимо, що при кожному фіксованому $t_2 > 0$ процес $B_{\cdot t_2}$ є дробовим броунівським рухом з індексом Хюрста H_1, а при кожному $t_1 > 0$ процес $B_{t_1 \cdot}$ також є дробовим броунівським рухом з індексом Хюрста H_2. Згідно з результатами [4], траєкторії поля B_t майже напевно належать до класу $H^{H_1 - \varepsilon_1, H_2 - \varepsilon_2}(\overline{P})$ на будь-якому прямокутнику $\overline{P}$ і для будь-яких $0 < \varepsilon_i < H_i$.

Тому безпосереднім наслідком теореми 5 є наступний результат.

Теорема 6. *Нехай* $\left\{B_t, t \in R_+^2\right\}$ *— дробове броунівське поле з індексами Хюрста* $H_i > 1/2$, $i = 1, 2$, *функція* $F: R \to R$, $F \in C^1(R)$. *Тоді існує узагальнений двопараметричний дробовий інтеграл* $\int_{\overline{P}} F(B)\,dB$ *для будь-якого прямокутника* $\overline{P} \subset R_+^2$, *який збігається з лівостороннім інтегралом Рімана – Стільтьєса* $\left(\int_{\overline{P}} F(B)\,dB\right)_{\text{left}}$.

***Зауваження* 3.** Теорема 6 залишається вірною, якщо замість $F(B)$ розглянути довільну функцію $f \in H^{\lambda_1, \lambda_2}(\overline{P})$, $\lambda_i + H_i > 1$, $\overline{P} \subset R_+^2$. Це означає, що інтеграл по дробовому броунівському полю від достатньо гладких функцій можна розглядати при кожному $\omega \in \Omega'$, $P(\Omega') = 1$, як границю відповідних інтегральних сум.

1. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. *Ільченко С. А.* Порівняння властивостей дробових похідних за Ліувіллем і за Маршо від багатопараметричних функцій // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. математика, механіка. – 2003. – Вип. 9-10. – С. 41 – 48.
3. *Zähle M.* Integration with respect to fractional functions and stochastic calculus // J. Probab. Theory and Relat. Fields. – 1998. – **111**. – P. 333 – 374.
4. *Kamount A.* On the fractional anisotropic Wiener field // Probab. and Math. Statist. – 1996. – **16**, № 1. – P. 85 – 98.

Одержано 20.01.2003