УДК 517.925.51

І. Є. Вітриченко (Нац. техн. ун-т України „КПІ", Київ)

КРИТИЧНІ ВИПАДКИ π-СТІЙКОСТІ НЕАВТОНОМНОГО КВАЗІЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ n-ГО ПОРЯДКУ

We obtain sufficient conditions of the π-stability of trivial solution of n-th order quasilinear equation.

Одержано достатні умови π-стійкості тривіального розв'язку квазілінійного рівняння n-го порядку.

1. Постановка задачі. Досліджується π-стійкість положення рівноваги, коли $t \uparrow \omega$, $\omega \le +\infty$, диференціального рівняння (д. р.) вигляду

$$y^{(n)} + \sum_{s=1}^{n-1} p_s(t) y^{(n-s)} + p_n(t) y = F\left[t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right], \tag{1}$$

де $t \in \Delta$, $\Delta \equiv [t_0, \omega[$, і виконуються умови:

1) $p_s : \Delta \mapsto \mathbb{C}$, $p_s \in \mathbb{C}_\Delta^h$, $h \in \mathbb{N}$, $s = \overline{1, n}$;

2) $F : \Delta \times \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}$, $\left|F(t, z_1, \ldots, z_n)\right| \le L\left(\sum_{s=1}^{n} |z_s|\right)^{1+\alpha}$, $L : \Delta \mapsto \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$,

$L \in \mathbb{C}_\Delta$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+ \equiv]0, +\infty[$.

При дослідженні існування сім'ї зникаючих при $t \uparrow \omega$ розв'язків д. р. (1) застосування класичного означення стійкості за Ляпуновим [1] не завжди обґрунтоване. Оскільки при цьому д. р. вищого порядку зводиться до диференціальної системи (д. с.), яка потім досліджується на стійкість, то це приводить до накладання жорстких умов мализни на похідні розв'язків даного д. р., що не обов'язково.

Тому далі поведінка розв'язків д. р. (1) та їх похідних порівнюється з заданою системою функцій $\pi_s : \Delta \mapsto \mathbb{R}_+$, $s = \overline{1, n}$ [2]. Такі задачі виникають, наприклад, у теорії розповсюдження хвиль [3].

Введемо наступні означення та позначення.

Означення 1. *Д. р.* (1) *має властивість* St_π, *коли* $t \uparrow \omega$, *якщо для будь-якого досить малого* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ *існують* $\delta_\varepsilon \in]0, \varepsilon[$, $T_\varepsilon \in \Delta$ *такі, що кожний його розв'язок* $y = y(t)$ *з початковою умовою* $\pi_1^{-1}(T_\varepsilon)|y(T_\varepsilon)| \le \delta_\varepsilon$, $\pi_s^{-1}(T_\varepsilon)\left|y^{(s-1)}(T_\varepsilon)\right| \le \delta_\varepsilon$, $s = \overline{2, n}$, *задовольняє нерівності* $\pi_1^{-1}(t)|y(t)| < \varepsilon$, $\pi_s^{-1}(t)\left|y^{(s-1)}(t)\right| < \varepsilon$, $s = \overline{2, n}$, *для всіх* $t \in [T_\varepsilon, \omega[$ *(локальна π-стійкість).*

Означення 2. *Д. р.* (1) *має властивість* $AsSt_\pi$, *коли* $t \uparrow \omega$, *якщо воно задовольняє означення* 1 *і* $\pi_1^{-1}(t) y(t) = o(1)$, $\pi_s^{-1}(t) y^{(s-1)}(t) = o(1)$, $t \uparrow \omega$, $s = \overline{2, n}$.

