УДК 517.5

Ю. М. Дюкарев (Харьков. нац. ун-т)

ЗАДАЧА НЕВАНЛИННЫ – ПИКА ДЛЯ СТИЛЬТЬЕСОВСКИХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

We consider the Nevanlinna – Pick interpolational problem for the Stieltjes matrix functions. We obtain two criteria of indetermination of the Nevanlinna – Pick problem with infinite number of points of interpolation. In indeterminate case, we describe the general solution of the Nevanlinna – Pick problem in terms of linear fractional transformations.

Розглянуто інтерполяційну задачу Неванлінни – Піка для стільтьєсовських матриць-функцій. Отримано два критерії невизначеності задачі Неванлінни – Піка з нескінченним числом вузлів інтерполяції. У невизначеному випадку загальний розв'язок задачі Неванлінни – Піка описано у термінах дробово-лінійних перетворень.

1. Введение. В настоящей статье исследуется интерполяционная задача Неванлинны – Пика с бесконечным числом узлов интерполяции для стильтьесовских матриц-функций (м.-ф.). Статью можно рассматривать как продолжение работ [1 – 3], в которых исследована усеченная задача Неванлинны – Пика для стильтьесовских м.-ф.

При исследовании применяются многие приемы, восходящие к методу В. П. Потапова решения интерполяционных задач в классах аналитических м.-ф. (см. [4, 5]). Однако интерполяция в классе стильтъесовских м.-ф. имеет ряд специфических особенностей по сравнению с интерполяцией в классе неванлинновских м.-ф. Это особенно касается задач с бесконечным числом узлов интерполяции. Для исследования таких задач пришлось ввести объекты, которые не имеют аналогов в интерполяционной теории для неванлинновских м.-ф. Примерами таких объектов являются экстремальные решения, интервалы Вейля, семейства рациональных м.-ф., ортогональных на полуоси по различным матричным мерам, специфические нормировки резольвентных матриц и т. д. Именно в этих терминах в статье получены критерии неопределенности, указана естественная нормировка резольвентных матриц усеченных задач и дано описание всех решений неопределенной интерполяционной задачи с бесконечным числом узлов интерполяции.

Пусть дано целое число $m \geq 1$. Символом $\mathbb{C}^{m\times m}$ обозначим множество комплексных квадратных матриц m-го порядка, символом $\mathbb{C}_H^{m\times m}$ — множество эрмитовых матриц m-го порядка, символом $\mathbb{C}_{\geq}^{m\times m}$ — множество эрмитовых неотрицательных матриц m-го порядка, а символом $\mathbb{C}_{>}^{m\times m}$ — множество эрмитовых строго положительных матриц m-го порядка. Кроме того, введем обозначения $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$, $\mathbb{R}_- = \{t \in \mathbb{R} : t < 0\}$, $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$, $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \Im z < 0\}$, $\mathbb{C}_\pm = \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$.

Определение 1. *Голоморфная м.-ф.* $s : \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}^{m\times m}$ *называется стильтьесовской, если*

$$\frac{s(z)-s^*(z)}{z-\bar{z}} \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}_\pm, \quad s(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_-. \tag{1}$$

Множество всех стильтъесовских м.-ф. обозначим символом $\mathcal{S}$.

Для любой м.-ф. $s \in \mathcal{S}$ существуют монотонно возрастающая м.-ф. $\sigma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}_H^{m\times m}$ и матрица $\gamma \in \mathbb{C}_{\geq}^{m\times m}$ такие, что

$$s(z) = \gamma + \int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{t-z}, \qquad \int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{t+1} \text{ — сходится.} \tag{2}$$

Для скалярного случая $m = 1$ интегральное представление (2) доказано в [6, с. 522 – 524]. Матричный случай $m > 1$ сводится к скалярному по схеме, изложенной в [7, с. 228 – 247].

Будем рассматривать задачу Неванлинны – Пика, в которой заданы попарно различные числа $\{z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots\} \subset \mathbb{C}_\pm$, $z_j \neq \bar{z}_k$, $j, k \geq 1$, и матрицы $\{s_1, s_2, \ldots, s_k, \ldots\} \subset \mathbb{C}^{m\times m}$. Требуется описать множество м.-ф. s таких, что

$$s(z_j) = s_j \quad \forall j \geq 1, \quad s \in \mathcal{S}. \tag{3}$$

Множество решений задачи (3) обозначим символом $\mathcal{F}_\infty$, множество узлов интерполяции — символом $\mathcal{Z}_\infty = \{z_j\}_{j=1}^\infty$, а множество комплексно-сопряженных точек — символом $\overline{\mathcal{Z}}_\infty = \{\bar{z}_j\}_{j=1}^\infty$.

Нас интересует неопределенный случай, когда задача (3) имеет бесконечно много решений. Поэтому считаем, что выполнено необходимое условие неопределенности — предельные точки последовательности $\mathcal{Z}_\infty$ принадлежат множеству $\mathbb{R}_+ \bigcup \{\infty\}$.

Вместе с задачей (3) с бесконечным числом узлов интерполяции будем рассматривать и усеченные задачи Неванлинны – Пика. В таких задачах фиксируется число $k \geq 1$ и требуется описать множество м.-ф. $s \in \mathcal{S}$ таких, что

$$s(z_j) = s_j, \quad 1 \leq j \leq k. \tag{4}$$

Множество всех решений задачи (4) обозначим символом $\mathcal{F}_k$. Ясно, что $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{k=1}^\infty \mathcal{F}_k$. Множество узлов интерполяции усеченной задачи обозначим символом $\mathcal{Z}_k = \{z_j\}_{j=1}^k$, а множество комплексно-сопряженных точек — символом $\overline{\mathcal{Z}}_k = \{\bar{z}_j\}_{j=1}^k$.

В этой статье задача Неванлинны – Пика (3) исследована как предельная для семейства усеченных задач (4) и получены следующие основные результаты.

1. Установлен критерий неопределенности задачи (3) в терминах интерполяционных данных (теорема 6).

2. С задачей (3) связаны два семейства ортогональных рациональных м.-ф. (см. (35) и (36)). Установлен критерий неопределенности задачи (3) в терминах ортогональных рациональных м.-ф. (теорема (8)).

3. Указана нормировка резольвентных матриц усеченных задач (4), которая, в неопределенном случае, обеспечивает сходимость последовательности резольвентных матриц усеченных задач к резольвентной матрице задачи (3) (теорема 9).

4. Дано описание всех решений неопределенной проблемы (3) (теорема 11).

2. Экстремальные решения задачи Неванлинны – Пика. Интервалы Вейля. С усеченной задачей (4) свяжем следующие блок-матрицы (каждый блок является матрицей размерности $m \times m$ и каждая блок-матрица имеет km строк):

$$T = \operatorname{diag}\{z_1^{-1}I, \ldots, z_k^{-1}I\}, \quad u_1 = \operatorname{col}\{s_1, \ldots, s_k\}, \quad u_2 = T^{-1}\operatorname{col}\{s_1, \ldots, s_k\},$$

$$v = \operatorname{col}\{I, \ldots, I\}, \quad R_T(z) = (I - zT)^{-1},$$

$$K_r = T^{-1}\left\{\frac{z_i^{r-1}s_i - \bar{z}_j^{r-1}s_j^*}{z_i - \bar{z}_j}\right\}_{i,j=1,\ldots,k} T^{-1^*}, \quad r = 1, 2.$$

Очевидно, что имеют место тождества

$$TK_2 - K_1 = vu_2^*, \quad u_1 = Tu_2, \quad R_T(z)T = TR_T(z). \tag{5}$$

Определение 2. *Усеченная k-я задача Неванлинны – Пика* (4) *называется неопределенной, если выполнены условия* $K_1 > 0$, $K_2 > 0$.

