УДК 517.929.7

Я. Й. Бігун (Чернів. нац. ун-т)

УСЕРЕДНЕННЯ КОЛИВНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ ТА ІНТЕГРАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

We prove the existence of a solution and obtain an estimate of error of the averaging method for multifrequency system with linearly transformed argument and integral boundary conditions.

Доведено існування розв'язку та одержано оцінку похибки методу усереднення для багаточастотної системи з лінійно перетвореним аргументом і інтегральними крайовими умовами.

Досліджується існування та єдиність розв'язку систем диференціальних рівнянь із запізненням у малому околі розв'язку відповідної усередненої за швидкими змінними системи. Як і в роботі [1], побудовано явно залежну від малого параметра оцінку похибки методу усереднення. Для точної й усередненої систем задано інтегральні крайові умови. Багатоточкові крайові задачі для таких систем розглядались у роботі [2].

Багаточастотні й одночастотні системи без запізнення з багатоточковими й інтегральними крайовими умовами вивчались у багатьох працях (див., наприклад, [3 – 5]). Диференціально-функціональні рівняння із крайовими умовами ґрунтовно досліджувались, наприклад, в [6, 7].

1. Постановка задачі і припущення. Нехай D — обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $L = \text{const} > 0$, ε — малий параметр, $\varepsilon \le \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$, $G = [0, L] \times D \times D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times [0, \varepsilon_0]$, $\tau = \varepsilon t \in [0, L]$, $\lambda, \theta \in (0, 1)$, $x_\lambda(\tau) = x(\lambda\tau)$, $\varphi_\theta(\tau) = \varphi(\theta\tau)$.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= X(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta, \varepsilon), \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta, \varepsilon) \end{aligned} \tag{1}$$

з інтегральними крайовими умовами

$$\int_0^L f_\nu(\tau, x(\tau, y, \psi, \varepsilon), x_\lambda(\tau, y, \psi, \varepsilon), \varphi(\tau, y, \psi, \varepsilon), \varphi_\theta(\tau, y, \psi, \varepsilon), \varepsilon)\, d\tau =$$

$$= a_\nu(\varepsilon), \qquad \nu = 1, \ldots, m + n. \tag{2}$$

Тут $X\colon G \to \mathbb{R}^n$, $Y\colon G \to \mathbb{R}^m$, $\omega\colon [0, L] \to \mathbb{R}^m$, $f_\nu\colon G \to \mathbb{R}^1$. Вектор-функції X і Y 2π-періодичні за кожною компонентою векторів φ, φ_θ; $x(0, y, \psi, \varepsilon) = y(\varepsilon)$, $\psi(0, y, \psi, \varepsilon) = \psi(\varepsilon)$.

Відповідна (1), (2) усереднена за швидкими змінними задача набирає вигляду

$$\frac{d\overline{x}}{d\tau} = X_0(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\lambda, \varepsilon), \qquad \frac{d\overline{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y_0(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\lambda, \varepsilon), \tag{3}$$

$$\int_0^L f_\nu(\tau, \overline{x}(\tau, \overline{y}, \varepsilon), \overline{x}_\lambda(\tau, \overline{y}, \varepsilon), \overline{\varphi}(\tau, \overline{y}, \overline{\psi}, \varepsilon), \varphi_\theta(\tau, \overline{y}, \overline{\psi}, \varepsilon), \varepsilon)\, d\tau =$$

$$= a_\nu(\varepsilon), \qquad \nu = 1, \ldots, m+n. \tag{4}$$

Система (3) значно простіша, ніж (1), оскільки вектор-функції у правій частині (3) не залежать від швидких змінних. Розв'язування усередненої задачі спрощується, зокрема, у випадку, коли $\overline{x}(0) = \overline{y}$. Тоді із (4) знаходяться лише початкові умови для швидких змінних.

