УДК 517.98

Г. С. Мустафаев (Ин-т математики и механики НАН Азербайджана, Баку)

О ДИСКРЕТНОСТИ СТРУКТУРНОГО ПРОСТРАНСТВА СЛАБО ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫХ БАНАХОВЫХ АЛГЕБР

We consider a class of Banach algebras with irreducible finite-dimensional representations and prove that, for amenable Banach algebras belonging to the class considered, the weak complete continuity implies the discreteness of structural space of these algebras.

Розглянуто клас банахових алгебр із незвідними скінченновимірними зображеннями і доведено, що для аменабельних банахових алгебр із цього класу слабка цілком неперервність зумовлює дискретність їх структурного простору.

1. Введение и предварительные сведения. Пусть A — комплексная банахова алгебра, Π_A — ее структурное пространство с ядерно-оболочечной (hk) топологией. Капланский [1] назвал алгебру A вполне непрерывной, если для любого $a \in A$ оператор L_a левого умножения на a и оператор R_a правого умножения на a компактны в A. В этой же работе Капланский доказал дискретность структурного пространства вполне непрерывных банаховых алгебр (теорема 5.1). Алгебру A будем называть слабо вполне непрерывной, если все операторы левого (или правого) умножения слабо компактны в A. Для некоторого класса банаховых алгебр слабая вполне непрерывность также влечет дискретность соответствующего „дуального объекта". Например, групповая алгебра $L^1(G)$ локально компактной группы G является слабо вполне непрерывной тогда и только тогда, когда G компактна (следовательно, дуальное пространство $\hat{G}$ дискретно) [2 – 4]. C^*-алгебра A слабо вполне непрерывна тогда и только тогда, когда пространство Гельфанда каждой максимальной коммутативной C^*-подалгебры A дискретно (а это эквивалентно тому, что A дуальна) [5] (утверждение 4.7.20). Отсюда, в частности, следует, что если X локально компактно и $C_0(X)$ — банахова алгебра непрерывных функций на X, стремящихся к нулю на бесконечности, то $C_0(X)$ слабо вполне непрерывна тогда и только тогда, когда ее структурное пространство X дискретно. В [6] (следствие 2.3) доказано, что для коммутативной аменабельной банаховой алгебры слабая вполне непрерывность влечет дискретность ее пространства Гельфанда (напомним, что в коммутативных банаховых алгебрах hk-топология слабее, чем топология Гельфанда).

В настоящей статье рассматривается класс банаховых алгебр с неприводимыми конечномерными представлениями. Наряду с другими результатами устанавливается, что для аменабельных банаховых алгебр из этого класса, а также для банаховых алгебр со свойством аппроксимативного разделения шара (см. ниже) слабая вполне непрерывность влечет дискретность их структурного пространства.

Приведем основные обозначения и факты, необходимые для дальнейшего изложения: X — банахово пространство, X^* — сопряженное к нему, X^{**} — второе сопряженное к нему и X_1 — замкнутый единичный шар в X. Для $\varphi \in X^*$ и $x \in X$ через $\langle \varphi, x \rangle$ или $\varphi(x)$ будем обозначать естественную двойственность между X и X^*. Через $\overline{E}$ обозначим замыкание по норме множества $E \subset X$.

Пусть A — банахова алгебра и X — левый (правый) A-модуль относительно умножения ax (ax), где $a \in A$ и $x \in X$. Для $a \in A$ и $\varphi \in X^*$ определим функционал $\varphi \cdot a$ $(a \cdot \varphi)$ в X равенством $\langle \varphi \cdot a, x \rangle = \langle \varphi, ax \rangle$ $(\langle a \cdot \varphi, x \rangle = \langle \varphi, xa \rangle)$.

Относительно этого умножения X^* становится правым (левым) A-модулем и называется дуальным A-модулем. Пусть X и Y — левые (правые) банаховы A-модули. Ограниченный линейный оператор $T: X \to Y$ называется левым (правым) A-морфизмом, если $T(ax) = a(Tx)$ $(T(xa) = (Tx)a)$ для всех $a \in A$ и $x \in X$. Теперь пусть X, Y и Z — левые (правые) банаховы A-модули, $f: X \to Y$ и $h: Y \to Z$ — левые (правые) A-морфизмы. Последовательность

$$\Sigma: (0) \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f} Z \to (0)$$

называется точной, если f — инъективен, h — сюръективен и $\operatorname{Ran} f = \operatorname{Ker} h$. Точная последовательность Σ называется допустимой, если существует ограниченный линейный оператор $F: Y \to X$ такой, что $F \circ f = \mathrm{id}_X$. Точная последовательность Σ называется расщепляемой, если существует левый (правый) A-морфизм $F: Y \to X$ такой, что $F \circ f = \mathrm{id}_X$.