Предположим, что все задачи (4) являются неопределенными. С каждой задачей (4) свяжем две рациональные м.-ф. U_1, $U_2 : \mathbb{C}\setminus\overline{Z}_k \to \mathbb{C}^{2m\times 2m}$:

$$U_1(z) = \begin{bmatrix} I + zv^*R_{T^*}(z)K_2^{-1}u_2 & -zv^*R_{T^*}(z)K_1^{-1}v \\ u_2^*R_{T^*}(z)K_2^{-1}u_2 & I - zu_1^*R_{T^*}(z)K_1^{-1}v \end{bmatrix}, \tag{6}$$

$$U_2(z) = \begin{bmatrix} I + zv^*R_{T^*}(z)K_2^{-1}u_2 & -v^*R_{T^*}(z)K_1^{-1}v \\ zu_2^*R_{T^*}(z)K_2^{-1}u_2 & I - zu_1^*R_{T^*}(z)K_1^{-1}v \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Здесь и в дальнейшем $R_{T^*}(z) = (I - zT^*)^{-1}$.

Определение 3. *Матрица-функция* U_1 *называется резольвентной матрицей усеченной неопределенной задачи Неванлинны – Пика* (4).

Введем разбиение резольвентной матрицы U_1 на четыре блока размерности $m \times m$

$$U_1(z) = \begin{bmatrix} \alpha(z) & \beta(z) \\ \gamma(z) & \delta(z) \end{bmatrix} \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\overline{Z}_k. \tag{8}$$

Можно доказать, что матрицы $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$, $\delta(z)$ невырождены для всех $z \in \mathbb{C}\setminus\{\mathbb{R}_+ \cup Z_k \cup \overline{Z}_k\}$. Непосредственные вычисления с использованием (5) приводят к следующим выражениям для J-форм м.-ф. U_1 и U_2:

$$J - U_r(z)JU_r^*(\lambda) = i(z - \overline{\lambda})\begin{bmatrix} v^* \\ u_r^* \end{bmatrix} R_{T^*}(z)K_r^{-1}R_{T^*}^*(\lambda)[v, u_r],$$

$$J = \begin{bmatrix} 0_{m\times m} & -iI_{m\times m} \\ iI_{m\times m} & 0_{m\times m} \end{bmatrix}, \quad r = 1, 2. \tag{9}$$

Умножим последнее равенство справа на J и подставим в него $\overline{z}$ вместо λ. Используя очевидное равенство $J^2 = I$, приходим к принципу симметрии

$$U_r^{-1}(z) = JU_r^*(\overline{z})J, \quad r = 1, 2.$$

Подставим в (9) $\overline{z}$ вместо z и λ и умножим (9) слева и справа на J. Из принципа симметрии и очевидного равенства $R_{T^*}^*(\overline{z}) = R_T(z)$ следует

$$J - U_r^{-1^*}(z)JU_r^{-1}(z) = i(\overline{z} - z)J\begin{bmatrix} v^* \\ u_r^* \end{bmatrix} R_T^*(z)K_r^{-1}R_T(z)[v, u_r]J. \tag{10}$$

Непосредственные вычисления с использованием (5) приводят к следующему выражению для J_π-формы м.-ф. U_1:

$$U_1(z)J_\pi U_1^*(z) - J_\pi =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha(z)\beta^*(z) + \beta(z)\alpha^*(z) & -I + \alpha(z)\delta^*(z) + \beta(z)\gamma^*(z) \\ -I + \gamma(z)\beta^*(z) + \delta(z)\alpha^*(z) & \gamma(z)\delta^*(z) + \delta(z)\gamma^*(z) \end{bmatrix} =$$

$$= -(z + \overline{z})\begin{bmatrix} v^* \\ u_1^* \end{bmatrix} R_{T^*}(z)K_1^{-1}R_{T^*}^*(z)[v, u_1] +$$

$$+\ 2\begin{bmatrix} zv^* \\ u_2^* \end{bmatrix} R_{T^*}(z) K_2^{-1} R_{T^*}^*(z)[\bar{z}v, u_2], \qquad J_\pi = \begin{bmatrix} 0_{m\times m} & I_{m\times m} \\ I_{m\times m} & 0_{m\times m} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Описание множества $\mathcal{F}_k$ в терминах матричных неравенств дается следующей теоремой (см. [1, 3, 8]).

Теорема 1. *Пусть м.-ф.* $s \in \mathcal{F}_k$, *а м.-ф.* U_1 *и* U_2 *определены формулами* (6) *и* (7). *Тогда для любого* $z \in \mathbb{C}_\pm \setminus \{\mathcal{Z}_k \cup \overline{\mathcal{Z}}_k\}$ *выполнены Основные Матричные Неравенства (ОМН) В. П. Потапова*

$$\left[I\,\bar{z}^{\,r-1} s^*(z)\right] \frac{U_r^{-1^*}(z) J\, U_r^{-1}(z)}{i\,(\bar{z}-z)} \begin{bmatrix} I \\ z^{\,r-1} s(z) \end{bmatrix} \geq 0, \qquad r = 1, 2. \tag{12}$$

Наоборот, пусть для некоторой голоморфной в $\mathbb{C}_+$ *м.-ф.* s *неравенства* (12) *выполняются хотя бы для* $z \in \mathbb{C}_+ \setminus \{\mathcal{Z}_k \cup \overline{\mathcal{Z}}_k\}$. *Тогда* s *допускает аналитическое продолжение до голоморфной в* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ *м.-ф. и* $s \in \mathcal{F}_k$.

Определение 4. *Пара м.-ф.* $\mathrm{col}\,[p(z)\ q(z)]$ *размерности* $m \times m$, *мероморфных в* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, *называется стильтьесовской, если для нее существует дискретное в* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ *множество точек* $\mathcal{D}_{pq}$ *такое, что*:

1) $p^*(z)\,p(z) + q^*(z)q(z) > 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup \mathcal{D}_{pq}\}$;

2) $[p^*(z), q^*(z)]\,\dfrac{J}{i(\bar{z}-z)} \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} \geq 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R} \cup \mathcal{D}_{pq}\}$;

3) $[p^*(z), q^*(z)]\, J_\pi \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} \geq 0, \quad z \in \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z < 0\} \setminus \mathcal{D}_{pq}$.

На множестве стильтьесовских пар введем отношение эквивалентности: пары $\mathrm{col}\,[p_1(z)\ q_1(z)]$ и $\mathrm{col}\,[p_2(z)\ q_2(z)]$ называются эквивалентными, если существует мероморфная и мероморфно обратимая в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ м.-ф. $Q(z)$ такая, что $p_1(z) = p_2(z)\,Q(z)$ и $q_1(z) = q_2(z)\,Q(z)$. Множество классов эквивалентности стильтьесовских пар обозначим через $\mathcal{S}_\infty$.

Описание множества $\mathcal{F}_k$ в терминах дробно-линейных преобразований дается следующей теоремой (см. [1, 9]).

Теорема 2. *Пусть усеченная задача* (4) *является неопределенной и резольвентная матрица* U_1 *разбита на четыре блока* α, β, γ, δ *размерности* $m \times$ $\times\, m$ (*см.* (8)). *Тогда формула*

$$s(z) = \{\gamma(z)\,p(z) + \delta(z)\,q(z)\}\,\{\alpha(z)\,p(z) + \beta(z)\,q(z)\}^{-1} \tag{13}$$

устанавливает биективное соответствие между $\mathcal{F}_k$ *и* $\mathcal{S}_\infty$.