Позначимо через w і $\overline{w}$ вектори розміру $r = 2(m+n)$, складені з векторів $x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta$ і $\overline{x}, \overline{x}_\lambda, \overline{\varphi}, \overline{\varphi}_\theta$ відповідно. Нехай $A(\tau, w, \varepsilon) = [X(\tau, w, \varepsilon), Y(\tau, w, \varepsilon)]$, $\dim A = m + n$. Припустимо, що виконуються такі умови:

1^0) нехай для будь-якого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ $A \in C^2_{\tau,x,z}(G, a_1)$, де $C^2_{\tau,x,z}(G, a_1)$ — простір двічі неперервно диференційовних по τ, x, z функцій, обмежених в G разом із похідними сталою $a_1 > 0$;

2^0) для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ функція $f \in C^2_w(G, a_2)$;

3^0) функції $\omega_\nu \in C^{2m-1}[0, L]$, $\nu = 1, \ldots, m$, і $\det V(\tau) \neq 0$, $\tau \in I$; тут $V(\tau)$ — матриця порядку $2m$ із елементами $V_{ij}(\tau) = \omega_j^{(i-1)}(\tau)$, $V_{i(m+j)}(\tau) = (\theta\, \omega_j(\theta\tau))^{(i-1)}$, $i = 1, \ldots, 2m$, $j = 1, \ldots, m$;

4^0) для коефіцієнтів Фур'є вектор-функції $A(\tau, w, \varepsilon)$ в області $G_1 = [0, L] \times D \times D \times (0, \varepsilon_0]$ справджується нерівність

$$\sum_{\|k\|+\|l\|\neq 0} \left[\sup \|A_{kl}\| + \frac{1}{\|k\|+\|l\|} \left(\sup \left\| \frac{\partial A_{kl}}{\partial \tau} \right\| + \sup \left\| \frac{\partial A_{kl}}{\partial x} \right\| + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \lambda \sup \left\| \frac{\partial A_{kl}}{\partial x_\lambda} \right\| \right) \right] (\|k\|+\|l\|)^q \leq a_3, \qquad q \geq 0;$$

5^0) для будь-якого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ існує єдиний розв'язок $\overline{u} = [\overline{x}(\tau, \overline{y}, \varepsilon), \overline{\varphi}(\tau, \overline{y}, \overline{\psi}, \varepsilon)]$ задачі (3), (4) такий, що $\overline{x}(0, \overline{y}(\varepsilon), \varepsilon) = \overline{y}(\varepsilon)$, $\overline{\varphi}(0, \overline{y}(\varepsilon), \overline{\psi}(\varepsilon), \varepsilon) = \overline{\psi}(\varepsilon)$, причому $\overline{x}(\tau, \overline{y}, \varepsilon) \in D$ разом з деяким ρ-околом для всіх $\tau \in [0, L]$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Для системи (1) характерні резонансні явища, які значно ускладнюють її дослідження [2, 8]. На відміну від багаточастотних систем без запізнення [1] для (1) умова резонансу в точці $\tau \in [0, L]$ враховує запізнення в швидких змінних і набирає вигляду [8]

$$\gamma_{kl}(\tau) \equiv (k, \omega(\tau)) + (l, \omega(\theta\tau))\theta = 0, \tag{5}$$

де $(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток, $\|k\| + \|l\| \neq 0$, $\|k\| = |k_1| + \ldots + |k_m|$.

Виконання умов $1^0, 3^0$ і 4^0 для $q = 0$ дає змогу для осциляційного інтеграла

$$I_{kl}(\tau\, \overline{s}, \varepsilon) = \int_0^\tau f_{kl}(s, \varepsilon) \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_{\overline{s}}^s \gamma_{kl}(z)\, dz \right\} ds,$$

де $f_{kl}(\cdot, \varepsilon) \in C^1[0, L]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, одержати оцінку [8]

$$\|I_{kl}(\tau, \bar{s}, \varepsilon)\| \leq c_1\varepsilon^{1/2m}\biggl(\sup_{G_2}\|f_{kl}(\tau, \varepsilon)\| +$$

$$+ (\|k\|+\|l\|)^{-1}\sup_{G_2}\left\|\frac{d f_{kl}}{d\tau}(\tau, \varepsilon)\right\|\biggr) \tag{6}$$

для всіх $\tau \in [0, L]$, $\bar{s} \in [0, L]$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, де $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, $G_2 = [0, L]\times(0, \varepsilon_1]$.

