УДК 517.988; 517.947

А. Ю. Мальцев (Нац. техн. ун-т України „КПІ", Київ)

ЕВОЛЮЦІЙНІ СУТТЄВО НЕСКІНЧЕННОВИМІРНІ РІВНЯННЯ

We investigate the Cauchy problem for evolutionary equations with essentially infinite-dimensional elliptic operators.

Досліджується задача Коші для еволюційних рівнянь із суттєво нескінченновимірними еліптичними операторами.

Вступ. Нехай H — дійсний сепарабельний гільбертів простір, $L(H)$ — простір обмежених лінійних операторів, що діють у H. Через $C^2(H)$ будемо позначати банахів простір двічі неперервно диференційовних за Фреше скалярних функцій з нормою $\sup|\cdot|$, а через $B_C(H)$ — простір самоспряжених обмежених операторів, що діють в H. Нас будуть цікавити лінійні додатні функціонали j, що визначені на просторі $B_C(H)$: $\forall D \geq 0 \quad j(D) \geq 0$. Згідно з термінологією, прийнятою в [1], лінійний обмежений функціонал j у просторі $B_C(H)$ називається суттєво нескінченновимірним, якщо до його ядра належать всі скінченновимірні (а тому і компактні) оператори. Позначимо через $Q_{n,c}$ множину всіх обмежених лінійних операторів, ранг яких не більший за n, а норма не більша за c. Множину $M \subseteq L(H)$ будемо називати майже компактною, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує компактна множина $K \subseteq L(H)$ та числа $n \in \mathrm{N}$, $c > 0$ такі, що множина $K + Q_{n,c}$ є ε-сіткою для M. Введемо до розгляду алгебру функцій $\mathfrak{A}_0$. До $\mathfrak{A}_0$ належать ті й тільки ті фінітні функції з $C^2(H)$, для яких:

1) для будь-якого $R > 0$ існує майже компактна множина $M \subseteq L(H)$ така, що $u''(x) \in M \quad \forall x \in B_R = \{x\colon \|x\| \leq R\}$;

2) $u''(x)$ рівномірно неперервна на всіх обмежених підмножинах у просторі H.

Через X позначимо банахів простір, що є замиканням $\mathfrak{A}_0$ у $C^2(H)$ за $\sup|\cdot|$-нормою.

Розглянемо функцію $j(t)$, де $t \in [0, T] = \Delta$, таку, що для будь-якого $t_0 \in [0, T]$ $j(t_0)$ — додатний суттєво нескінченновимірний лінійний функціонал у просторі $B_C(H)$. Далі будемо вважати, що на відрізку $[0, T]$ $j(t)$ задовольняє умову Ліпшиця: $\exists\, C > 0$, $\forall\, t_1, t_2 \in [0, T]$: $\|j(t_1) - j(t_2)\| \leq C|t_1 - t_2|$. У роботі [1] за додатним суттєво нескінченновимірним функціоналом j побудовано (C_0)-півгрупу стисків $T^j(t)$ у просторі X. Результатом дії оператора $T^j(t)$ на функцію $\varphi \in \mathfrak{A}_0$ є розв'язок задачі Коші $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \dfrac{1}{2} j(u''_{xx}(t,x))$ у точці t з початковою умовою $\varphi \in \mathfrak{A}_0$. У вказаній роботі доведено, що $\left(T^j(t)\varphi\right)(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \int_H \varphi(x-y)\mu_{tA_n}(dy)$, де A_n — додатні оператори скінченного рангу, що залежать від функції φ, такі, що $\|A_n\| \to 0$; $\forall\, n \in \mathrm{N}$ $\mathrm{Sp}(A_n) = \|j\|$, а $\mu_{A_n}(dy)$ — гауссова міра в H із кореляційним оператором A_n. Всі властивості півгрупи $T^j(t)$, необхідні для подальшого викладу, запозичено в [1], а тому використовуються далі без додаткових посилань.