Пусть A — банахова алгебра. Нетрудно видеть, что A^* является банаховым двусторонним A-модулем. В A^{**} можно определить умножение (после чего A^{**} становится банаховой алгеброй), которое является естественным продолжением исходного умножения в A [7]: если $F, G \in A^{**}$, $\varphi \in A^*$ и $a \in A$, то $F \cdot G$ определяется равенством $\langle F \cdot G, \varphi \rangle = \langle F, G \cdot \varphi \rangle$, где $\langle G \cdot \varphi, a \rangle = \langle G, \varphi \cdot a \rangle$. Поэтому A можно считать подалгеброй A^{**}. Как известно [7, с. 318] (лемма 3), A слабо вполне непрерывна тогда и только тогда, когда A — правый идеал в A^{**}. В A^{**} можно определить второе умножение $F \circ G$ $(F, G \in A^{**})$ равенством $\langle F \circ G, \varphi \rangle = \langle G, \varphi \cdot F \rangle$, где $\langle \varphi \cdot F, a \rangle = \langle F, a \cdot \varphi \rangle$, $a \in A$. Алгебра A называется регулярной по Аренсу, если эти два умножения в A^{**} совпадают.

Напомним, что $*$-слабо замкнутое подпространство $E \subset A^*$ называется инвариантным подпространством (и. п.) в A^*, если $\varphi \cdot a \in E$ и $a \cdot \varphi \in E$ для всех $a \in A$ и $\varphi \in E$. Заметим, что если E — инвариантное подпространство в A^*, то $\varphi \cdot F \in E$ и $F \cdot \varphi \in E$ для всех $F \in A^{**}$ и $\varphi \in E$. Действительно, если $F \in A^{**}$, то существует $*$-слабо сходящаяся к F направленность $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ в A. Отсюда следует, что направленности $(\varphi \cdot a_\lambda)$ и $(a_\lambda \cdot \varphi)$ $*$-слабо сходятся к $\varphi \cdot F$ и $F \cdot \varphi$ соответственно. Поскольку E $*$-слабо замкнуто, имеем $\varphi \cdot F \in E$ и $F \cdot \varphi \in E$. E называется минимальным, если оно $\neq (0)$ и не содержит никакого другого и. п.

В дальнейшем через $\hat{A}$ будем обозначать множество классов эквивалентности (ненулевых) неприводимых представлений алгебры A. Если σ — неприводимое представление алгебры A, то σ будет обозначать класс эквивалентности элемента σ.

Спектром A называется множество $\hat{A}$, снабженное топологией — прообразом hk-топологии при каноническом отображении $\hat{A} \to \Pi_A$, $\sigma \to \operatorname{Ker} \sigma$. Теперь предположим, что любое неприводимое представление алгебры A конечномерно. Нетрудно видеть, что если $\sigma \in \hat{A}$, то $A / \operatorname{Ker} \sigma$ изоморфна полной матричной алгебре. Отсюда следует, что два неприводимых представления с одним и тем же ядром эквивалентны и поэтому $\hat{A}$ и Π_A гомеоморфны. Далее, поскольку $\operatorname{Ker} \sigma$ — максимальный двусторонний идеал в A, то $(\operatorname{Ker} \sigma)^\perp$ — минимальное и. п. в A^*.

Предложение 1. *Если A имеет ограниченную аппроксимативную единицу (о. а. е.), то любое минимальное конечномерное и. п. E в A^* имеет вид $E = (\operatorname{Ker} \sigma)^\perp$ для некоторого $\sigma \in \hat{A}$.*

Доказательство. Если E — минимальное конечномерное и. п. в A^*, то $E = J^{\perp}$ для некоторого (нетривиального) максимального двустороннего идеала J в A с конечной коразмерностью. Поскольку A/J конечномерно и имеет о. а. е., то A/J имеет единичный элемент. Следовательно, J — модулярный идеал и поэтому содержится в некотором максимальном модулярном левом идеале I. Если σ — регулярное представление A в A/I, то нетрудно видеть, что σ неприводимо и $J \subset \operatorname{Ker}\sigma = \{a : aA \subset I\}$. В силу максимальности идеала J имеем $J = \operatorname{Ker}\sigma$ и поэтому $E = (\operatorname{Ker}\sigma)^{\perp}$.