На підставі оцінки (6) у (8) одержано оцінку для похибки методу усереднення

$$\|x(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \bar{x}(\tau, y, \varepsilon)\| + \|\varphi(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau, y, \psi, \varepsilon)\| \leq c_2\varepsilon^{1/2m}. \tag{7}$$

Якщо нерівність в умові 4^0 виконується для $q = 1$ і, крім того,

$$\sum_{\|k\|+\|l\|\neq 0}(\|k\|+\|l\|)^{-1}\sum_{j=1}^{2}\left[\sup_{G_1}\left\|\frac{\partial^2 A_{kl}}{\partial\tau\partial z_j}(\tau, z_1, z_2, \varepsilon)\right\| +\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=1}^{n}\left(\sup_{G_1}\left\|\frac{\partial^2 A_{kl}}{\partial z_j\partial z_{1\nu}}(\tau, z_1, z_2, \varepsilon)\right\| + \sup_{G_1}\left\|\frac{\partial^2 A_{kl}}{\partial z_j\partial z_{2\nu}}\right\|\right)\right] \leq a_4, \tag{8}$$

то оцінка, аналогічна (7), із деякою сталою $c_3 > 0$ справджується для похідних відхилень розв'язків систем (1), (3) за початковими даними y, ψ [1].

2. Обґрунтування методу усереднення для крайової задачі. Введемо такі позначення: $u(\tau, y, \psi, \varepsilon) = [x(\tau, y, \psi, \varepsilon), \varphi(\tau, y, \psi, \varepsilon)]$, $M_3 = (\tau, \bar{y}, \varepsilon)$, $M_4 = (\tau, \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon)$;

$$Q_\mu = \int_0^L\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(\tau, \bar{w}(\tau, \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon), \varepsilon)\frac{\partial\bar{x}}{\partial y}(M_3) + \frac{\partial f}{\partial x_\lambda}(\tau, \bar{w}(\tau, \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon), \varepsilon)\times\right.$$

$$\times\frac{\partial\bar{x}_\lambda}{\partial y}(M_3) + \frac{\partial f}{\partial\varphi}(\tau, \bar{w}(\tau, \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon), \varepsilon)\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y}(M_4) + \frac{\partial f}{\partial\varphi_\theta}(\tau, \bar{w}(\tau, \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon), \varepsilon)\times$$

$$\left.\times\frac{\partial\bar{\varphi}_\theta}{\partial y}(M_4)\right\}d\tau, \quad Q_\varepsilon = \int_0^L\left\{\frac{\partial f}{\partial\varphi}(\tau, \bar{w}(\tau, \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon), \varepsilon) +\right.$$

$$\left.+\frac{\partial f}{\partial\bar{\varphi}_\theta}(\tau, \bar{w}(\tau, \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon), \varepsilon)\right\}d\tau, \quad Q = [Q_\mu, Q_\varepsilon].$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $1^0 - 3^0, 5^0$, *умова* 4^0 *для* $q = 1$ *і нерівність* (8). *Припустимо також, що для всіх* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *і деякого* $\chi \in [0, 1/4m)$

$$\|Q^{-1}(\bar{y}(\varepsilon), \bar{\psi}(\varepsilon), \varepsilon)\| \leq a_5\varepsilon^{-\chi}. \tag{9}$$