Означення 3. *Д. р.* (1) *має властивість* $G_\Delta St_\pi$, *коли* $t \uparrow \omega$, *якщо в означенні* 1 $T_\varepsilon = t_0$, *тобто* T_ε *не залежить від* ε *(глобальна π-стійкість).*

Означення 4. *Д. р.* (1) *має властивість* $G_\Delta AsSt_\pi$, *коли* $t \uparrow \omega$, *якщо воно задовольняє означення* 3 *і* $\pi_1^{-1}(t) y(t) = o(1)$, $\pi_s^{-1}(t) y^{(s-1)}(t) = o(1)$, $t \uparrow \omega$, $s = \overline{2, n}$.

$$\Lambda := \operatorname{maxi}\left\{f_s : \Delta \mapsto \mathbb{C}, s = \overline{1, n}\right\}, \quad \text{якщо} \quad \Lambda : \Delta \mapsto \mathbb{R}_+,$$

$$\Lambda^{-1} f_s = d_s + o(1), \quad t \uparrow \omega, \quad d_s \in \mathbb{C}, \quad s \in \overline{1, n},$$

© І. Є. ВІТРИЧЕНКО, 2004

$$|d_1| + \ldots + |d_n| > 0,$$

$$\mathbb{L}_\Delta := \left\{ f : \Delta \mapsto \mathbb{C}, \int^{\omega} |f| dt < +\infty \right\},$$

$$X = \operatorname{col}(x_1, \ldots, x_n), \quad Y = \operatorname{col}(y_1, \ldots, y_n), \quad X_{n_s} = \operatorname{col}\left(x_{1, n_s}, \ldots, x_{n_s, n_s}\right),$$

$$\|P\| \equiv \sum_{s, k=1}^{n-1} |p_{s,k}|, \quad P = \|p_{s,k}\|, \quad s, \ k = \overline{1, n},$$

$$\mathbb{S}(X, r_0) := \{ X : \|X\| \le r_0; r_0 \in \mathbb{R}_+ \}, \quad \mathbb{R}_- \equiv]-\infty, 0[.$$

Існування властивостей St_π, $G_\Delta St_\pi$ для д. р. (1) досліджується при наявності кратного нульового кореня рівняння вигляду

$$\det(P_0 - \lambda E) = 0,$$

$$P_0 = \begin{Vmatrix} -a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & b_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-2} & b_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} & b_{n-1} \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 & -c_4 & \cdots & -c_{n-2} & -c_{n-1} & -c_n \end{Vmatrix},$$

$$a_k = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi'_k}{\pi \pi_k}, \quad b_k = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_{k+1}}{\pi \pi_k},$$

$$c_k = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_{n-k+1} \pi_k}{\pi}, \quad c_n = \lim_{t \uparrow \omega} \pi^{-1} \left(p_1 + \frac{\pi'_n}{\pi_n} \right),$$

$$|a_k|, |b_k|, |c_k|, |c_n| \ne +\infty, \ k = \overline{1, n-1}, \quad \sum_{k=1}^{n-1} (|a_k| + |b_k| + |c_k|) + |c_n| > 0,$$

$$\pi \equiv \operatorname{maxi} \left\{ p_1 + \frac{\pi'_n}{\pi_n}, \frac{p_{n-k+1} \pi_k}{\pi_n}, \frac{\pi_{k+1}}{\pi_k}, \frac{\pi'_k}{\pi_k}; \ k = \overline{1, n-1} \right\}. \tag{2}$$

2. Допоміжні результати. Наведемо перетворення, які зводять д. р. (1) до д. с. спеціального вигляду.

Лема 1. *Якщо для заданого набору функцій* $\pi_k : \Delta \mapsto \mathbb{R}_+$, $\pi_k \in \mathbb{C}^1_\Delta$, $s = \overline{1, n}$, *і коефіцієнтів* $p = p_k$, $k = \overline{1, n}$, *д. р.* (1) *існує функція* π (2), *то перетворення*

$$y = \pi_1 y_1, \quad y^{(k)} = \pi_{k+1} y_{k+1}, \quad k = \overline{1, n-1}, \tag{3}$$