Предложение доказано.

В настоящей статье используются следующие обозначения: для произвольного $\sigma \in \hat{A}$ полагаем $J_\sigma = \operatorname{Ker}\sigma$ и $E_\sigma = J_\sigma^{\perp}$, элементы пространства E_σ обозначаем через φ_σ.

2. Аменабельность. Как отмечено во введении, если C^*-алгебра A слабо вполне непрерывна, то пространство Гельфанда каждой максимальной коммутативной C^*-подалгебры A дискретно. Следующий результат, вероятно, известен. Приведем его доказательство из-за отсутствия удобной ссылки.

Предложение 2. *Пусть A — C^*-алгебра такая, что любое ее неприводимое представление конечномерно. Если A слабо вполне непрерывна, то Π_A дискретно.*

Доказательство. Пусть A — C^*-алгебра такая, что любое ее неприводимое представление конечномерно. Согласно теореме 1 из работы [8] A^* имеет свойство Данфорда – Петтиса (ДП) (напомним, что банахово пространство X имеет свойство ДП, если любой слабо компактный линейный оператор, определенный в X, переводит слабо компактные множества в компактные). В силу теоремы Гротендика [9, с. 177] A также имеет свойство ДП. Далее, поскольку A имеет о. а. е., согласно теореме Коэна о факторизации [10, с. 62] любой элемент $a \in A$ представим в виде $a = bc$ для некоторых $b, c \in A$. На основании того, что $L_a = L_a L_c$, L_c — слабо компактный оператор и A имеет свойство ДП, отсюда следует, что L_a — компактный оператор. Положим $J = \{a \in A : R_a$ компактен в $A\}$. Нетрудно видеть, что J — замкнутый двусторонний идеал в A и $a^* \in J$ для любого $a \in A$. Следовательно, $a = (a^*)^* \in J$ и поэтому $J = A$. Таким образом, операторы левого и правого умножения компактны в A. Согласно упомянутой выше теореме Капланского Π_A дискретно.

Предложение доказано.

Пусть A — банахова алгебра и X — двусторонний банахов A-модуль. Ограниченный линейный оператор $D : A \to X^*$ называется дифференцированием, если $D(ab) = a \cdot Db + (Da) \cdot b$ для любых $a, b \in A$. Дифференцирование D называется внутренним, если $D = D_\varphi$ для некоторого $\varphi \in X^*$, где $D_\varphi : a \to a \cdot \varphi - \varphi \cdot a$, $a \in A$. Алгебра A называется аменабельной, если любое дифференцирование $D : A \to X^*$ является внутренним.

В дальнейшем нам понадобится теорема 2.3 из работы [11]:

Пусть A — аменабельная банахова алгебра, X, Y, Z — левые (правые) банаховы A-модули и X^* — дуальный A-модуль. Если точная последовательность

$$\Sigma : (0) \to X^* \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} Z \to (0)$$

допустима, то она расщепляема.

Основным результатом настоящего пункта является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть A — аменабельная банахова алгебра такая, что любое ее неприводимое представление конечномерно. Если A слабо вполне непрерывна, то пространство Π_A дискретно.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся некоторые предварительные результаты.

Лемма 1. *Пусть A — банахова алгебра такая, что любое ее неприводимое представление конечномерно. Тогда для двух различных $\sigma, \tau \in \hat{A}$ найдется элемент $e_\tau \in J_\tau$ такой, что $\varphi_\sigma \cdot e_\tau = e_\tau \cdot \varphi_\sigma = \varphi_\sigma$ для всех $\varphi_\sigma \in E_\sigma$.*