Тоді для будь-якого $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, $0 < \varepsilon^* \leq \varepsilon_1$, *крайова задача* (1), (2) *у досить малому околі розв'язку* $\bar{u}(\tau, \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon)$ *усередненої задачі* (3), (4) *має єдиний розв'язок* $u(\tau, y, \psi, \varepsilon)$. *Крім того, існує* $c_4 > 0$, *не залежне від* ε *і таке, що для всіх* $\tau \in [0, L]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ *справджується нерівність*

$$\|u(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \bar{u}(\tau, \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon)\| \leq c_4\varepsilon^{\alpha}, \quad \alpha = (1/2m) - \chi.$$

Доведення. 1. Для початкових даних $(\bar{y}+\mu, \bar{\psi}+\xi)$, $\bar{y}+\mu \in D$, $\|\mu\| + \|\xi\| \leq c_5^{-1}\rho_1$, $\rho_1 = \rho/2$, $c_5 = \exp[a_1(1+\lambda^{-1})L]$, із системи (3) випливає

$$\|\overline{u}(\tau, \overline{y}+\mu, \overline{\psi}+\xi, \varepsilon)-\overline{u}(\tau, \overline{y}, \overline{\psi}, \varepsilon)\| \leq c_5(\|\mu\|+\|\xi\|) \leq \rho_1, \tag{10}$$
$$\tau \in I, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_1].$$

На підставі теореми 5 [8] існує єдиний розв'язок $u(\tau, \overline{y}+\mu, \overline{\psi}+\xi, \varepsilon)$ системи (1) такий, що

$$\|u(\tau, \overline{y}+\mu, \overline{\psi}+\xi, \varepsilon)-\overline{u}(\tau, \overline{y}+\mu, \overline{\psi}+\xi, \varepsilon)\| \leq c_2(\rho_1)\varepsilon^{1/2m}. \tag{11}$$

Будемо вважати, що

$$\|\mu\|+\|\xi\| \leq c_6\varepsilon^{\alpha} \leq \rho_1, \tag{12}$$

де $c_6 = \mathrm{const} > 0$. Тоді з (10) і (11) одержимо нерівність

$$\|u(\tau, \overline{y}+\mu, \overline{\psi}+\xi, \varepsilon)-\overline{u}(\tau, \overline{y}, \psi, \varepsilon)\| \leq (c_2+c_5c_6)\varepsilon^{\chi} \equiv c_4\varepsilon^{\chi},$$

яка виконується для всіх $\tau \in [0, L]$ і $\varepsilon \leq \varepsilon_2 = \min\left(\varepsilon_1, (\rho_1/c_6)^{1/\alpha}\right)$.

2. Покажемо, що знайдуться такі μ і ξ, для яких справджується оцінка (12), і розв'язок $u(\tau, \overline{y}+\mu, \overline{\psi}+\xi, \varepsilon)$ задовольняє крайові умови (2), які запишемо у вигляді

$$\int_0^L (f(\tau, \overline{w}(\tau, \overline{y}+\mu, \overline{\psi}+\xi, \varepsilon), \varepsilon) - f(\tau, \overline{w}(\overline{y}+\mu, \overline{\psi}+\xi, \varepsilon), \varepsilon))\,d\tau +$$
$$+ \int_0^L (f(\tau, \overline{w}(\tau, \overline{y}+\mu, \overline{\psi}+\xi, \varepsilon), \varepsilon) - f(\tau, \overline{w}(\tau, \overline{y}, \overline{\psi}, \varepsilon), \varepsilon))\,d\tau = 0.$$