Нехай $q = \{t_0 = 0,\ t_1, t_2, \ldots, t_n = T\}$ — деяке розбиття відрізка $[0, T]$ і $t, s \in [0, T]$, $s \leq t$, при цьому $t_{j-1} < s \leq t_j$, $t_m \leq t < t_{m+1}$. Якщо $U(t,s)$ — деяка сім'я операторів у просторі X, покладемо за означенням $U_q(t, s) = U(t, t_m)U(t_m, t_{m-1}) \dots U(t_{j+1}, t_j)U(t_j, s)$. Завжди без додаткових застережень припускається, що $U_q(t, t) = I$, $t \in [0, T]$. Співвідношення $\tilde{U}(t, s) = \lim_q U_q(t, s)$ будемо розуміти нижче як границю на кожному елементі $\varphi \in X$ за напрямком, що утворений розбиттям q відрізка $[0, T] = \Delta$: для кожної пари $\varphi \in X$, $\varepsilon > 0$ існує розбиття q таке, що для будь-якого його продовження $q' \supset q$ виконується оцінка $\left\| \tilde{U}(t, s)\varphi - U_{q'}(t, s)\varphi \right\| < \varepsilon$.

Векторне поле Z на просторі H належить класу $\mathfrak{A}_0$, якщо: 1) Z має обмежений носій; 2) $\{Z'(x) | x \in H\}$ — майже компактна множина; 3) $\{(\xi, Z''(x)) = (\xi, Z)''(x) | \|\xi\| \le 1;\ x \in H\}$ — майже компактна множина; 4) Z — двічі неперервно диференційовна на H, при цьому друга похідна Z є рівномірно неперервною на H операторнозначною функцією.

1. Задача Коші для рівняння $\dfrac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \dfrac{1}{2} j(t)\left(u''_{xx}(t, x)\right)$. Розглянемо задачу Коші для рівняння

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2} j(t)\left(u''_{xx}(t, x)\right), \tag{1}$$

де $t \in [0, T] = \Delta$. Будемо вважати, що початкова умова $\varphi \in \mathfrak{A}_0$, а $j(t)$ задовольняє на відрізку Δ умову Ліпшиця. У цьому пункті покладемо $U(t, s) = T^{j(s)}(t - s)$. Розв'язок будемо шукати в класі функцій X.

Теорема 1. *Розв'язок задачі Коші для рівняння* (1) *на відрізку* $[\tau, T]$, *де* $\tau \in [0, T]$, *з початковою умовою* φ *класу* $\mathfrak{A}_0$ *існує та єдиний у класі функцій* X. *Позначимо через* $\tilde{U}(t, \tau)\varphi$ *значення цього розв'язку в точці* $t > \tau$. *Тоді* $\tilde{U}(t, \tau)\varphi = \lim_q U_q(t, \tau)\varphi$.

Доведення. Спочатку доведемо існування розв'язку. Перевіримо, що $\lim_q U_q(t, \tau)\varphi$ є розв'язком вихідної задачі Коші. Насамперед зауважимо, що $\lim_q U_q(\tau, \tau)\varphi = \varphi$. Для того щоб довести існування границі $\lim_q U_q(t, \tau)\varphi$, $t > \tau$, використаємо теорему 2.1 з гл. 6 [2]. На підставі цієї теореми достатньо довести обмеженість за звичайною операторною нормою сім'ї операторів $U_q(t, s)$, $q \in \{q\}$, $t, s \in [0, T]$, а також перевірити виконання умови $\|U(t, s)\varphi - U(t, \theta)U(\theta, s)\varphi\| \le K(\varphi)(t - \theta)(\theta - s)^\alpha$, $0 < \alpha \le 1$, $s \le \theta \le t$, для всіх φ з деякої скрізь щільної в X та інваріантної відносно сім'ї $U_q(t, s)$ множини D; при цьому функція $K(\varphi)$ повинна задовольняти умову $\sup_{q,t,s} K\left(U_q(t, s)(\varphi)\right) = k(\varphi) < \infty$, $\varphi \in D$. Роль множини D в розглядуваному випадку буде відігравати $\mathfrak{A}_0$. Обмеженість за нормою сім'ї операторів $U_q(t, s)$ випливає з означення $U_q(t, s)$, з того, що норма добутку лінійних операторів не перевищує добутку їх норм, а також з того факту, що $T^j(t)$ — півгрупа стиску для будь-якого додатного лінійного функціонала j. Тепер залишилося оцінити норму різниці $U(t, s)\varphi - U(t, \theta)U(\theta, s)\varphi$, $\varphi \in \mathfrak{A}_0$. Нехай $\psi = T^{j(s)}(\theta - s)\varphi$. Згідно з властивостями півгрупи $T^{j(s)}(t)$ ψ належить до $\mathfrak{A}_0$. Тоді

$$\begin{aligned} \|U(t, s)\varphi - U(t, \theta)U(\theta, s)\varphi\| &= \left\| T^{j(s)}(t - s)\varphi - T^{j(\theta)}(t - \theta)T^{j(s)}(\theta - s)\varphi \right\| = \\ &= \left\| T^{j(s)}(t - \theta)T^{j(s)}(\theta - s)\varphi - T^{j(\theta)}(t - \theta)T^{j(s)}(\theta - s)\varphi \right\| = \\ &= \left\| T^{j(s)}(t - \theta)\psi - T^{j(\theta)}(t - \theta)\psi \right\|. \end{aligned} \tag{2}$$