Доказательство. Как отмечено выше, A / J_σ изоморфна полной матричной алгебре и поэтому A / J_σ имеет единичный элемент. Пусть $\pi: A \to A / J_\sigma$ — канонический гомоморфизм и $\pi(e_\sigma)$ — единица алгебры A / J_σ. Поскольку $J_\tau \not\subset J_\sigma$, то $\pi(J_\tau)$ — ненулевой двусторонний идеал алгебры A / J_σ. В силу максимальности идеала J_σ имеем $\pi(J_\tau) = A / J_\sigma$ и поэтому существует элемент $e_\tau \in J_\tau$ такой, что $\pi(e_\tau) = \pi(e_\sigma)$. Следовательно, $e_\tau + J_\sigma$ — единица алгебры A / J_σ. Поэтому для произвольного $\varphi_\sigma \in E_\sigma$ имеем $\varphi_\sigma = \varphi_\sigma \cdot (e_\tau + J_\sigma) = (e_\tau + J_\sigma) \cdot \varphi_\sigma$ или $\varphi_\sigma = \varphi_\sigma \cdot e_\tau = e_\tau \cdot \varphi_\sigma$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть A — аменабельная банахова алгебра такая, что любое ее неприводимое представление конечномерно. Тогда для произвольного $\sigma \in \hat{A}$*

$$E_\sigma \cap \overline{\operatorname{span}}\left\{E_\tau : \tau \in \hat{A} \setminus \{\sigma\}\right\} = \{0\}.$$

Доказательство. Выберем произвольный элемент $\varphi_\sigma \in E_\sigma \setminus \{0\}$ и покажем, что

$$\varphi_\sigma \notin \overline{\operatorname{span}}\left\{E_\tau : \tau \in \hat{A} \setminus \{\sigma\}\right\}.$$

Для этого достаточно показать, что существует элемент $F \in A^{**}$ такой, что $F(\varphi_\sigma) \neq 0$ и $F(\varphi_\tau) = 0$ для всех $\varphi_\tau \in E_\tau$ и $\tau \in \hat{A} \setminus \{\sigma\}$. Пусть $\dim E_\sigma = n_\sigma$ и $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ — базисные векторы в E_σ. Тогда существуют $\{c_1, \ldots, c_{n_\sigma}\} \in C$ такие, что $\varphi_\sigma = c_1 \varphi_1 + \ldots + c_{n_\sigma} \varphi_{n_\sigma}$ и для некоторых i, $1 \le i \le n_\sigma$, $c_i \neq 0$. Поскольку $E_\sigma = (A / J_\sigma)^*$ дополняемо в A^*, точная последовательность

$$\Sigma: (0) \to E_\sigma \xrightarrow{\text{id}} A^* \xrightarrow{\pi} A^* / E_\sigma \to (0)$$

правых (соответственно левых) A-модулей допустима, где id — тождественное, а π — расщепляемое отображение. Ввиду того, что A аменабельна, Σ — расщепляема [11] (теорема 2.3). Другими словами, существует проектор $P: A^* \to$ $\to E_\sigma$, который в то же время является правым A-морфизмом, а именно выполняется равенство

$$P(\varphi \cdot a) = (P\varphi) \cdot a \tag{1}$$

для всех $a \in A$ и $\varphi \in A^*$. Для $\varphi \in A^*$ и $F \in A^{**}$ обозначим через $F \otimes \varphi$ одномерный оператор $F \otimes \varphi : \psi \to F(\psi)\varphi$, $\psi \in A^*$. Нетрудно видеть, что существуют $F_1, \ldots, F_{n_\sigma}$ в A^{**} такие, что $F_i(\varphi_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n_\sigma$, и $P = F_1 \otimes$ $\otimes \varphi_1 + \ldots + F_{n_\sigma} \otimes \varphi_{n_\sigma}$. Тогда равенство (1) принимает вид

$$\begin{aligned} &F_1(\varphi \cdot a)\varphi_1 + \ldots + F_{n_\sigma}(\varphi \cdot a)\varphi_{n_\sigma} = \\ &= F_1(\varphi)\varphi_1 \cdot a + \ldots + F_{n_\sigma}(\varphi)\varphi_{n_\sigma} \cdot a. \end{aligned} \tag{2}$$

Поскольку $F_i(\varphi_\sigma) = c_i \neq 0$, остается показать, что $F_i(\varphi_\tau) = 0$ для всех $\varphi_\tau \in E_\tau$ и $\tau \in \hat{A} \setminus \{\sigma\}$. Пусть $\tau \in \hat{A} \setminus \{\sigma\}$. Тогда в силу леммы 1 найдется элемент $e_\sigma \in J_\sigma$ такой, что $\varphi_\tau \cdot e_\sigma = e_\sigma \cdot \varphi_\tau = \varphi_\tau$ для всех $\varphi_\tau \in E_\tau$. Полагая в (2) $\varphi = \varphi_\tau$, $a = e_\sigma$ и учитывая, что $\varphi_1 \cdot e_\sigma = \ldots = \varphi_{n_\sigma} \cdot e_\sigma = 0$, имеем $F_1(\varphi_\tau)\varphi_1 + \ldots \ldots + F_{n_\sigma}(\varphi_\tau)\varphi_{n_\sigma} = 0$. Отсюда получаем $F_i(\varphi_\tau) = 0$.