Звідси маємо

$$\int_0^L \left[\frac{\partial f}{\partial x}(M)\frac{\partial \overline{x}}{\partial y_\lambda}(M_3) + \frac{\partial f}{\partial x_\lambda}(M)\frac{\partial \overline{x}_\lambda}{\partial y}(M_3) + \frac{\partial f}{\partial \varphi}(M)\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial y}(M_4) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial f}{\partial \varphi_\theta}(M)\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \overline{y}}(M_4) + \frac{\partial f}{\partial \varphi}(M) + \frac{\partial f}{\partial \varphi_\theta}(M)\right] d\tau[\mu, \xi] =$$
$$= -\int_0^L (f(\tau, w(\tau, \overline{y}+\mu, \overline{\psi}+\xi, \varepsilon), \varepsilon) - f(\tau, \overline{w}(\tau, \overline{y}+\mu, \overline{\psi}+\xi, \varepsilon), \varepsilon))\,d\tau -$$
$$- \int_0^L \left(\frac{\partial f}{\partial x}(M)P_1(\tau, \mu, \varepsilon) + \frac{\partial f}{\partial x_\lambda}(M)P_2(\tau, \mu, \varepsilon) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial f}{\partial \varphi}(M)P_3(\tau, \mu, \varepsilon) + \frac{\partial f}{\partial \varphi_\theta}(M)P_4(\tau, \mu, \varepsilon)\right) d\tau -$$
$$- \int_0^L P(\tau, \mu, \xi, \varepsilon)\,d\tau \equiv R_1 + R_2 + R_3.$$

Тут $M = (\tau, \overline{w}(\tau, \overline{y}, \overline{\psi}, \varepsilon), \varepsilon)$.

Для R_1 із умови 2^0 і нерівності (7) випливає оцінка

$$\|R_1\| \leq \int_0^L (n+m)\sup_G \left\|\frac{\partial f}{\partial w}(\tau, w, \varepsilon)\right\| (\|u(\tau, \overline{y}+\mu, \overline{\psi}+\xi, \varepsilon) -$$
$$- \overline{u}(\tau, \overline{y}+\mu, \overline{\psi}+\xi, \varepsilon)\| + \|x_\lambda(\tau, \overline{y}+\mu, \varepsilon) - \overline{x}_\lambda(\tau, \overline{y}+\mu, \varepsilon)\| +$$
$$+ \|\varphi_\theta(\tau, \overline{y}+\mu, \overline{\psi}+\xi, \varepsilon) - \overline{\varphi}_\theta(\tau, \overline{y}+\mu, \overline{\psi}+\xi, \varepsilon)\|)\,d\tau \leq$$

$$\leq 3c_2(n+m)L\sup_G\left\|\frac{\partial f}{\partial w}(\tau, w, \varepsilon)\right\|\varepsilon^{1/2m} \equiv c_7\varepsilon^{1/2m}.$$

Що стосується функції $P_1(\tau, \mu, \varepsilon)$, то

$$\| P_1(\tau, \mu, \varepsilon)\| = \left\|\overline{x}(\tau, \overline{y}+\mu, \varepsilon) - \overline{x}(\tau, \overline{y}, \varepsilon) - \frac{\partial\overline{x}}{\partial y}(\tau, \overline{y}, \varepsilon)\mu\right\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}n\|\mu\|^2 \sum_{\alpha=1}^{n}\sup\left\|\frac{\partial^2\overline{x}}{\partial\overline{y}\,\partial\overline{y}_\alpha}(\tau, \overline{y}, \varepsilon)\right\|.$$

Аналогічні оцінки справджуються і для P_2, P_3, P_4. Отже,

$$\| R_2\| \leq 0,5a_2(n+m)L +$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\sup\left\|\frac{\partial^2\overline{x}}{\partial\overline{y}\,\partial\overline{y}_\alpha}\right\| + \sup\left\|\frac{\partial^2\overline{x}_\lambda}{\partial\overline{y}\,\partial\overline{y}_\alpha}\right\| + \sup\left\|\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial\overline{y}\,\partial\overline{y}_\alpha}\right\| + \sup\left\|\frac{\partial^2\overline{\varphi}_\theta}{\partial\overline{y}\,\partial\overline{y}_\alpha}\right\|\right)\times$$

$$\times\|\mu\|^2 \leq c_8\|\mu\|^2,$$

де $c_8 = 0,5a_1(n+m)L\overline{c}_8$, значення $\overline{c}_8$ наведено в [2].