Легко видеть, что пары $\mathrm{col}\,[I\,0]$ и $\mathrm{col}\,[0\,I]$ являются стильтьесовскими. Подставляя эти пары в дробно-линейное преобразование (13), получаем два экстремальных решения усеченной задачи Неванлинны – Пика

$$s_\mu(z) = \gamma(z)\,\alpha^{-1}(z) \in \mathcal{F}_k, \qquad s_M(z) = \delta(z)\,\beta^{-1}(z) \in \mathcal{F}_k. \tag{14}$$

Теорема 3. *Имеют место формулы* $(z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+)$

$$s_\mu(z) = u_2^*(K_2 - zK_1)^{-1} u_2, \qquad s_M(z) = \{v^*(TK_2T^* - zK_1)^{-1} v\}^{-1}. \tag{15}$$

Доказательство. Из равенства

$$u_2^*(K_2 - zK_1)^{-1} u_2 = u_2^* K_2^{-1/2}(I - zK_2^{-1/2} K_1 K_2^{-1/2})^{-1} K_2^{-1/2} u_2$$

и свойств резольвенты неотрицательной эрмитовой матрицы следует, что $s_\mu(z)$, определенная формулой (15), определена и голоморфна в $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$. Далее имеем

$$u_2^*(K_2-zK_1)^{-1}u_2\alpha(z) = u_2^*(K_2-zK_1)^{-1}u_2\{I+zv^*R_{T^*}(z)K_2^{-1}u_2\} =$$

$$= u_2^*(K_2-zK_1)^{-1}\{K_2(I-zT^*)+zu_2v^*\}R_{T^*}(z)K_2^{-1}u_2 =$$

$$= u_2^*(K_2-zK_1)^{-1}\{K_2(I-zT^*)+z(K_2T^*-K_1)\}R_{T^*}(z)K_2^{-1}u_2 =$$

$$= u_2^*(K_2-zK_1)^{-1}\{K_2-zK_1\}R_{T^*}(z)K_2^{-1}u_2 = u_2^*R_{T^*}(z)K_2^{-1}u_2 = \gamma(z).$$

В этой цепочке равенств первое вытекает из (8) и (6), третье — из (5), шестое — из (8) и (6). Таким образом, $s_\mu(z)=\gamma(z)\,\alpha^{-1}(z)=u_2^*\{K_2-zK_1\}^{-1}u_2$. Первое из равенств (15) доказано. Второе из равенств (15) доказывается аналогично.

Теорема 4. *Пусть дана неопределенная усеченная задача Неванлинны – Пика* (4), $\mathcal{F}_k$ *обозначает множество ее решений,* s_μ *и* s_M *— экстремальные решения. Тогда м.-ф.* $\{s_M(z)-s_\mu(z)\}^{-1}$ *определена и голоморфна в* $\mathbb{C}\setminus\{\mathbb{R}_+\cup Z_k\cup \overline{Z}_k\}$ *и*

$$\{s_M(z)-s_\mu(z)\}^{-1} = -zv^*R_{T^*}(z)K_1^{-1}R_T(z)v + z^2v^*R_{T^*}(z)K_2^{-1}R_T(z)v, \tag{16}$$

$$s_M(x) > s_\mu(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}_-, \tag{17}$$

$$s_\mu(x)\le s(x)\le s_M(x) \quad \forall s\in\mathcal{F}_k,\ \ \forall x\in\mathbb{R}_-. \tag{18}$$

Доказательство. Пусть $x\in\mathbb{R}_-$. Подставляя x в формулу (9) вместо z и λ, получаем $J-U_1(x)JU_1^*(x)=0$. Но тогда (см. [11]) и $J-U_1^*(x)JU_1(x)=0$. Отсюда и из (8) следует

$$\left[\begin{array}{c|c}-\alpha^*(x)\gamma(x)+\gamma^*(x)\alpha(x) & -\alpha^*(x)\delta(x)+\gamma^*(x)\beta\\ \hline -\beta^*(x)\gamma(x)+\delta^*(x)\alpha(x) & -\beta^*(x)\delta(x)+\delta^*(x)\beta(x)\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c}0 & -I\\ \hline I & 0\end{array}\right]. \tag{19}$$

Таким образом, $-\beta^*(x)\gamma(x)+\delta^*(x)\alpha(x)=I$. Из (1) имеем $s_M(x)=s_M^*(x)$. Поэтому

$$s_M(x)-s_\mu(x) = \beta^{-1^*}(x)\delta^*(x)-\gamma(x)\alpha^{-1}(x) =$$

$$= \beta^{-1^*}(x)\{\delta^*(x)\alpha(x)-\beta^*(x)\gamma(x)\}\alpha^{-1}(x) = \beta^{-1^*}(x)\alpha^{-1}(x). \tag{20}$$

Как уже отмечалось, рациональные м.-ф. $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ невырождены в $\mathbb{C}\setminus\{\mathbb{R}_+\cup Z_k\cup\overline{Z}_k\}$. Поэтому рациональные м.-ф. $\alpha^{-1}(z)$ и $\beta^{-1^*}(\overline{z})$ голоморфны в $\mathbb{C}\setminus\{\mathbb{R}_+\cup Z_k\cup\overline{Z}_k\}$. Из (20) следует, что и м.-ф. $\{s_M(z)-s_\mu(z)\}^{-1}$ голоморфна в $\mathbb{C}\setminus\{\mathbb{R}_+\cup Z_k\cup\overline{Z}_k\}$. Далее,

$$\{s_M(x)-s_\mu(x)\}^{-1} = \alpha(x)\beta^*(x) =$$

$$= -x\{I+xv^*R_{T^*}(x)K_2^{-1}u_2\}\ \{v^*K_1^{-1}R_T(x)v\} =$$

$$= -x\{v^*K_1^{-1}R_T(x)v + xv^*R_{T^*}(x)K_2^{-1}(-K_1+K_2T^*)K_1^{-1}R_T(x)v\} =$$

$$= -x\{v^*K_1^{-1}R_T(x)v - xv^*R_{T^*}(x)K_2^{-1}R_T(x)v + xv^*R_{T^*}(x)T^*K_1^{-1}R_T(x)v\} =$$

$$= -x\{v^*[I-xT^*+xT^*]R_{T^*}(x)K_1^{-1}R_T(x)v - xv^*R_{T^*}(x)K_2^{-1}R_T(x)v\} =$$

$$= -x\{v^* R_{T^*}(x) K_1^{-1} R_T(x) v - x v^* R_{T^*}(x) K_2^{-1} R_T(x) v\}.$$

Здесь второе равенство следует з (8) и (6), третье — из (5). Таким образом, при $x<0$

$$\{s_M(x) - s_\mu(x)\}^{-1} = -x\{v^* R_{T^*}(x) K_1^{-1} R_T(x) v - x v^* R_{T^*}(x) K_2^{-1} R_T(x) v\}.$$

Отсюда, в силу аналитичности, следует (16).

Неравенство (17) непосредственно следует из (16).

Докажем неравенства (18). Пусть м.-ф. $s \in \mathcal{F}_k$. Тогда она допускает представление (13) с стильтьесовской парой $\operatorname{col}[p\ q]$. Пусть $x \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{D}_{pq}$. Рассмотрим разность

$$s_M(x) - s(x) =$$

$$= \delta(x)\beta^{-1}(x) - \{\gamma(x)p(x) + \delta(x)q(x)\}\{\alpha(x)p(x) + \beta(x)q(x)\}^{-1} =$$

$$= \beta^{-1^*}(x)\,\delta^*(x) - \{\gamma(x)p(x) + \delta(x)q(x)\}\{\alpha(x)p(x) + \beta(x)q(x)\}^{-1} =$$

$$= \beta^{-1^*}(x)\,\{[\delta^*(x)\alpha(x) - \beta^*(x)\gamma(x)]p(x) + [\delta^*(x)\beta(x) - \beta^*(x)\delta(x)]q(x)\} \times$$

$$\times \{\alpha(x)p(x) + \beta(x)q(x)\}^{-1} = \beta^{-1^*}(x)p(x)\{\alpha(x)p(x) + \beta(x)q(x)\}^{-1}.$$