Для того щоб оцінити $\left\| T^{j(\theta)}(t-\theta)\psi - T^{j(s)}(t-\theta)\psi \right\|$, використаємо формулу, отриману в [3]:

$$T^{j_2}(t)\psi \;-\; T^{j_1}(t)\psi \;=\; t\int_0^1 T^{j_1+\alpha(j_2-j_1)}(t)(L_2-L_1)\psi\, d\alpha$$

для будь-яких двох додатних суттєво нескінченновимірних функціоналів j_1 та j_2. Оператори $L_1 = L^{j_1}$, $L_2 = L^{j_2}$ такі, що $\overline{L_1}$ — генератор півгрупи $T^{j_1}(t)$, а $\overline{L_2}$ — генератор півгрупи $T^{j_2}(t)$. З цієї формули випливає

$$\left\| T^{j(\theta)}(t-\theta)\psi - T^{j(s)}(t-\theta)\psi \right\| \le$$

$$\le\; (t-\theta)\int_0^1 \left\| T^{j(s)+\alpha(j(\theta)-j(s))}(t-\theta)\left(L^{j(\theta)} - L^{j(s)}\right)\psi \right\| d\alpha \;\le$$

$$\le\; (t-\theta)\left\| \left(L^{j(\theta)} - L^{j(s)}\right)\psi \right\|. \tag{3}$$

Зафіксуємо тепер $x \in H$. Тоді

$$\left| \left(L^{j(\theta)} - L^{j(s)}\right)\psi(x) \right| \;=\; \left| (j(\theta)-j(s))\left(\psi''(x)\right) \right| \;\le\; \| j(\theta)-j(s) \| \left\| \psi''(x) \right\|. \tag{4}$$

Оскільки сім'я $j(t)$ задовольняє умову Ліпшиця на відрізку $[0, T]$, то існує $C > 0$ таке, що для будь-яких $\theta, s \in [0, T]$ $\| j(\theta)-j(s) \| \le C(\theta - s)$. Тому, враховуючи (4), маємо

$$\left| \left(L^{j(\theta)} - L^{j(s)}\right)\psi(x) \right| \;\le\; C(\theta - s)\sup_{x\in H} \| \psi''(x) \|. \tag{5}$$

Із нерівностей (3) та (5) отримуємо

$$\left\| T^{j(\theta)}(t-\theta)\psi - T^{j(s)}(t-\theta)\psi \right\| \;\le\; C(t-\theta)(\theta-s)\sup_{x\in H} \| \psi''(x) \|. \tag{6}$$

Нехай тепер $K(\psi) = C\sup_{x\in H} \| \psi''(x) \|$. Якщо довести, що виконується нерівність $K(\psi) = K\left(U(\theta,s)\varphi\right) = K\left(T^{j(s)}(\theta-s)\varphi\right) \le K(\varphi)$ для будь-яких $\varphi \in \mathfrak{A}_0$, то, враховуючи (2) та (6), маємо $\| U(t,s)\varphi - U(t,\theta)\,U(\theta,s)\varphi \| \le K(\varphi)(t-\theta)(\theta-s)$. Крім того, на підставі означення $U_q(t,s)$ послідовне застосування цього твердження приведе до того, що для всіх функцій $\varphi \in \mathfrak{A}_0$ $\sup_{q,t,s\in H} K\left(U_q(t,s)\varphi\right) \le K(\varphi) = \sup_{x\in H} \left\| \varphi''(x) \right\| < +\infty$. Цим повністю буде доведено існування границі $\lim_q U_q(t,s)\varphi$ для всіх φ з $\mathfrak{A}_0$ у відповідності з теоремою 2.1 з гл. 6 [2]. Для доведення того, що $K(\psi) = K\left(U(\theta,s)\varphi\right) = K\left(T^{j(s)}(\theta-s)\varphi\right) \le K(\varphi)$, використаємо таку властивість півгруп $T^j(t)$: для будь-якої функції φ з $\mathfrak{A}_0$ і для будь-яких векторів $h_1,\ h_2 \in H$ $(\varphi'(\cdot), h_1) \in X$, $\left(\varphi''(\cdot)h_1, h_2\right) \in X$. При цьому справджуються рівності

$$\left((T(t)\varphi)'(\cdot), h_1 \right) \;=\; T(t)\left(\varphi'(\cdot), h_1\right), \tag{7}$$

$$\left((T(t)\varphi)''(\cdot)h_1, h_2 \right) \;=\; T(t)\left(\varphi''(\cdot)h_1, h_2\right). \tag{8}$$