Нарешті,

$$\| P\| = \left\| f(\tau,\overline{w}(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon),\varepsilon) - f(\tau,\overline{w}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon),\varepsilon) - \frac{\partial f}{\partial w}(\tau,\overline{w}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon),\varepsilon)\times\right.$$

$$\left.\times(\overline{w}(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon) - \overline{w}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon))\right\| \leq$$

$$\leq a_2(n+m)\|\overline{w}(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon) - \overline{w}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)\|^2/2.$$

Враховуючи, що

$$\left\|\frac{\partial\overline{x}}{\partial\overline{y}}(\tau, \overline{y}, \varepsilon)\right\| \leq c_9, \quad \left\|\frac{\partial\overline{x}_\lambda}{\partial\overline{y}}(\tau, \overline{y}, \varepsilon)\right\| \leq c_9,$$

де $c_9 = \exp[a_1(1+1/\lambda)L]$, одержуємо

$$\| R_3\| = \left\|\int_0^L P(\tau, \mu, \xi, \varepsilon)\,d\tau\right\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}a_2c_9^2(n+m)n^2(2+a_1m(1+\theta)L)^2\|z\|^2 \equiv c_{10}\|z\|^2.$$

Таким чином, для $z=[\mu, \xi]$ маємо

$$z = Q^{-1}(\overline{y}(\varepsilon), \overline{\psi}(\varepsilon), \varepsilon)(R_1(\mu,\xi,\varepsilon) + R_2(\mu,\xi,\varepsilon) + R_3(\mu,\xi,\varepsilon)) \equiv \Phi(z, \varepsilon).$$

З оцінок для R_1, R_2, R_3 та (9) випливає

$$\|\Phi(z, \varepsilon)\| \leq a_5\varepsilon^{-\chi}\left(c_7\varepsilon^{1/2m} + (c_8+c_{10})\|z\|^2\right).$$

Виберемо $c_6 = 2a_5c_7$; $\varepsilon_2 = \min\left(\varepsilon_1, \left(\dfrac{\rho_1}{2a_5c_7}\right)^{1/\alpha}, \left(4a_5^2c_7c_8(c_2+c_{10})\right)^{1/(\chi-\alpha)}\right)$.

Тоді для будь-якого $\varepsilon\in(0, \varepsilon_2]$ відображення $\Phi(\cdot, \varepsilon)$ відображає кулю $S = \{z : \|z\| \leq r_0(\varepsilon)\}$; $r_0(\varepsilon) = c_6\varepsilon^\alpha$ в себе.

Покажемо, що Φ — відображення стиску. Маємо

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = Q^{-1}(\tau, \varepsilon)\left(\frac{\partial R_1}{\partial z} + \frac{\partial R_2}{\partial z} + \frac{\partial R_3}{\partial z}\right).$$

Із нерівності (7) та аналогічної нерівності для похідних по y, ψ випливає

$$\left\|\frac{\partial R_1}{\partial z}\right\| \le \int_0^L \left[\left\|\frac{\partial}{\partial z}(w(\tau,\bar{y}+\mu,\bar{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{w}(\tau,\bar{y}+\mu,\bar{\psi}+\xi,\varepsilon))\right\| \times\right.$$

$$\left.\times \sup_G\left\|\frac{\partial f(\tau,w,\varepsilon)}{\partial w}\right\|+\left\|\frac{\partial f}{\partial w}(\tau,w,\varepsilon)-\frac{\partial f}{\partial w}(\tau,\overline{w},\varepsilon)\right\|\left\|\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}\right\|\right]dz \le$$

$$\le 3\left(c_3\sup_G\left\|\frac{\partial f(\tau,w,\varepsilon)}{\partial w}\right\|+a_2c_2c_{12}(m+n)\right)L\varepsilon^{1/2m} \equiv c_{11}\varepsilon^{1/2m},$$