Здесь второе равенство следует из (1), а последнее — из (19). Окончательно

$$s_M(x) - s(x) = \beta^{-1^*}(x)p(x)\{\alpha(x)p(x) + \beta(x)q(x)\}^{-1}.$$

Таким образом, разность $s_M(x) - s(x)$ представлена в виде дробно-линейного преобразования, матрица которого

$$\tilde{U}(x) = \begin{bmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ \beta^{-1^*}(x) & 0 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что ее J_π-форма имеет вид

$$\tilde{U}^*(x) J_\pi \tilde{U}(x) - J_\pi = \begin{bmatrix} \beta^{-1}(x)[\beta(x)\alpha^*(x) + \alpha(x)\beta^*(x)]\beta^{-1^*}(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Из (11) следует $U_1(x) J_\pi U_1^*(x) - J_\pi \geq 0$. Тогда снова из (11) имеем $\beta(x)\alpha^*(x) + \alpha(x)\beta^*(x) \geq 0$. Поэтому $\tilde{U}^*(x) J_\pi \tilde{U}(x) \geq J_\pi$. С учетом этого неравенства получаем

$$[p^*(x)\alpha^*(x) + q^*(x)\beta^*(x),\ p^*(x)\beta^{-1}(x)] J_\pi \begin{bmatrix} \alpha(x)p(x) + \beta(x)q(x) \\ \beta^{-1^*}(x)p(x) \end{bmatrix} =$$

$$= [p^*(x, q^*(x))] \begin{bmatrix} \alpha^*(x) & \beta^{-1}(x) \\ \beta^*(x) & 0 \end{bmatrix} J_\pi \begin{bmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ \beta^{-1^*}(x) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(x) \\ q(x) \end{bmatrix} =$$

$$= [p^*(x, q^*(x))] \tilde{U}^*(x) J_\pi \tilde{U}(x) \begin{bmatrix} p(x) \\ q(x) \end{bmatrix} \geq [p^*(x, q^*(x))] J_\pi \begin{bmatrix} p(x) \\ q(x) \end{bmatrix} \geq 0.$$

Последнее неравенство вытекает из определения 4. Таким образом,

$$[p^*(x)\alpha^*(x) + q^*(x)\beta^*(x),\ p^*(x)\beta^{-1}(x)] J_\pi \begin{bmatrix} \alpha(x)p(x) + \beta(x)q(x) \\ \beta^{-1^*}(x)p(x) \end{bmatrix} \geq 0.$$

Умножая это неравенство справа на матрицу $\{\alpha(x)p(x)+\beta(x)q(x)\}^{-1}$, а слева — на сопряженную матрицу, получаем

$$[I,\, s_M^*(x)-s^*(x)]J_\pi \begin{bmatrix} I \\ s_M(x)-s(x) \end{bmatrix} \geq 0,$$

или с учетом вида матрицы J_π и эрмитовости $s_M(x)$ и $s(x)$ (см. (1))

$$s_M^*(x) - s^*(x) + s_M(x) - s(x) = 2(s_M(x) - s(x)) \geq 0.$$

Это неравенство продолжается в точки $x \in \mathbb{R}_- \cap \mathcal{D}_{pq}$ по непрерывности. Неравенство $s_\mu(x) \leq s(x)$ доказывается аналогично.

Теорема доказана.

Определение 5. *Пусть матрицы* $A, B \in \mathbb{C}_>^{m\times m}$ *и выполнено условие* $A \leq B$. *Матричным интервалом называется*

$$[A, B] = \left\{\kappa \in \mathbb{C}_H^{m\times m} : A \leq \kappa \leq B\right\}.$$

Матричный интервал $[A, B]$ *называется невырожденным, если* $A < B$.

Пусть некоторая точка $x \in \mathbb{R}_-$. *Матричный интервал* $\mathfrak{T}(x_0) = [s_\mu(x_0),$ $s_M(x_0)]$ *называется интервалом Вейля.*

Неравенство (18) означает, что $\{s(x_0) : s \in \mathcal{F}_k\} \subset \mathfrak{T}(x_0)$. Можно доказать, что $\{s(x_0) : s \in \mathcal{F}_k\} = \mathfrak{T}(x_0)$.

3. Предельные интервалы Вейля. Исследуем свойства введенных выше объектов при изменяющихся k. Для этого в обозначения объектов введем верхний индекс (k), который будет указывать, что соответствующие интервалы Вейля, резольвентные матрицы и т. д. связаны с усеченной k-й задачей (4).

Пусть даны целые числа $k_2 > k_1 > 0$. Из очевидного включения $\mathcal{F}_{k_2} \subset \mathcal{F}_{k_1}$ следует, что

$$\mathfrak{T}^{(k_2)}(x_0) \subset \mathfrak{T}^{(k_1)}(x_0) \qquad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}_-. \tag{21}$$

Теорема 5. *Пусть при любом* $k > 0$ *задача* (4) *является неопределенной,* $\mathcal{F}_k$ *обозначает множество ее решений,* $s_\mu^{(k)}$ *и* $s_M^{(k)}$ *— соответствующие экстремальные м.-ф. Тогда*:

1) *существуют пределы*

$$\lim_{k\to+\infty} s_M^{(k)}(x) > 0, \qquad \lim_{k\to+\infty} s_\mu^{(k)}(x) > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_-; \tag{22}$$

2) *существуют равномерные на компактах* $K \subset \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ *пределы*

$$s_M^{(\infty)}(z) := \lim_{k\to+\infty} s_M^{(k)}(z), \qquad s_\mu^{(\infty)}(z) := \lim_{k\to+\infty} s_\mu^{(k)}(z); \tag{23}$$

3) $s_M^{(\infty)},\ s_\mu^{(\infty)} \in \mathcal{F}_\infty$; (24)

4) $s_\mu^{(\infty)}(x) \leq s_M^{(\infty)}(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}_-$;

5) *выполняются неравенства*

$$s_\mu^{(\infty)}(x) \leq s(x) \leq s_M^{(\infty)}(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}_-, \quad \forall\, s \in \mathcal{F}_\infty. \tag{25}$$

Доказательство. 1. Из включения $\mathfrak{T}^{(k_2)}(x) \subset \mathfrak{T}^{(k_1)}(x)$ $\forall\, x \in \mathbb{R}_-$, $k_2 > k_1 > 0$ (см. (21)) вытекает неравенство $s_M^{(k_2)}(x) \leq s_M^{(k_1)}(x)$. Поэтому в каждой точке

$x \in \mathbb{R}_-$ последовательность эрмитовых матриц $\{s_M^{(k)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ монотонно убывает и ограничена снизу строго положительной матрицей $s_\mu^{(1)}(x)$. Отсюда следует, что существует предел $\lim_{k\to+\infty} s_M^{(k)}(x) > 0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}_-$. Существование второго предела в (22) доказывается аналогично.

2. Покажем, что последовательность м.-ф. $\{s_M^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно ограничена на компактах из $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$. При фиксированном $x \in \mathbb{R}_-$ сходящаяся матричная последовательность $\{s_M^{(k)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена. Отсюда и из представления м.-ф. $s_M^{(k)}$ в виде (2) последовательно получаем ограниченность семейства $\{s_M^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ на компактах из левой, верхней и нижней полуплоскостей [11, с. 32]. Но тогда рассматриваемое семейство ограничено и на произвольном компакте из $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$.

Пусть теперь K — произвольный компакт из $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$. Обозначим через Ω односвязную открытую область с гладкой границей такую, что:

а) $K \subset \Omega$;

б) замыкание Ω является компактом в $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$;

в) область Ω содержит некоторый интервал $(a, b) \subset \mathbb{R}_-$.

Последовательность м.-ф. $\{s_M^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно ограничена в замыкании области Ω, а значит, и в самой области Ω. Последовательность матриц $\{s_M^{(k)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится для любого $x \in (a, b)$. Согласно теореме Витали последовательность м.-ф. $\{s_M^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится при $z \in K$. Итак, доказано существование первого из пределов в (23). Аналогично доказывается существование второго предела в (23).

3. Пусть зафиксировано целое число $k > 0$ и $l > k$. Тогда $s_M^{(l)} \in \mathcal{F}_k$ и, следовательно, выполнена система ОМН В. П. Потапова

$$\left[I\,\bar{z}^{r-1} s_M^{(l)^*}(z)\right] \frac{U_r^{(k)^{-1^*}}(z)\, J\, U_r^{(k)^{-1}}(z)}{i(\bar{z}-z)} \begin{bmatrix} I \\ z^{r-1} s_M^{(l)}(z) \end{bmatrix} \geq 0, \quad z \in \mathbb{C}_\pm, \quad r = 1, 2.$$

Переходя в этих неравенствах к пределу $l \to \infty$, получаем $s_M^{(\infty)} \in \mathcal{F}_k$. В силу произвольности k отсюда следует, что $s_M^{(\infty)} \in \mathcal{F}_\infty$. Утверждение относительно $s_\mu^{(\infty)}$ доказывается аналогичным образом.