Отож, з (8) випливає

$$K\left(U(\theta,s)\varphi\right) \;=\; C\sup_{x\in H} \left\| \left(T^{j(s)}(\theta-s)\varphi\right)''(x) \right\| \;=$$

$$= C\sup\left\{\left(\left(T^{j(s)}(\theta-s)\varphi\right)''(x)h, h\right) \middle| x\in H;\ \|h\|\le 1\right\} =$$

$$= C\sup\left\{T^{j(s)}(\theta-s)\left(\varphi''(\cdot)h, h\right)(x) \middle| x\in H;\ \|h\|\le 1\right\} \le$$

$$\le C\sup\{(\varphi''(x)h, h) | x\in H;\ \|h\|\le 1\} = C\sup_{x\in H}\left\|\varphi''(x)\right\| = K(\varphi). \tag{9}$$

Згідно з твердженням 2.2 із гл. 6 [2], генератором $\Gamma(t)$ сім'ї $\tilde{U}(t,s)$ є оператор, що діє на функції φ з $D=\mathfrak{A}_0$ за правилом

$$\Gamma(t)\varphi = U_1'(t,t)\varphi,$$

$$\frac{d}{dt}U(t,s)\varphi = \frac{d}{dt}T^{j(s)}(t-s)\varphi = T^{j(s)}(t-s)L^{j(s)}\varphi.$$

Звідси $\Gamma(t) = U_1'(t,t)\varphi = L^{j(t)}\varphi$. Цим існування розв'язку повністю доведено.

Перейдемо до доведення того, що розв'язок початкової задачі Коші єдиний. Спочатку зауважимо, що для будь-якого $t\in[0,T]$ $\overline{L}^{j(t)}$ є генератором (C_0)-півгрупи стиску $T^{j(t)}(\tau)$. Тому на підставі теореми Хілле – Іосіди можемо стверджувати, що додатна піввісь є резольвентною множиною для кожного з операторів $\overline{L}^{j(t)}$; більш того, $\left\|R_{\overline{L}^{j(t)}}(\lambda)\right\|\le\frac{1}{\lambda}$ при $\lambda>0$. Тому, виходячи з теореми 3.10 з [4], робимо висновок про єдиність розв'язку задачі Коші. Відмітимо, що питання єдиності розв'язку розглядалося детально в [5].

Теорему доведено.

2. Задача Коші для рівняння $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\frac{1}{2}j(t)(u''_{xx}(t,x))+(Z,u'_x(t,x))$. Розглянемо задачу Коші для рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}j(t)(u''_{xx}(t,x))+(Z,u'_x(t,x)), \tag{10}$$

де $t\in[0,T]=\Delta$. Будемо вважати, що початкова умова $\varphi\in\mathfrak{A}_0$. Розв'язок задачі Коші будемо шукати в класі функцій X. Z — векторне поле класу $\mathfrak{A}_0$. Течію $\Phi_t(x)=\Phi(t,x)$, що відповідає такому векторному полю, визначено при всіх $(t,x)\in R\dotplus H$. Визначимо у просторі X півгрупу $P(t)$ за формулою $P(t)u = u\circ\Phi(t)$. Введемо до розгляду такі множини операторів: $V(t,s) = T^{j(s)}(t-s)$, $Z(t,s)=P(t-s)$. Покладемо $U(t,s)=V(t,s)Z(t,s)$.

Теорема 2. *Розв'язок задачі Коші для рівняння* (10) *на відрізку* $[\tau,T]$, *де* $\tau\in[0,T]$, *з початковою умовою* φ *класу* $\mathfrak{A}_0$ *існує та єдиний у класі функцій* X. *Позначимо через* $\tilde{U}(t,\tau)\varphi$ *значення цього розв'язку в точці* $t>\tau$. *Тоді* $\tilde{U}(t,\tau)\varphi = \lim_q U_q(t,\tau)\varphi$.