Лемма доказана.

***Доказательство теоремы* 1.** В силу леммы 2 для произвольного $\varphi_\sigma \in E_\sigma \setminus \{0\}$ существует $F_\sigma \in A^{**}$ такой, что $\langle F_\sigma, \varphi_\sigma \rangle \neq 0$ и $\langle F_\sigma, \varphi_\tau \rangle = 0$ для всех $\varphi_\tau \in E_\tau$ и $\tau \in \hat{A} \setminus \{\sigma\}$. Выберем произвольный элемент $\tau_0 \in \hat{A} \setminus \{\sigma\}$. В силу леммы 1 найдется элемент $e_{\tau_0} \in J_{\tau_0}$ такой, что $\varphi_\sigma \cdot e_{\tau_0} = e_{\tau_0} \cdot \varphi_\sigma = \varphi_\sigma$. Положим $a = e_{\tau_0} \cdot F_\sigma$. Поскольку A слабо вполне непрерывна, A является правым идеалом в A^{**} [7, с. 318] (лемма 3) и поэтому $a \in A$. Далее, имеем

$$\langle \varphi_\sigma, a \rangle = \langle e_{\tau_0} \cdot F_\sigma, \varphi_\sigma \rangle = \langle F_\sigma \cdot \varphi_\sigma, e_{\tau_0} \rangle =$$

$$= \langle F_\sigma, \varphi_\sigma \cdot e_{\tau_0} \rangle = \langle F_\sigma, \varphi_\sigma \rangle \neq 0.$$

Пусть $\tau \in \hat{A} \setminus \{\sigma\}$ и $\varphi_\tau \in E_\tau$. Поскольку $\varphi_\tau \cdot e_{\tau_0} \in E_\tau$, получаем

$$\langle \varphi_\tau, a \rangle = \langle e_{\tau_0} \cdot F_\sigma, \varphi_\tau \rangle = \langle F_\sigma \cdot \varphi_\tau, e_{\tau_0} \rangle = \langle F_\sigma, \varphi_\tau \cdot e_{\tau_0} \rangle = 0.$$

Таким образом, для произвольного $\varphi_\sigma \in E_\sigma \setminus \{0\}$ существует $a \in A$ такой, что $\langle \varphi_\sigma, a \rangle \neq 0$ и $\langle \varphi_\tau, a \rangle = 0$ для всех $\varphi_\tau \in E_\tau$ и $\tau \in \hat{A} \setminus \{\sigma\}$. Отсюда

$$a \notin J_\sigma, \quad a \in \bigcap \left\{ J_\tau : \tau \in \hat{A} \setminus \{\sigma\} \right\}$$

и, следовательно,

$$J_\sigma \not\subset \bigcap \left\{ J_\tau : \tau \in \hat{A} \setminus \{\sigma\} \right\}.$$

Это означает, что

$$\{J_\sigma\} \notin \overline{\Pi_A \setminus \{J_\sigma\}}^{hk}.$$

Итак, одноточечное множество $\{J_\sigma\}$ открыто в Π_A и поэтому Π_A дискретно.

Теорема доказана.

Заметим, что если заменить в теореме 1 условие слабой вполне непрерывности условием рефлексивности, то алгебра A окажется конечномерной [12] (следствие 2.3). Теорема 1 содержит этот факт тоже. Действительно, согласно теореме 1 Π_A дискретно. Поскольку A имеет о. а. е., то в силу рефлексивности алгебры A она имеет единичный элемент. Следовательно, пространство Π_A компактно и Π_A — конечное множество. Поэтому $A / \mathrm{Rad}(A)$ конечномерно. Ввиду того, что $\mathrm{Rad}(A)$ — дополняемый двусторонний идеал в A, в силу аменабельности алгебры A $\mathrm{Rad}(A)$ имеет о. а. е. [11] (теорема 3.7). Поскольку $\mathrm{Rad}(A)$ рефлексивен, он имеет единичный элемент и $\mathrm{Rad}(A) = \{0\}$.