де

$$\sup_G\left\|\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}\right\| \le 2(1+c_9)+a_1c_9L(1+\theta) = c_{12}.$$

На підставі оцінки

$$\left\|\frac{\partial P_1}{\partial\mu}\right\| \le \left\|\frac{\partial}{\partial\mu}(\bar{x}(\tau,\bar{y}+\mu,\varepsilon)-\bar{x}(\tau,\bar{y},\varepsilon))\right\| \le n\|\mu\|\sum_{\nu=1}^{n}\sup\left\|\frac{\partial^2\bar{x}}{\partial\bar{y}\,\partial\bar{y}_\nu}(\tau,\bar{y},\varepsilon)\right\|$$

й аналогічних оцінок для $\dfrac{\partial P_r}{\partial\mu}$, $r=2, 3, 4$, одержимо

$$\left\|\frac{\partial R_2}{\partial\mu}\right\| \le a_2(n+m)\bar{c}_8L\|\mu\| \equiv c_{13}\|\mu\|.$$

Побудуємо ще одну оцінку

$$\left\|\frac{\partial P}{\partial z}\right\| \le \left\|\frac{\partial}{\partial w}(f(\tau,\overline{w}(\tau,\bar{y}+\mu,\bar{\psi}+\xi,\varepsilon),\varepsilon)-f(\tau,\overline{w}(\tau,\bar{y},\bar{\psi},\varepsilon),\varepsilon))\right\| \times$$

$$\times\left\|\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}(\tau,\bar{y}+\mu,\bar{\psi}+\xi,\varepsilon)\right\| \le$$

$$\le a_2(m+n)\|\overline{w}(\tau,\bar{y}+\mu,\bar{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{w}(\tau,\bar{y},\bar{\psi},\varepsilon)\|c_{12} \le$$

$$\le 4a_1a_2c_{13}(m+n)(1+c_5n(1+a_1(1+\theta)L))\|\mu\| \equiv c_{14}\|\mu\|.$$

Об'єднуючи одержане, маємо

$$\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right\| \le a_5\varepsilon^{-\chi}\left(c_{11}\varepsilon^{1/2m}+(c_{13}+c_{14})\|\mu\|\right)L.$$

Якщо $\|z\| \le c_6\varepsilon^{\alpha}$ і $\varepsilon\le\varepsilon^*=\min\left(\varepsilon_2,(2c_{15})^{1/(\chi-\alpha)}\right)$, де $c_{15}=a_5(c_{11}+c_6(c_{13}+c_{14}))L$, то

$$\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right\| \le c_{15}\varepsilon^{\alpha-\chi} \le 1/2.$$

Згідно з принципом стискаючих відображень існують єдині значення μ і ξ такі, що $u(\tau,\bar{y}+\mu,\bar{\psi}+\xi,\varepsilon)$ — розв'язок крайової задачі (1), (2) і справджується нерівність $\|u(\tau,y,\psi,\varepsilon)-\bar{u}(\tau,\bar{y},\bar{\psi},\varepsilon)\|\le c_4\varepsilon^{\alpha}$, $\alpha=(1/2m)-\chi$.

Теорему доведено.

Розглянемо два випадки лінійних крайових умов. Нехай $A_\nu(\tau,\varepsilon)$, $B_\nu(\tau,\varepsilon)$, $\nu=1, 2,$ — матриці розміру $(n+m)\times n$ і $(n+m)\times m$ відповідно, елементи $a_{ij}(\cdot,\varepsilon)$ і $b_{ij}(\cdot,\varepsilon)$ інтегровні для будь-якого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ і обмежені на $[0,L]\times\times(0,\varepsilon_0]$. Задамо крайові умови вигляду

$$\int_0^L [A_1(\tau,\varepsilon)x(\tau,\varepsilon)+A_2(\tau,\varepsilon)x_\lambda(\tau,\varepsilon)+$$

$$+B_1(\tau,\varepsilon)\varphi(\tau,\varepsilon)+B_2(\tau,\varepsilon)\varphi_\theta(\tau,\varepsilon)]d\tau = a(\varepsilon). \qquad (13)$$