4. В неравенстве $s_\mu^{(k)}(x) < s_M^{(k)}(x) \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}_-$ перейдем к пределу $k \to \infty$.

5. Пусть задана некоторая м.-ф. $s \in \mathcal{F}_\infty$. Ясно, что $s \in \mathcal{F}_k \;\; \forall\, k > 0$. Согласно теореме 4 имеют место неравенства $s_\mu^{(k)}(x) \leq s(x) \leq s_M^{(k)}(x)$. Переходя к пределу $k \to \infty$, получаем (25).

Теорема доказана.

Пусть некоторая точка $x \in \mathbb{R}_-$. Матричный интервал

$$\mathfrak{T}^{(\infty)}(x) = \left[s_\mu^{(\infty)}(x),\, s_M^{(\infty)}(x)\right]$$

называется *предельным интервалом Вейля.* Из (25) следует включение $\{s(x) : s \in \mathcal{F}_\infty\} \subset \mathfrak{T}^{(\infty)}(x)$. Можно доказать, что $\{s(x) : s \in \mathcal{F}_\infty\} = \mathfrak{T}^{(\infty)}(x)$.

4. Критерий неопределенности задачи Неванлинны – Пика.

Лемма 1. *Пусть дана неопределенная усеченная задача* (4) *и* $U_1^{(k)}$ *обозначает ее резольвентную матрицу, а* $s_\mu^{(k)}$ *и* $s_M^{(k)}$ *— соответствующие экстремальные решения. Тогда для всех* $x \in \mathbb{R}_-$ *имеем*

$$U_r^{(k)}(x)J_\pi U_1^{(k)^*}(x) - J_\pi =$$
$$= 2\begin{bmatrix} I & 0 \\ s_\mu^{(k)}(x) & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (s_M^{(k)}(x) - s_\mu^{(k)}(x))^{-1} & 0 \\ 0 & s_\mu^{(k)}(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & s_\mu^{(k)}(x) \\ 0 & I \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Доказательство. Для упрощения записи верхний индекс (k) опускаем. Имеем

$$U_1(x) = \begin{bmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ \gamma(x) & \delta(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & I \\ \gamma(x)\alpha^{-1}(x) & \delta(x)\beta^{-1}(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha(x) & 0 \\ 0 & \beta(x) \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} I & I \\ s_\mu(x) & s_M(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha(x)\beta^*(x) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta^{*^{-1}}(x) & 0 \\ 0 & \beta(x) \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} I & I \\ s_\mu(x) & s_M(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (s_M(x) - s_\mu(x))^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta^{*^{-1}}(x) & 0 \\ 0 & \beta(x) \end{bmatrix}.$$

В этой цепочке равенств третье следует из (14), а четвертое — из (20). Далее (для упрощения обозначений аргумент x опускаем)

$$U_1 J_\pi U_1^* - J_\pi = \begin{bmatrix} I & I \\ s_\mu & s_M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (s_M - s_\mu)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta^{*^{-1}} & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} J_\pi \times$$
$$\times \begin{bmatrix} \beta^{-1} & 0 \\ 0 & \beta^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (s_M - s_\mu)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & s_\mu \\ I & s_M \end{bmatrix} - J_\pi =$$
$$= \begin{bmatrix} I & I \\ s_\mu & s_M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (s_M - s_\mu)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} J_\pi \begin{bmatrix} (s_M - s_\mu)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & s_\mu \\ I & s_M \end{bmatrix} - J_\pi =$$
$$= \begin{bmatrix} 2(s_M - s_\mu)^{-1} & 2(s_M - s_\mu)^{-1}s_\mu \\ 2s_\mu(s_M - s_\mu)^{-1} & s_\mu(s_M - s_\mu)^{-1}s_M + s_M(s_M - s_\mu)^{-1}s_\mu \end{bmatrix} =$$
$$= 2\begin{bmatrix} (s_M - s_\mu)^{-1} & (s_M - s_\mu)^{-1}s_\mu \\ s_\mu(s_M - s_\mu)^{-1} & (s_\mu^{-1} - s_M^{-1})^{-1} \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} (s_M - s_\mu)^{-1} & (s_M - s_\mu)^{-1}s_\mu \\ s_\mu(s_M - s_\mu)^{-1} & s_\mu(s_M - s_\mu)^{-1}s_M \end{bmatrix} =$$
$$= 2\begin{bmatrix} (s_M - s_\mu)^{-1} & (s_M - s_\mu)^{-1}s_\mu \\ s_\mu(s_M - s_\mu)^{-1} & s_\mu(s_M - s_\mu)^{-1}s_\mu + s_\mu \end{bmatrix} =$$
$$= 2\begin{bmatrix} I & 0 \\ s_\mu & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (s_M - s_\mu)^{-1} & 0 \\ 0 & s_\mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & s_\mu \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Лемма доказана.

В дальнейшем будем использовать известное свойство

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} > 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}^{-1} \geq \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Лемма 2. *Пусть* $s_M^{(\infty)}, s_\mu^{(\infty)} \in \mathcal{F}_\infty$. *Тогда для всех* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_-$ *имеет место равенство*

$$\operatorname{rank}\{s_M^{(\infty)}(x_1) - s_\mu^{(\infty)}(x_1)\} = \operatorname{rank}\{s_M^{(\infty)}(x_2) - s_\mu^{(\infty)}(x_2)\}. \tag{28}$$

Доказательство. Из (27) вытекают неравенства

$$[K_r^{(k)}]^{-1} \ge \left[\begin{array}{c|c} [K_r^{(k-1)}]^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right], \quad r = 1, 2. \tag{29}$$

Отсюда и из (11) следует

$$U_1^{(k+1)}(z) J_\pi U_1^{(k+1)^*}(z) - J_\pi \ge U_1^{(k)}(z) J_\pi U_1^{(k)^*}(z) - J_\pi \ge 0, \quad k > 0, \quad \operatorname{Re} z < 0.$$

Согласно теореме С. А. Орлова [12, 13] существуют пределы

$$\Gamma(x) := \lim_{k\to\infty} [U_1^{(k)}(x) J_\pi U_1^{(k)^*}(x) - J_\pi]^{-1} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_-$$

и для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_-$

$$\operatorname{rank}\Gamma(x_1) = \operatorname{rank}\Gamma(x_2). \tag{30}$$

Из формулы (26) имеем $(\forall\, x \in \mathbb{R}_-)$

$$\Gamma(x) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} I & -s_\mu^{(\infty)}(x) \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_M^{(\infty)}(x) - s_\mu^{(\infty)}(x) & 0 \\ 0 & s_\mu^{(\infty)^{-1}}(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ -s_\mu^{(\infty)}(x) & I \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $\operatorname{rank}\Gamma(x) = \operatorname{rank}[s_M^{(\infty)}(x) - s_\mu^{(\infty)}(x)] + m$. Отсюда и из (30) следует (28).

Лемма доказана.

Определение 6. *Задача Неванлинны – Пика* (3) *называется неопределенной, если все предельные интервалы Вейля*

$$\mathcal{T}^{(\infty)}(x) = [s_\mu^{(\infty)}(x), s_M^{(\infty)}(x)] \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_-$$

являются невырожденными матричными интервалами.

Из этого определения и леммы 2 непосредственно вытекает следующая лемма.

Лемма 3. *Для того чтобы задача Неванлинны – Пика* (3) *была неопределенной, необходимо, чтобы при всех* $x \in \mathbb{R}_-$ *выполнялось неравенство*

$$s_\mu^{(\infty)}(x) < s_M^{(\infty)}(x), \tag{31}$$

и достаточно, чтобы неравенство (31) *выполнялось хотя бы для одного* $x \in \mathbb{R}_-$.