зводить д. р. (1) *до д. с. вигляду*

$$Y' = \pi(P_0 + P_1)Y + G, \tag{4}$$

де

$$P_1 \equiv P - P_0, \quad P = \|p_{sk}\|, \quad s,\ k = \overline{1, n}, \quad p_{ss} \equiv -\frac{\pi_s'}{\pi\pi_s}, \quad s = \overline{1, n-1},$$

$$p_{sk} \equiv 0, \quad s = \overline{2, n-1}, \quad 1 \le k \le s-1, \quad p_{s,s+1} \equiv \frac{\pi_{s+1}}{\pi\pi_s}, \quad s = \overline{1, n-1},$$

$$p_{sk} \equiv 0, \quad s = \overline{1, n-2}, \quad s+2 \le k \le n, \quad p_{ns} \equiv -\frac{p_{n-s+1}\pi_s}{\pi},$$

$$s = \overline{1, n-1}, \quad p_{nn} \equiv \pi^{-1}\left(p_1 + \frac{\pi_n'}{\pi_n}\right), \quad G \equiv \operatorname{col}\left(0, \ldots, 0, G^*\right),$$

$$G^* \equiv \pi_n^{-1} F(t, \pi_1 y_1, \pi_2 y_2, \ldots, \pi_n y_n),$$

$$\left\| G^* \right\| \le L\pi_n^{-1}\left(\sum_{s=1}^{n} \pi_s\right)^{1+\alpha} \| Y \|^{1+\alpha}.$$

Доведення очевидне.

Оскільки матриця P_0 має кратне нульове власне значення, то за умови $\left\| P_1^{(k)} \right\| = o(1)$, $t \uparrow \omega$, $k = \overline{1, h}$, методами узагальненого „зрізуючого" [4] і лінійного „замороженого" [5] перетворень можна побудувати [6] лінійну неособливу заміну

$$Y = HX, \tag{5}$$

де $\| H^{-1} \| < +\infty$, $t \in \Delta$, яка зводить д. с. (4) до д. с. вигляду

$$X_{n_s}' = \sigma_s\left(\mu_s X_{n_s} + P^* X\right) + \Phi_{n_s}, \quad s = \overline{1, k_0}, \tag{6}$$

де $\sigma_s : \Delta \mapsto \mathbb{R}_+$, $\mu_s \in \mathbb{C}$, $s = \overline{1, k_0}$, — відомі величини, що визначаються в процесі зведення д. с. (4) до д. с. (5), P^* — відома матриця, а нелінійності Φ_{n_s}, $s = \overline{1, k_0}$, задовольняють оцінку вигляду

$$\left\| \Phi_{n_s} \right\| \le L\pi_n^{-1}\left(\sum_{s=1}^{n} \pi_s\right)^{1+\alpha} \left\| H^{-1} \right\| \| H \|^{1+\alpha} \| X \|^{1+\alpha}, \quad s = \overline{1, k_0}.$$

Основні результати. Справедливими є наступні теореми.

Теорема 1. *Нехай д. р.* (1) *таке, що:*

1) *існують перетворення* (3), (5), *які зводять його до д. с.* (6);

2) *для всіх* $X^* \in \mathbb{S}(X, r_0)$, $T \in \Delta$ *існує розв'язок* $X = X\left(t; T, X^*\right)$ *задачі Коші для д. с.* (6);

3) $\sigma_s \in \mathbb{L}_\Delta$, $s = \overline{1, s_0}$, $\operatorname{Re}\mu_s \in \mathbb{R}_-$, $s = \overline{s_0 + 1, k_0}$, $s_0 = \left\{0, \overline{1, k_0}\right\}$;

4) $\sigma_s \left\| P^* \right\|$, $\| H \|^{1+\alpha} L\pi_n^{-1}\left(\sum_{s=1}^{n} \pi_s\right)^{1+\alpha} \in \mathbb{L}_\Delta$, $s = \overline{1, s_0}$, $I_s = o(1)$, $t \uparrow \omega$, $s = \overline{1 + s_0, k_0}$, *де*

$$I_s \equiv \exp\left(\operatorname{Re}\mu_s \int_T^t \sigma_s d\tau\right) \int_T^t \sigma_s \left\| P^* \right\| \exp\left(-\operatorname{Re}\mu_s \int_T^t \sigma_s dt\right) d\tau.$$

Тоді воно має властивість St_π, *коли* $t \uparrow \omega$.