Позначимо через $Q_1(\varepsilon)$ квадратну матрицю порядку $n+m$:

$$Q_1(\varepsilon) = \int_0^L \left[A_1(\tau,\varepsilon)\frac{\partial\overline{x}(\tau,\overline{y},\varepsilon)}{\partial y} + A_2(\tau,\varepsilon)\frac{\partial\overline{x}_\lambda(\tau,\overline{y},\varepsilon)}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + B_1(\tau,\varepsilon)\frac{\partial\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)}{\partial y} + B_2(\tau,\varepsilon)\frac{\partial\overline{\varphi}_\theta(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)}{\partial y},\ B_1(\tau,\varepsilon)+B_2(\tau,\varepsilon)\right]d\tau,$$

де $\overline{v}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon) = [\,\overline{x}(\tau,\overline{y},\varepsilon),\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)]$ — розв'язок крайової задачі (3), (13).

Розглянемо ще такі крайові умови:

$$\int_0^L (A_1(\tau,\varepsilon)x(\tau,\varepsilon) + A_2(\tau,\varepsilon)x_\lambda(\tau,\varepsilon))\,d\tau = a(\varepsilon),$$

$$\int_0^L (B_1(\tau,\varepsilon)\varphi(\tau,\varepsilon) + B_2(\tau,\varepsilon)\varphi_\theta(\tau,\varepsilon))\,d\tau = d(\varepsilon), \tag{14}$$

де $A_\nu(\tau,\varepsilon)$, $B_\nu(\tau,\varepsilon)$ — матриці порядку n і m відповідно, елементи яких мають ті самі властивості, що й в умовах (13).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* $1^0, 3^0-5^0$ *для* $q=1$, *нерівність* (8) *та нерівність* (9) *із матрицею* $Q = Q_1(\varepsilon)$ *для крайової задачі* (1), (13) *або нерівність*

$$\left\| \int_0^L \left[A_1(\tau,\varepsilon)\frac{\partial\overline{x}(\tau,\overline{y},\varepsilon)}{\partial y} + A_2(\tau,y)\frac{\partial\overline{x}_\lambda(\tau,\overline{y},\varepsilon)}{\partial y}\right] d\tau \right\| +$$

$$+ \left\| \int_0^L [B_1(\tau,\varepsilon)+B_2(\tau,\varepsilon)]\,d\tau \right\| \le c_5\varepsilon^{-\chi}, \quad 0 \le \chi < (4m)^{-1},$$

для крайової задачі (1), (14).

Тоді твердження теореми 1 *залишається правильним для крайових задач* (1), (13) *і* (1), (14).

Доведення теореми 2 аналогічне доведенню теореми 1.

1. *Самойленко А. М., Петришин Р. І.* Багаточастотні коливання нелінійних систем. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – 340 с.
2. *Бігун Я. Й.* Усереднення багаточастотної крайової задачі з лінійно перетвореним аргументом // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 3. – С. 291–299.
3. *Петришин Р. І., Петришин Я. Р.* Усереднення крайових задач для систем диференціальних рівнянь з повільними та швидкими змінними // Нелінійні коливання. – 1998. – № 1. – С. 51–65.
4. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. – Киев; Одесса: Лыбидь, 1992. – 188 с.
5. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 279 с.
6. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 280 с.
7. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 319 с.
8. *Бигун Я. И., Самойленко А. М.* Обоснование принципа усреднения для многочастотных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. – 1999. – **35**, № 1. – С. 8–14.

Одержано 12.02.2003