Другими словами, для неопределенности задачи (3) *необходимо, чтобы при всех* $x \in \mathbb{R}_-$ *предельные интервалы Вейля были невырождены, и достаточно, чтобы хотя бы для одного* $x \in \mathbb{R}_-$ *был невырожденным соответствующий предельный интервал Вейля.*

Теорема 6. *Для того чтобы задача Неванлинны – Пика* (3) *была неопределенной, необходимо, чтобы в любой фиксированной точке* $x \in \mathbb{R}_-$ *существовали пределы*

$$\begin{gathered} \lim_{k\to\infty} [-x_0 v^{(k)^*} R_{T^*}^{(k)}(x_0) K_1^{(k)^{-1}} R_T^{(k)}(x_0) v^{(k)}] > 0, \\ \lim_{k\to\infty} [x_0^2 v^{(k)^*} R_{T^*}^{(k)}(x_0) K_2^{(k)^{-1}} R_T^{(k)}(x_0) v^{(k)}] > 0, \end{gathered} \tag{32}$$

и достаточно, чтобы пределы в (32) *существовали хотя бы в одной точке* $x_0 \in \mathbb{R}_-$.

Доказательство. Из (29) следует, что положительно определенные матрицы

$$- x_0 \upsilon^{(k)^*} R_{T^*}^{(k)}(x_0) K_1^{(k)^{-1}} R_T^{(k)}(x_0) \upsilon^{(k)}, \qquad x_0^2 \upsilon^{(k)^*} R_{T^*}^{(k)}(x_0) K_2^{(k)^{-1}} R_T^{(k)}(x_0) \upsilon^{(k)}$$

монотонно возрастают с ростом k.

Пусть теперь задача Неванлинны – Пика (3) является неопределенной. Для k-й усеченной задачи (4) запишем (16) при $z = x_0 \in \boldsymbol{R}_-$:

$$\{s_M^{(k)}(x_0) - s_\mu^{(k)}(x_0)\}^{-1} = - x_0 \upsilon^{(k)^*} R_{T^*}^{(k)}(x_0) K_1^{(k)^{-1}} R_T^{(k)}(x_0) \upsilon^{(k)} + $$
$$+ x_0^2 \upsilon^{(k)^*} R_{T^*}^{(k)}(x_0) K_2^{(k)^{-1}} R_T^{(k)}(x_0) \upsilon^{(k)}. \tag{33}$$

Оба слагаемых в правой части последнего равенства являются положительно определенными матрицами и монотонно возрастают с ростом k. Левая часть, в силу неопределенности проблемы моментов, при $k \to +\infty$ стремится к положительно определенной матрице $\{s_M^{(\infty)}(x_0) - s_\mu^{(\infty)}(x_0)\}^{-1}$. Отсюда следует существование и строгая положительность пределов в (32).

Наоборот, пусть существуют и строго положительны оба предела в (32). Выполним теперь предельный переход $k \to +\infty$ в обеих частях равенства (33). Получим $\{s_M^{(\infty)}(x_0) - s_\mu^{(\infty)}(x_0)\}^{-1} > 0$. Таким образом, предельный интервал Вейля $\mathfrak{T}^{(\infty)}(x_0)$ — невырожденный и, следовательно, задача Неванлинны – Пика (3) является неопределенной.

Теорема доказана.

5. Ортогональные семейства рациональных м.-ф. Введем разбиение матриц $K_r^{(k)}$ на блоки вида

$$K_r^{(k)} = \left[\begin{array}{c|c} K_r^{(k-1)} & B_r^{(k)} \\ \hline B_r^{(k)^*} & C_r^{(k)} \end{array}\right], \quad r = 1, 2.$$

Как известно, обратная матрица допускает представление

$$K_r^{(k)^{-1}} = \begin{bmatrix} K_r^{(k-1)^{-1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} +$$
$$+ \begin{bmatrix} -K_r^{(k-1)^{-1}} B_r^{(k)} \\ I \end{bmatrix} (C_r^{(k)} - B_r^{(k)^*} K_r^{(k-1)^{-1}} B_r^{(k)})^{-1} [-B_r^{(k)^*} K_r^{(k-1)^{-1}} \; I], \quad r = 1, 2. \tag{34}$$

Рассмотрим два семейства рациональных м.-ф., ассоциированных с неопределенными усеченными задачами Неванлинны – Пика (4):

$$P_r^{(1)}(z) = K_r^{(1)^{-1/2}} R_{T^{(1)}}(z), \qquad P_r^{(k)}(z) = (C_r^{(k)} - B_r^{(k)^*} K_r^{(k-1)^{-1}} B_r^{(k)})^{-1/2} \times$$
$$\times [-B_r^{(k)^*} K_r^{(k-1)^{-1}} \; I] R_{T^{(k)}}(z) \upsilon^{(k)}, \quad k > 1, \quad r = 1, 2. \tag{35}$$

Теорема 7. *Пусть* $k, l \geq 1$, *м.-ф.* $s \in \mathcal{F}_{\max\{r,l\}}$ *и м.-ф.* σ *входит в интегральное представление* s *в виде* (2). *Тогда имеют место соотношения обобщенной ортогональности*

$$\int_0^\infty P_r^{(k)}(t) t^{r-1} d\sigma(t) P_l^{(l)^*}(t) = \begin{cases} I_{m\times m}, & k = l; \\ 0_{m\times m}, & k \neq l, \end{cases} \tag{36}$$
$$r = 1, 2.$$

Доказательство. Из интерполяционных условий (4) следует равенство

$$K_r^{(k)} = \int_0^\infty R_{T^{(k)}}(t)v^{(k)}t^{r-1}d\sigma(t)v^{(k)^*}R^*_{T^{(k)}}(t), \quad r = 1, 2. \tag{37}$$

Пусть $r=1$ и $k=l>1$. Тогда имеем

$$\int_0^\infty P_r^{(k)}(t)t^{r-1}d\sigma(t)P_r^{(k)^*}(t) =$$

$$= \int_0^\infty \left(C_r^{(k)} - B_r^{(k)^*}K_r^{(k-1)^{-1}}B_r^{(k)}\right)^{-1/2}\left[-B_r^{(k)^*}K_r^{(k-1)^{-1}}\,I\right]R_{T^{(k)}}(t)v^{(k)}d\sigma(t) \times$$

$$\times\ v^{(k)^*}R^*_{T^{(k)}}(t)\begin{bmatrix}-K_r^{(k-1)^{-1}}B_r^{(k)}\\ I\end{bmatrix}\left(C_r^{(k)} - B_r^{(k)^*}K_r^{(k-1)^{-1}}B_r^{(k)}\right)^{-1/2} =$$

$$= \left(C_r^{(k)} - B_r^{(k)^*}K_r^{(k-1)^{-1}}B_r^{(k)}\right)^{-1/2}\left[-B_r^{(k)^*}K_r^{(k-1)^{-1}}\,I\right]K_r^{(k)} \times$$

$$\times\begin{bmatrix}-K_r^{(k-1)^{-1}}B_r^{(k)}\\ I\end{bmatrix}\left(C_r^{(k)} - B_r^{(k)^*}K_r^{(k-1)^{-1}}B_r^{(k)}\right)^{-1/2} = \left(C_r^{(k)} - B_r^{(k)^*}K_r^{(k-1)^{-1}}B_r^{(k)}\right)^{-1/2} \times$$

$$\times\left(C_r^{(k)} - B_r^{(k)^*}K_r^{(k-1)^{-1}}B_r^{(k)}\right)\left(C_r^{(k)} - B_r^{(k)^*}K_r^{(k-1)^{-1}}B_r^{(k)}\right)^{-1/2} = I_{m\times m}.$$

В этой цепочке равенств второе равенство следует из (37).