Доведення. Розглянувши поряд з д. с. (6) допоміжну д. с. вигляду

$$X'_{n_s} = \sigma_s\left[\mu_s X_{n_s} + P^*\Theta(t)\right] + \Phi_{n_s}[t, \Theta(t)], \quad s = \overline{1, k_0},$$

де $\Theta = \Theta(t)$ — вектор, компонентами якого є неперервні так звані функції-варіації, застосуємо до неї принцип стійкості О. Перрона [6, 7].

***Наслідок* 1.** *Якщо д. р.* (1) *задовольняє умови* 1–3 *теореми* 1 *і*

$$\|H\|^{1+\alpha} L\pi_n^{-1}\left(\sum_{s=1}^{n}\pi_s\right)^{1+\alpha}, \quad \sigma_s\left\|P^*\right\| \in \mathbb{L}_\Delta, \ s = \overline{1, s_0},$$

$$\sigma_k\left\|P^*\right\| \in \mathbb{L}_\Delta \quad \text{або} \quad \left\|P^*\right\| = o(1), \quad t \uparrow \omega, \quad k = \overline{1+s_0, k_0},$$

то д. р. (1) *має властивість* St_π, *коли* $t \uparrow \omega$.

Доведення. До величин I_s, $s = \overline{1+s_0, k_0}$, застосовується оцінка з [8, с. 11] або правило Лопіталя.

Теорема 2. *Нехай д. р.* (1) *таке, що*:

1) *існують перетворення* (3), (5), *які зводять його до д. с.* (6);

2) *для всіх* $X^* \in \mathbb{S}(X, r_0)$, $T \in \Delta$ *існує розв'язок* $X = X\left(t; T, X^*\right)$ *задачі Коші для д. с.* (6);

3) $\operatorname{Re}\mu_s \in \mathbb{R}_-$, $s = \overline{1, k_0}$;

4) $J_s = o(1)$, $t \uparrow \omega$, $s = \overline{1, k_0}$, *де*

$$J_s \equiv$$

$$\equiv \exp\left(\operatorname{Re}\mu_s \int_T^t \sigma_s d\tau\right) \int_T^t \left[\|H\|^{1+\alpha} L\pi_n^{-1}\left(\sum_{s=1}^{n}\pi_s\right)^{1+\alpha} + \sigma_s\left\|P^*\right\|\right] \exp\left(-\operatorname{Re}\mu_s \int_T^t \sigma_s dt\right) d\tau.$$

Тоді воно має властивість $AsSt_\pi$, *коли* $t \uparrow \omega$.

Доведення. Як і при доведенні теореми 1, використовується принцип стійкості О. Перрона [6].

***Наслідок* 2.** *Якщо д. р.* (1) *задовольняє умови* 1–3 *теореми* 2 *і*

$$\|H\|^{1+\alpha} L\pi_n^{-1}\left(\sum_{s=1}^{n}\pi_s\right)^{1+\alpha}, \quad \sigma_s\left\|P^*\right\| \in \mathbb{L}_\Delta, \ s = \overline{1, s_0},$$

або

$$\left\|P^*\right\| = o(1), \quad \sigma^{-1}\|H\|^{1+\alpha} L\pi_n^{-1}\left(\sum_{s=1}^{n}\pi_s\right)^{1+\alpha} = o(1), \quad t \uparrow \omega, \quad s = \overline{1, k_0},$$

то воно має властивість $AsSt_\pi$, *коли* $t \uparrow \omega$.

Доведення аналогічне доведенню наслідку 1.