Упомянутый выше факт допускает следующее обобщение — коммутативный вариант, который доказан в [13] (теорема 3.4).

Предложение 3. *Пусть A — аменабельная банахова алгебра такая, что любое ее неприводимое представление конечномерно. Если A слабо полна и регулярна по Аренсу, то она конечномерна.*

При доказательстве этого предложения существенно используется следующая теорема А. Улгера [13] (теорема 3.3).

Теорема 2. *Пусть A — слабо полная банахова алгебра с о. а. е. Если A регулярна по Аренсу, то она имеет единичный элемент.*

***Доказательство предложения* 3.** В силу теоремы 2 алгебра A имеет единичный элемент 1, и поэтому пространство Π_A компактно. Покажем, что Π_A дискретно. Для этого достаточно показать (см. доказательство теоремы 1), что для произвольного $\sigma \in \hat{A}$

$$J_\sigma \not\subset \bigcap \left\{ J_\tau : \tau \in \hat{A} \setminus \{\sigma\} \right\}.$$

Пусть $\sigma \in \hat{A}$. Поскольку алгебра A аменабельна и J_σ — замкнутый двусторонний идеал в A с конечной коразмерностью, то J_σ имеет о. а. е. [11] (теорема 3.7). Вследствие того, что J_σ слабо полная и регулярная по Аренсу [7, с. 312] (следствие), согласно теореме 2 J_σ имеет единичный элемент. Поэтому существует центральный идемпотент P_σ алгебры A такой, что $J_\sigma = P_\sigma A$. Нетрудно видеть, что $1 - P_\sigma \notin J_\sigma$. Остается показать, что для произвольного $\tau \in \hat{A} \setminus \{\sigma\}$ $1 - P_\sigma \in J_\tau$. Пусть для некоторого $\tau \in \hat{A} \setminus \{\sigma\}$ $1 - P_\sigma \notin J_\tau$. Тогда канонический образ $(1 - P_\sigma)A$ является ненулевым двусторонним идеалом в A / J_τ. В силу максимальности идеала J_τ получаем $A = (1 - P_\sigma)A + J_\tau$. Отсюда $J_\sigma = P_\sigma A = P_\sigma J_\tau \subset J_\tau$ и, следовательно, $J_\sigma = J_\tau$. А это противоречит неравенству $\sigma \neq \tau$. Итак, Π_A — конечное множество и поэтому $A / \mathrm{Rad}(A)$ конечномерно. Далее, в силу аменабельности алгебры A $\mathrm{Rad}(A)$ имеет о. а. е. [11] (теорема 3.7). Кроме того, $\mathrm{Rad}(A)$ слабо полная и регулярная по Аренсу [7, с. 312] (следствие). Согласно теореме 2 $\mathrm{Rad}(A)$ имеет единичный элемент и поэтому $\mathrm{Rad}(A) = \{0\}$.

Предложение доказано.

3. Свойство аппроксимативного разделения шара. Пусть A — коммутативная банахова алгебра, M_A — ее пространство Гельфанда. Говорят [6] (определение 2.3), что A имеет свойство *разделения шара* (РШ), если для двух различных $\varphi, \psi \in M_A$ найдется элемент $a \in A_1$ такой, что $\varphi(a) = 1$ и $\psi(a) = 0$. Алгебра A имеет свойство *аппроксимативного разделения шара* (АРШ), если существует направленность $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset A_1$ такая, что $\varphi(a_\lambda) \to 1$ и $\psi(a_\lambda) \to 0$. В работе [6] (следствие 3.2) доказано, что для коммутативных банаховых алгебр со свойством РШ слабая вполне непрерывность влечет дискретность их пространства Гельфанда. Для регулярных по Аренсу коммутативных банаховых алгебр со свойством АРШ слабая вполне непрерывность тоже влечет дискретность их пространства Гельфанда [6] (теоремы 2.2 и 3.1). В настоящем пункте мы докажем некоммутативный вариант последнего факта без условия „регулярности по Аренсу".