Пусть теперь $k>l>1$. Имеем

$$\int_0^\infty P_r^{(k)}(t)t^{r-1}d\sigma(t)P_r^{(l)^*}(t) =$$

$$= \int_0^\infty \left(C_r^{(k)} - B_r^{(k)^*}K_r^{(k-1)^{-1}}B_r^{(k)}\right)^{-1/2}\left[-B_r^{(k)^*}K_r^{(k-1)^{-1}}\,I\right]R_{T^{(k)}}(t)v^{(k)}d\sigma(t) \times$$

$$\times\ v^{(l)^*}R^*_{T^{(l)}}(t)\begin{bmatrix}-K_r^{(l-1)^{-1}}B_r^{(l)}\\ I\end{bmatrix}\left(C_r^{(l)} - B_r^{(l)^*}K_r^{(l-1)^{-1}}B_r^{(l)}\right)^{-1/2} =$$

$$= \left(C_r^{(k)} - B_r^{(k)^*}K_r^{(k-1)^{-1}}B_r^{(k)}\right)^{-1/2}\left[-B_r^{(k)^*}K_r^{(k-1)^{-1}}\,I\right]K_r^{(k)} \times$$

$$\times\begin{bmatrix}I_{lm\times lm}\\ 0_{(k-l)m\times lm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-K_r^{(l-1)^{-1}}B_r^{(l)}\\ I\end{bmatrix}\left(C_r^{(l)} - B_r^{(l)^*}K_r^{(l-1)^{-1}}B_r^{(l)}\right)^{-1/2} = 0_{m\times m}.$$

Формулы (36) доказаны для случая $r=1$. При $r=2$ доказательство проводится аналогично.

Теорема 8. *Для того чтобы задача Неванлинны – Пика* (3) *была неопределенной, необходимо, чтобы при всех* $x_0\in\mathbb{R}_-$ *сходились ряды*

$$\sum_{j=1}^\infty P_1^{(j)^*}(x_0)P_1^{(j)}(x_0), \qquad \sum_{j=1}^\infty P_2^{(j)^*}(x_0)P_2^{(j)}(x_0), \tag{38}$$

и достаточно, чтобы ряды (38) *сходились хотя бы при одном* $x_0\in\mathbb{R}_-$.

Доказательство. Имеют место равенства

$$
\begin{aligned}
v^{(k)^*} R_T^{(k)^*}(x_0) K_1^{(k)^{-1}} R_T^{(k)}(x_0) v^{(k)} &= \sum_{j=1}^{k} P_1^{(j)^*}(x_0) P_1^{(j)}(x_0), \\
v^{(k)^*} R_T^{(k)^*}(x_0) K_2^{(k)^{-1}} R_T^{(k)}(x_0) v^{(k)} &= \sum_{j=1}^{k} P_2^{(j)^*}(x_0) P_2^{(j)}(x_0).
\end{aligned} \tag{39}
$$

Действительно,

$$
v^{(k)^*} R_T^{(k)^*}(x_0) K_1^{(k)^{-1}} R_T^{(k)}(x_0) v^{(k)} =
$$

$$
= v^{(k)^*} R_T^{(k)^*}(x_0) \left\{ \left[\begin{array}{c|c} K_r^{(k-1)^{-1}} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] + \begin{bmatrix} -K_r^{(k-1)^{-1}} B_r^{(k)} \\ I \end{bmatrix} \left(C_r^{(k)} - B_r^{(k)^*} K_r^{(k-1)^{-1}} B_r^{(k)} \right)^{-1} \times \right.
$$

$$
\left. \times \left[-B_r^{(k)^*} K_r^{(k-1)^{-1}} \; I \right] \right\} R_T^{(k)}(x_0) v^{(k)} =
$$

$$
= v^{(k-1)^*} R_T^{(k-1)^*}(x_0) K_1^{(k-1)^{-1}} R_T^{(k-1)}(x_0) v^{(k-1)} + v^{(k)^*} R_T^{(k)^*}(x_0) \times
$$

$$
\times \begin{bmatrix} -K_r^{(k-1)^{-1}} B_r^{(k)} \\ I \end{bmatrix} \left(C_r^{(k)} - B_r^{(k)^*} K_r^{(k-1)^{-1}} B_r^{(k)} \right)^{-1} \left[-B_r^{(k)^*} K_r^{(k-1)^{-1}} \; I \right] R_T^{(k)}(x_0) v^{(k)} =
$$

$$
= v^{(k-1)^*} R_T^{(k-1)^*}(x_0) K_1^{(k-1)^{-1}} R_T^{(k-1)}(x_0) v^{(k-1)} + P_1^{(k)^*}(x_0) P_1^{(k)}(x_0) = \ldots
$$

$$
\ldots = \sum_{j=1}^{k} P_1^{(j)^*}(x_0) P_1^{(j)}(x_0).
$$

Здесь мы воспользовались представлением (34). Доказано первое из равенств (39). Второе доказывается аналогично. Утверждение теоремы следует из (39) и теоремы 6.

6. Описание множества решений неопределенной задачи Неванлинны – Пика. Пусть дана неопределенная задача Неванлинны – Пика (3). Тогда неопределенными являются и все усеченные задачи (4). С каждой такой задачей мы связали две рациональные м.-ф. $U_1^{(k)}$ и $U_2^{(k)}$. Зафиксируем некоторую точку $x_0 \in \mathbb{R}_-$ и рассмотрим постоянную матрицу (см. разбиение (8))

$$
T^{(k)} = \begin{bmatrix} \beta^{(k)^*}(x_0) & 0 \\ 0 & \beta^{(k)^{-1}}(x_0) \end{bmatrix}.
$$

Теперь введем новую нормировку м.-ф. $U_1^{(k)}$ и $U_2^{(k)}$:

$$
\tilde{U}_1^{(k)}(z) = U_1^{(k)}(z) T^{(k)}, \qquad \tilde{U}_2^{(k)}(z) = U_2^{(k)}(z) T^{(k)}.
$$

Простой анализ доказательств показывает, что во всех наших рассуждениях можно заменить м.-ф. $U_1^{(k)}$ и $U_2^{(k)}$ на нормированные м.-ф. $\tilde{U}_1^{(k)}$ и $\tilde{U}_2^{(k)}$. В точке x_0 (см. доказательство леммы 1) имеем

$$
\tilde{U}_1^{(k)}(x_0) = \begin{bmatrix} I & I \\ s_\mu^{(k)}(x_0) & s_M^{(k)}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s_M^{(k)}(x_0) - s_\mu^{(k)}(x_0))^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \tag{40}
$$

Из (6) и (7) следует

$$U_2^{(k)}(z) = \begin{bmatrix} z^{-1}I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} U_1^{(k)}(z) \begin{bmatrix} zI & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \tag{41}$$

Заменим в этом равенстве z на x_0 и умножим обе части справа на $T^{(k)}$. После очевидных преобразований с учетом (40) получим

$$\tilde{U}_2^{(k)}(x_0) = \begin{bmatrix} I & x_0^{-1}I \\ x_0 s_\mu^{(k)}(x_0) & s_M^{(k)}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s_M^{(k)}(x_0) - s_\mu^{(k)}(x_0))^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Теорема 9. *Пусть дана неопределенная задача Неванлинны – Пика* (3). *Тогда существуют равномерные пределы на компактах* $K \subset \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup Z_\infty \cup \overline{Z}_\infty\}$ *нормированных последовательностей м.-ф.* $\{\tilde{U}_1^{(k)}\}_{k=1}^{+\infty}$ *и* $\{\tilde{U}_2^{(k)}\}_{k=1}^{+\infty}$:

$$U_1^{(\infty)}(z) := \lim_{k\to+\infty} \tilde{U}_1^{(k)}(z), \qquad U_2^{(\infty)}(z) := \lim_{k\to+\infty} \tilde{U}_2^{(k)}(z). \tag{42}$$

Более того, м.-ф. $U_1^{(\infty)}(z)$ *и* $U_2^{(\infty)}(z)$ *являются мероморфными и невырожденными в области* $\mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup Z_\infty \cup \overline{Z}_\infty\}$.