Теорема 3. *Нехай д. р.* (1) *таке, що*:

1) *існують перетворення* (3), (5), *які зводять його до д. с.* (6);

2) *для всіх* $X^* \in \mathbb{S}(X, r_0)$ *існує розв'язок* $X = X\left(t; t_0, X^*\right)$ *задачі Коші для д. с.* (6);

3) $\sigma_s \in \mathbb{L}_\Delta$, $s = \overline{1, s_0}$, $\operatorname{Re}\mu_s \in \mathbb{R}_-$, $s = \overline{s_0+1, k_0}$, $s = \left\{0, \overline{1, k_0}\right\}$;

4) $\sup\limits_{t \in \Delta} I_s^* < 1$, $s = \overline{1, k_0}$, *де*

$$I_s^* \equiv \exp\left(\operatorname{Re}\mu_s \int_{t_0}^t \sigma_s d\tau\right) \int_{t_0}^t \left[\left\|H^{-1}\right\|\|H\|^{1+\alpha} L\pi_n^{-1}\left(\sum_{s=1}^{n}\pi_s\right)^{1+\alpha} + \sigma_s\left\|P^*\right\|\right] \times$$

$$\times \exp\left(-\operatorname{Re}\mu_s \int\limits_{t_0}^{t} \sigma_s dt\right) d\tau.$$

Тоді воно має властивість $G_\Delta St_\pi$, *коли* $t \uparrow \omega$.

Доведення аналогічне доведенню теореми 1 з [6].

Наслідок 3. *Якщо д. р.* (1) *задовольняє умови* 1–3 *теореми* 3 *і*

$$a) \int\limits_{t_0}^{\omega} \left[\left\| H^{-1} \right\| \| H \|^{1+\alpha} L \pi_n^{-1} \left(\sum_{s=1}^{n} \pi_s \right)^{1+\alpha} + \sigma_s \left\| P^* \right\| \right] dt \; < \; \exp\left(-\operatorname{Re}\mu_s \int\limits_{t_0}^{\omega} \sigma_s dt\right) dt,$$

$$\operatorname{Re}\mu_s > 0,$$

$$\int\limits_{t_0}^{\omega} \left[\left\| H^{-1} \right\| \| H \|^{1+\alpha} L \pi_n^{-1} \left(\sum_{s=1}^{n} \pi_s \right)^{1+\alpha} + \sigma_s \left\| P^* \right\| \right] dt \; < \; 1, \quad \operatorname{Re}\mu_s < 0, \quad s = \overline{1, s_0};$$

$$б) \; \sup_{t \in \Delta} \left[\sigma_s^{-1} \left\| H^{-1} \right\| \| H \|^{1+\alpha} L \pi_n^{-1} \left(\sum_{s=1}^{n} \pi_s \right)^{1+\alpha} + \left\| P^* \right\| \right] < -\operatorname{Re}\mu_s, \quad s = \overline{s_0 + 1, k_0},$$

або

$$\int\limits_{t_0}^{\omega} \left[\left\| H^{-1} \right\| \| H \|^{1+\alpha} L \pi_n^{-1} \left(\sum_{s=1}^{n} \pi_s \right)^{1+\alpha} + \sigma_s \left\| P^* \right\| \right] dt \; < \; 1, \quad s = \overline{s_0 + 1, k_0},$$

то воно має властивість $G_\Delta St_\pi$, *коли* $t \uparrow \omega$.

Доведення аналогічне доведенню наслідку 1 з [6].

Теорема 4. *Нехай д. р.* (1) *таке, що*:

1) *існують перетворення* (3), (5), *які зводять його до д. с.* (6);

2) *для всіх* $X^* \in \mathbb{S}(X, r_0)$ *існує розв'язок* $X = X(t; t_0, X^*)$ *задачі Коші для д. с.* (6);

3) $\operatorname{Re}\mu_s \in \mathbb{R}_-$, $\int^{\omega} \sigma_s dt = +\infty$, $s = \overline{1, k_0}$;