Пусть A — произвольная банахова алгебра такая, что любое неприводимое ее представление конечномерно. В силу леммы 1 для двух различных $\sigma, \tau \in \hat{A}$ найдется элемент $a \in A$ такой, что $\varphi_\sigma \cdot a = \varphi_\sigma$ для всех $\varphi_\sigma \in E_\sigma$ и $\varphi_\tau \cdot a = 0$ для всех $\varphi_\tau \in E_\tau$. Будем говорить, что A имеет свойство *разделения шара* (РШ), если для произвольных двух различных $\sigma, \tau \in \hat{A}$ найдется элемент $a \in A_1$ такой, что $\varphi_\sigma \cdot a = \varphi_\sigma$ для всех $\varphi_\sigma \in E_\sigma$ и $\varphi_\tau \cdot a = 0$ для всех $\varphi_\tau \in E_\tau$.

В силу леммы Урысона коммутативные C^*-алгебры имеют свойство РШ.

Предложение 4. *Пусть A — C^*-алгебра такая, что любое неприводимое ее представление конечномерно. Тогда A имеет свойство РШ.*

Доказательство. Пусть σ, τ — различные элементы $\hat{A}$ и $\pi : A \to A / J_\sigma$ — канонический гомоморфизм. Как отмечено выше, A / J_σ изоморфна полной матричной алгебре и поэтому имеет единичный элемент $\pi(e_\sigma)$. Поскольку $J_\tau \not\subset J_\sigma$, то $\pi(J_\tau)$ — ненулевой двусторонний идеал в A/J_σ. В силу максимальности идеала J_σ имеем $\pi(J_\tau) = A/J_\sigma$ и поэтому существует $e_\tau \in J_\tau$ такой, что $\pi(e_\tau) = \pi(e_\sigma)$. Вследствие того, что A/J_σ — C^*-алгебра, $\| e_\tau + J_\sigma \| = 1$ и поэтому $\| e_\tau + J_\sigma \cap J_\tau \| = 1$ [см. 5] (утверждение 1.9.12). В силу проксиминальности замкнутых двусторонних идеалов в C^*-алгебрах [14, с. 36, 126] существует наилучший приближающий элемент $e_{\sigma,\tau} \in J_\sigma \cap J_\tau$. Положим $a = e_\tau + e_{\sigma,\tau}$. Нетрудно видеть, что $\| a \| = 1$, $\varphi_\sigma \cdot a = \varphi_\sigma$ для всех $\varphi_\sigma \in E_\sigma$ и $\varphi_\tau \cdot a = 0$ для всех $\varphi_\tau \in E_\tau$.

Предложение доказано.

Будем говорить, что алгебра A имеет свойство *аппроксимативного разделения шара* (АРШ), если для произвольных двух различных $\sigma, \tau \in \hat{A}$ найдется направленность $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset A_1$ такая, что $\varphi_\sigma \cdot a_\lambda \to \varphi_\sigma$ для всех $\varphi_\sigma \in E_\sigma$ и $\varphi_\tau \cdot a_\lambda \to 0$ для всех $\varphi_\tau \in E_\tau$.

Теорема 3. *Пусть A — банахова алгебра такая, что любое ее неприводимое представление конечномерно и, кроме того, A имеет свойство АРШ. Если A слабо вполне непрерывна, то пространство Π_A дискретно.*

Доказательство. Сначала докажем, что для произвольного $\sigma \in \hat{A}$

$$E_\sigma \cap \overline{\operatorname{span}}\left\{ E_\tau : \tau \in \hat{A} \setminus \{\sigma\} \right\} = \{0\}.$$

Выберем произвольный элемент $\varphi_\sigma \in E_\sigma \setminus \{0\}$ и покажем, что

$$\varphi_\sigma \notin \overline{\operatorname{span}}\left\{ E_\tau : \tau \in \hat{A} \setminus \{\sigma\} \right\}.$$

Предположим, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют попарно различные $\{\tau_1, \ldots, \tau_n\} \subset \hat{A}$ и $\{c_1, \ldots, c_n\} \subset C$ такие, что

$$\left\| \varphi_\sigma - \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_{\tau_i} \right\| < \varepsilon. \tag{3}$$