Доказательство. Мы предположили, что предельные точки множества узлов интерполяции Z_∞ принадлежат множеству $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Отсюда следует, что в некоторой окрестности точки x_0 голоморфны при всех $k \ge 1$ м.-ф. $\tilde{U}_1^{(k)}$. Из неопределенности задачи (3) и из формулы (40) следует, что последовательность матриц $\{\tilde{U}_1^{(k)}(x_0)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится при $k \to \infty$. Далее, из (9) и (11) следует, что м.-ф. $\tilde{U}_1^{(k)}$ являются J-сжимающими в верхней полуплоскости, J-растягивающими в нижней полуплоскости и J_π-сжимающими в левой полуплоскости. Отсюда и из общих свойств J-сжимающих (растягивающих) м.-ф. (см. [12, 14]) следуют утверждения теоремы, относящиеся к м.-ф. $U_1^{(\infty)}$. Легко видеть, что соотношения (41) остаются в силе, если в них м.-ф. $U_1^{(k)}$ и $U_2^{(k)}$ заменить нормированными м.-ф. $\tilde{U}_1^{(k)}$ и $\tilde{U}_2^{(k)}$ соответственно. Отсюда следуют утверждения теоремы, относящиеся к м.-ф. $U_2^{(\infty)}$.

Теорема 10. *Пусть м.-ф.* $s \in \mathcal{F}_\infty$, *а м.-ф.* $U_1^{(\infty)}$ *и* $U_2^{(\infty)}$ *определены в* (42). *Тогда для любого* $z \in \mathbb{C}_\pm \setminus \{Z_\infty \cup \overline{Z}_\infty\}$ *выполнены Основные Матричные Неравенства*

$$\left[I\,\bar{z}^{r-1} s^*(z) \right] \frac{U_r^{(\infty)^{-1^*}}(z) J U_r^{(\infty)^{-1}}(z)}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} I \\ z^{r-1} s(z) \end{bmatrix} \ge 0, \quad r = 1, 2. \tag{43}$$

Наоборот, пусть для некоторой голоморфной функции в $\mathbb{C}_+$ *м.-ф.* s *неравенства* (43) *выполняются хотя бы для* $z \in \mathbb{C}_+ \setminus \{Z_\infty \cup \overline{Z}_\infty\}$. *Тогда* s *допускает аналитическое продолжение в* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ *и* $s \in \mathcal{F}_\infty$.

Доказательство. Пусть $s \in \mathcal{F}_\infty$. Тогда для всех $k \ge 1$ м.-ф. $s \in \mathcal{F}_k$. По теореме 1 рассматриваемая м.-ф. s удовлетворяет системе ОМН

$$\left[I\,\bar{z}^{r-1} s^*(z) \right] \frac{\tilde{U}_r^{(k)^{-1^*}}(z) J \tilde{U}_r^{(k)^{-1}}(z)}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} I \\ z^{r-1} s(z) \end{bmatrix} \ge 0, \quad z \in \mathbb{C}_\pm \setminus \{Z_\infty \cup \overline{Z}_\infty\}.$$

Переходя к пределу $k \to \infty$, получаем неравенства (42).

Наоборот, пусть м.-ф. s голоморфна в $\mathbb{C}_+$ и удовлетворяет там системе ОМН (43). Из (10) и (27) вытекает неравенство $(l > k)$

$$\frac{\tilde{U}_r^{(k)^{-1*}}(z) J \tilde{U}_r^{(k)^{-1}}(z)}{i(\bar{z}-z)} \geq \frac{\tilde{U}_r^{(l)^{-1*}}(z) J \tilde{U}_r^{(l)^{-1}}(z)}{i(\bar{z}-z)}, \quad z \in \mathbb{C}_+ \setminus \{\mathcal{Z}_\infty \cup \overline{\mathcal{Z}}_\infty\}, \quad r = 1, 2.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $l \to \infty$, получаем

$$\frac{\tilde{U}_r^{(k)^{-1*}}(z) J \tilde{U}_r^{(k)^{-1}}(z)}{i(\bar{z}-z)} \geq \frac{U_r^{(\infty)^{-1*}}(z) J U_r^{(\infty)^{-1}}(z)}{i(\bar{z}-z)}, \quad r = 1, 2.$$

Умножим обе части последнего неравенства слева на матрицу $\left[I \, \bar{z}^{\,r-1} s^*(z)\right]$, а справа на сопряженную матрицу. С учетом (43) получим

$$\left[I \, \bar{z}^{\,r-1} s^*(z)\right] \frac{\tilde{U}_r^{(k)^{-1*}}(z) J \tilde{U}_r^{(k)^{-1}}(z)}{i(\bar{z}-z)} \begin{bmatrix} I \\ z^{r-1} s(z) \end{bmatrix} \geq 0, \quad r = 1, 2.$$

По теореме 1 $s \in \mathcal{F}_k$. В силу произвольности k имеем $s \in \mathcal{F}_\infty$.

Теорема доказана.

Теорема 11. *Пусть задача Неванлинны – Пика* (3) *является неопределенной и резольвентная матрица* $U_1^{(\infty)}$ *разбита на четыре блока* $\alpha^{(\infty)}$, $\beta^{(\infty)}$, $\gamma^{(\infty)}$, $\delta^{(\infty)}$ *размерности* $m \times m$. *Тогда формула*

$$s(z) = \{\gamma^{(\infty)}(z) p(z) + \delta^{(\infty)}(z) q(z)\} \{\alpha^{(\infty)}(z) p(z) + \beta^{(\infty)}(z) q(z)\}^{-1}$$

устанавливает биективное соответствие между $\mathcal{F}_\infty$ *и* $\mathcal{S}_\infty$.

1. *Дюкарев Ю. М., Кацнельсон В. Э.* Мультипликативные и аддитивные классы Стилтьеса аналитических матриц-функций и связанные с ними интерполяционные задачи // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1981. – Вып..36. – С. 13 – 27.
2. *Alpay D., Ball J., Gohberg I., Rodman L.* Interpolation in the Stieltjes class // Linear Algebra and its Appl. – 1994. – P. 485 – 521.
3. *Дюкарев Ю. М.* Общая схема решения интерполяционных задач в классе Стилтьеса, основанная на согласованных интегральных представлениях пар неотрицательных операторов. 1 // Мат. физика, анализ, геометрия. – 1999. – **6**, № 1/2. – С. 30 – 54.
4. *Ковалишина И. В., Потапов В. П.* Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны – Пика // Докл. АН АрмССР. – 1974. – **59**, вып. 1. – С. 17 – 22.
5. *Ковалишина И. В.* Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1983. – **47**, № 3. – С. 455 – 497.
6. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1973. – 552 с.
7. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – Харьков: Выща шк., 1977. – 316 с.
8. *Dyukarev Yu. M.* Integral representations of a pair of nonnegative operators and interpolations problems on the Stieltjes class // Operator Theory: Adv. and Appl. – 1997. – **95**. – P. 165 – 184.
9. *Дюкарев Ю. М., Чоке Риверо А. Е.* Степенная проблема моментов на компактном интервале // Мат. заметки. – 2001. – **69**, вып. 2. – С. 200 – 213.
10. *Потапов В. П.* Дробно-линейные преобразования матриц // Исследования по теории операторов и их приложениям (изд. В. А. Марченко). – Киев: Наук. думка, 1979. – С. 75 – 97.
11. *Donoghue W. F.* Monotone matrix functions and analytic continuation. – New York: Springer, 1974. – 182 p.
12. *Орлов С. А.* Гнездящиеся матричные круги, аналитически зависящие от параметра, и теоремы об инвариантности рангов радиусов предельных матричных кругов // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1976. – **40**, № 3. – С. 593 – 644.
13. *Потапов В. П.* К теории матричных кругов Вейля // Функцион. анализ и прикл. математика (изд. В. А. Марченко). – Киев: Наук. думка, 1982. – С. 113 – 121.
14. *Потапов В. П.* Мультипликативная структура J-растягивающих матриц-функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1955. – **4**. – С. 125 – 236.

Получено 10.10.2002