4) *існує функція* $h : \Delta \mapsto \mathbb{R}_+$, $h \in C_\Delta^1$, *така, що* $h \| H \| \leq M_0$, $t \in \Delta$, $M_0 \in \mathbb{R}_+$, *і*

$$h'(\sigma_s h)^{-1} \; = \; h_s + o(1), \quad t \uparrow \omega, \quad h_s \in \{0\} \cup \mathbb{R}_-, \quad \operatorname{Re}\mu_s - h_s < 0, \quad s = \overline{1, k_0};$$

5) $\sup\limits_{t \in \Delta} J_s^* < 1$, $s = \overline{1, k_0}$, *де*

$$J_s^* \; \equiv \; \exp\left[(\operatorname{Re}\mu_s - h_s) \int\limits_{t_0}^{t} \sigma_s d\tau \right] \times$$

$$\times \int\limits_{t_0}^{t} \left[M_0^\alpha \left\| H^{-1} \right\| \| H \|^{1+\alpha} L \pi_n^{-1} \left(\sum_{s=1}^{n} \pi_s \right)^{1+\alpha} + \left| \sigma_s h_s - h' h^{-1} \right| + \sigma_s \left\| P^* \right\| \right] \times$$

$$\times \exp\left[(h_s - \operatorname{Re}\mu_s) \int\limits_{t_0}^{\tau} \sigma_s dt \right] d\tau.$$

Тоді воно має властивість $G_\Delta St_\pi$, *коли* $t \uparrow \omega$.

Доведення аналогічне доведенню теореми 2 з [6].

Наслідок 4. *Якщо д. р.* (1) *задовольняє умови* 1–4 *теореми* 4 *і*

$$\sup_{t\in\Delta}\left[M_0^\alpha \sigma_s^{-1}\|H^{-1}\|\|H\|^{1+\alpha}L\pi_n^{-1}\left(\sum_{s=1}^n \pi_s\right)^{1+\alpha} + \left|h_s - h'(\sigma_s h)^{-1}\right| + \|P^*\|\right] <$$
$$< h_s - \operatorname{Re}\mu_s,$$

або

$$\int_{t_0}^{\omega}\left[M_0^\alpha\|H^{-1}\|\|H\|^{1+\alpha}L\pi_n^{-1}\left(\sum_{s=1}^n \pi_s\right)^{1+\alpha} + \left|\sigma_s h_s - h'h^{-1}\right| + \sigma_s\|P^*\|\right]dt < 1,$$
$$s = \overline{1, k_0},$$

то воно має властивість $G_\Delta St_\pi$, *коли* $t \uparrow \omega$.

Доведення. До величин J_s^*, $s = \overline{1, k_0}$, застосовуються оцінки з наслі[д]ку 1 [6].

Теорема 5. *Нехай д. р.* (1) *таке, що*:

1) *існують перетворення* (3), (5), *які зводять його до д. с.* (6);

2) *для всіх* $X^* \in \mathbb{S}(X, r_0)$ *існує розв'язок* $X = X(t; t_0, X^*)$ *задачі Коші дл[я]* *д. с.* (6);

3) $\operatorname{Re}\mu_s \in \mathbb{R}_-$, $\int^{\omega}\sigma_s dt = +\infty$, $\sigma_1\sigma_s^{-1} = c_s + o_s(1)$, $t \uparrow \omega$, $c_s \in \{0, 1\}$, $s = \overline{1, k_0}$;

4) *існує стала* $\mu \in \left]0, -\operatorname{Re}\mu_1\right]$ *така, що* $\operatorname{Re}\mu_s + \mu c_s \equiv \nu_s \in \mathbb{R}_-$, $s = \overline{1, k_0}$;

5) $\sup_{t\in\Delta} J_s^{**} < 1$, $s = \overline{1, k_0}$, *де*

$$J_s^{**} \equiv \exp\left(\nu_s\int_{t_0}^{t}\sigma_s d\tau\right)\int_{t_0}^{t}\left[\exp\left(-\mu\alpha\int_{t_0}^{\tau}\sigma_1 dt\right)\|H^{-1}\|\|H\|^{1+\alpha}L\pi_n^{-1}\left(\sum_{s=1}^n\pi_s\right)^{1+\alpha} +\right.$$
$$\left. + \mu\sigma_s\left|\sigma_1\sigma_s^{-1} - c_s\right| + \sigma_s\|P^*\|\right]\exp\left(-\nu_s\int_{t_0}^{\tau}\sigma_s dt\right)d\tau.$$

Тоді воно має властивість $G_\Delta AsSt_\pi$, *коли* $t \uparrow \omega$.