Пусть ε выбрано так, что $\varepsilon < \| \varphi_\sigma \|$. Поскольку A имеет свойство АРШ, для произвольного $\tau \in \hat{A} \setminus \{\sigma\}$ существует направленность $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset A_1$ такая, что $\varphi_\sigma \cdot a_\lambda \to \varphi_\sigma$ и $\varphi_\tau \cdot a_\lambda \to 0$. Если F — $*$-слабая предельная точка направленности $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ в A^{**}, то $\| F \| \le 1$. Далее заметим, что $\varphi_\sigma \cdot F = \varphi_\sigma$ для всех $\varphi_\sigma \in E_\sigma$. Это следует из равенств

$$\langle \varphi_\sigma \cdot F, a \rangle = \langle F, a \cdot \varphi_\sigma \rangle = \lim_\lambda \left\langle a \cdot \varphi_\sigma, a_\lambda \right\rangle =$$

$$= \lim_\lambda \left\langle \varphi_\sigma \cdot a_\lambda, a \right\rangle = \langle \varphi_\sigma, a \rangle, \qquad a \in A.$$

Аналогично имеем $\varphi_\tau \cdot F = 0$ для всех $\varphi_\tau \in E_\tau$. Пусть $F_1, \ldots, F_n$ выбраны так, что $\varphi_\sigma \cdot F_1 = \varphi_\sigma$, $\varphi_{\tau_1} \cdot F_1 = 0, \ldots, \varphi_\sigma \cdot F_n = \varphi_\sigma$ и $\varphi_{\tau_n} \cdot F_n = 0$. Положим $F = F_1 \cdot \ldots \cdot F_n$. Тогда $\varphi_\sigma \cdot F = \varphi_\sigma$ для всех $\varphi_\sigma \in E_\sigma$. Заметим, что $\varphi_{\tau_i} \cdot F = 0$ для всех $\varphi_{\tau_i} \in E_{\tau_i}$ и $i = 1, \ldots, n$. Поскольку $\varphi_{\tau_i} \cdot F_1 \cdot \ldots \cdot F_{i-1} \in E_{\tau_i}$ и $\varphi_{\tau_i} \cdot F_i = 0$ для всех $\varphi_{\tau_i} \in E_{\tau_i}$, имеем $\varphi_{\tau_i} \cdot F = (\varphi_{\tau_i} \cdot F_1 \cdot \ldots \cdot F_{i-1}) \cdot F_i \cdot \ldots \cdot F_n = 0$. Теперь из (3) получаем

$$\|\varphi_\sigma\| = \left\|\varphi_\sigma \cdot F - \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_{\tau_i} \cdot F\right\| < \varepsilon \|F\| \le \varepsilon,$$

а это является противоречием. Доказательство завершается, как и доказательство теоремы 1.

1. *Kaplansky I.* Normed algebras // Duke Math. J. – 1949. – **16**. – P. 399–418.
2. *Watanabe S.* A Banach algebra which is an ideal in the second dual space, I(II) // Sci. Rep. Niigata Univ. Ser. A. – 1974. – **11**. – P. 95–101; 1976. – **13**. – P. 43–48.
3. *Grosser M.* $L^1(G)$ as an ideal in its second dual space // Proc. Amer. Math. Soc. – 1979. – **73**. – P. 363–364.
4. *Johnson D.* A characterization of compact groups // Ibid. – 1979. – **74**. – P. 381–382.
5. *Диксмье Ж.* C^*-алгебры и их представления. – М.: Наука, 1974. – 400 с.
6. *Ülger A.* Some results about the spectrum of commutative Banach algebras under the weak topology and applications // Monatsh. Math. – 1996. – **121**. – P. 353–379.
7. *Duncan J., Hosseiniun S. A. R.* The second dual of a Banach algebra // Proc. Roy. Soc. Edinburgh A. – 1979. – **84**. – P. 309–325.
8. *Hamana M.* On linear topological properties of some C^*-algebras // Tohoku Math. J. – 1977. – **29**. – P. 157–163.
9. *Diestel J., Uhl J. J. (Jr.)* Vector measures // Math. Surv. – Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1977. – № 5. – 321 p.
10. *Bonsall F., Duncan J.* Complete normed algebras. – New York: Springer, 1973. – 301 p.
11. *Curtis P. C., Loy R. J.* The structure of amenable Banach algebras // J. London Math. Soc. – 1989. – **40**. – P. 89–104.
12. *Gale J. E., Ransford T. J., White M. C.* Weakly compact homomorphisms // Trans. Amer. Math. Soc. – 1992. – **2**. – P. 815–824.
13. *Ülger A.* Arens regularity of weakly sequentially complete Banach algebras // Proc. Amer. Math. Soc. – 1999. – **127**. – P. 3221–3227.
14. *Behrends E.* *M*-structure and the Banach – Stone theorem // Lect. Notes Math. – 1979. – **736**.

Получено 04.09.2002