Доведення. Для д. с. (6) виконаємо перетворення

$$X_{n_s} = \exp\left(-\mu\int_{t_0}^{t}\sigma_1 d\tau\right)Z_{n_s}, \qquad s = \overline{1, k_0},$$

і до одержаної стосовно Z_{n_s} д. с. застосуємо теорему 4, у якій

$$h \equiv \exp\left(-\mu\int_{t_0}^{t}\sigma_1 d\tau\right).$$

Наслідок 5. *Якщо д. р.* (1) *задовольняє умови* 1–4 *теореми* 5 *і*

$$\sup_{t\in\Delta}\left[\sigma_s^{-1}\exp\left(-\mu\alpha\int_{t_0}^{t}\sigma_1 d\tau\right)\|H^{-1}\|\|H\|^{1+\alpha}L\pi_n^{-1}\left(\sum_{s=1}^n\pi_s\right)^{1+\alpha} +\right.$$

$$+ \mu\left|\sigma_1\sigma_s^{-1} - c_s\right| + \left\|P^*\right\| \Bigg] < -\operatorname{Re}\nu_s,$$

або

$$\int\limits_{t_0}^{\omega} \left[\exp\left(-\mu\alpha\int\limits_{t_0}^{t}\sigma_1 d\tau\right) \left\|H^{-1}\right\| \left\|H\right\|^{1+\alpha} L\pi_n^{-1}\left(\sum_{s=1}^{n}\pi_s\right)^{1+\alpha} + \right.$$

$$\left. + \mu\left|\sigma_1 - \sigma_s c_s\right| + \sigma_s\left\|P^*\right\| \right] dt < 1, \quad s = \overline{1, k_0},$$

то воно має властивість $G_\Delta AsSt_\pi$, *коли* $t \uparrow \omega$.

Доведення. До величин J_s^{**}, $s = \overline{1, k_0}$, застосовуються оцінки з наслідку 1 [6].

Зауваження. Частковий випадок π-стійкості для д. р. другого порядку досліджено в [9].

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 471 с.
2. *Вітриченко І. Є.* Про критичні випадки π-стійкості одного неавтономного нелінійного рівняння n-го порядку // Диференціальні рівняння та нелінійні коливання: Укр. мат. конгрес-2001. – Київ, 2001. – С. 30–31.
3. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1983. – 352 с.
4. *Витриченко И. Е., Никоненко В. В.* О сведении к почти блок-треугольному (диагональному) виду линейной неавтономной системы в случае кратного нулевого собственного значения предельной матрицы коэффициентов // Proc. A. Razmadze Math. Ins. – 1994. – **110**. – P. 59–65.
5. *Витриченко И. Е., Костин А. В.* Обобщение теоремы Ляпунова об устойчивости в случае одного нулевого характеристического показателя для неавтономных систем // Докл. АН СССР. – 1982. – **264**, № 4. – С. 819–822.
6. *Вітриченко І. Є.* До глобальної стійкості неавтономної квазілінійної системи в одному критичному випадку // Нелінійні коливання. – 2000. – **3**, № 3. – С. 323–333.
7. *Perron O.* Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Z. – 1930. – **32**. – S. 703–728.
8. *Рапопорт И. М.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. – Киев: Изд-во АН УССР, 1954. – 290 с.
9. *Вітриченко І. Є.* Глобальна λ-стійкість одного неавтономного квазілінійного рівняння другого порядку // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 9. – С. 1172–1189.

Одержано 14.02.2003