Доведення. Спочатку доведемо існування розв'язку. Перевіримо, що $\lim_q U_q(t,\tau)\varphi$ є розв'язком вихідної задачі Коші. Насамперед зауважимо, що $\lim_q U_q(\tau,\tau)\varphi=\varphi$. Для того щоб довести існування границі $\lim_q U_q(t,\tau)\varphi$, $t>\tau$, знову використаємо теорему 2.1 з гл. 6 [2]. Обмеженість за нормою сім'ї операторів $U_q(t,s)$ випливає з означення $U_q(t,s)$, з того, що норма добутку лінійних операторів не перевищує добутку їх норм, а також з того факту, що для будь-якого $t>0$ $\left\|T^j(t)\right\|\le 1$ та $\|P(t)\|\le 1$. Тепер залишилося оцінити норму різниці $U(t,s)\varphi-U(t,\theta)U(\theta,s)\varphi$, $\varphi\in\mathfrak{A}_0$. Позначимо $P(\theta-s)\varphi$ через ψ. Згідно з властивостями півгрупи $P(t)$, $\psi\in\mathfrak{A}_0$,

$$\|U(t,\theta)U(\theta,s)\varphi-U(t,s)\varphi\| =$$

$$= \left\| T^{j(\theta)}(t-\theta)P(t-\theta)T^{j(s)}(\theta-s)P(\theta-s)\varphi - T^{j(s)}(t-s)P(t-s)\varphi \right\| =$$

$$= \left\| T^{j(\theta)}(t-\theta)P(t-\theta)T^{j(s)}(\theta-s)P(\theta-s)\varphi - T^{j(s)}(t-s)P(t-\theta)P(\theta-s)\varphi \right\| =$$

$$= \left\| T^{j(\theta)}(t-\theta)P(t-\theta)T^{j(s)}(\theta-s)\psi - T^{j(s)}(t-\theta)T^{j(s)}(\theta-s)P(t-\theta)\psi \right\|. \quad (11)$$

Введемо позначення: $A = T^{j(\theta)}(t-\theta)$, $B = T^{j(s)}(t-\theta)$, $\psi_1 = P(t-\theta)T^{j(s)}(\theta-s)\psi$, $\psi_2 = T^{j(s)}(\theta-s)P(t-\theta)\psi$. Згідно з (11) необхідно оцінити $\|A\psi_1 - B\psi_2\|$. Оскільки $\|A\psi_1 - B\psi_2\| \le \|\psi_1 - \psi_2\| + \|A\psi_2 - B\psi_2\|$, $\|A\| \le 1$, для оцінки (11) достатньо оцінити $\|\psi_1 - \psi_2\|$ та $\|A\psi_2 - B\psi_2\|$. Оцінимо спочатку $\|\psi_1 - \psi_2\|$. Для цього запишемо рівність

$$\left(T^{j(s)}(\theta-s)P(t-\theta)\psi - P(t-\theta)T^{j(s)}(\theta-s)\psi\right)(x) =$$

$$= T^{j(s)}(\theta-s)(\psi\circ\Phi_{t-\theta})(x) - T^{j(s)}(\theta-s)\psi\left(\Phi_{t-\theta}(x)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_H (\psi(\Phi(t-\theta,\ x+y)) - \psi(\Phi(t-\theta,x)+y))\mu_{(\theta-s)A_m}(dy). \quad (12)$$

Права частина цієї рівності залежить тільки від значень підінтегральної функції в кулі $\|y\| \le \sqrt{(\theta-s)\|j(s)\|}$, оскільки функціонал $j(s)$ — суттєво нескінченновимірний. З іншого боку, мають місце нерівності, отримані в [3]:

$$\|\Phi(t-\theta,\ x+y) - \Phi(t-\theta,x) - y\| \le \sup_x \left\| \frac{\partial\Phi}{\partial x}(t-\theta,x) - I \right\| \|y\|, \quad (13)$$

$$\sup_x \left\| \frac{\partial\Phi(t-\theta,x)}{\partial x} - I \right\| \le \exp\left((t-\theta)\tilde{C}\right) - 1 \le \tilde{C}_1(t-\theta) \quad (14)$$

для деяких додатних констант $\tilde{C}$ та $\tilde{C}_1$. Із співвідношень (13) та (14) випливає

$$\|\Phi(t-\theta,\ x+y) - \Phi(t-\theta,x) - y\| \le$$

$$\le \tilde{C}_1 \|j(s)\|^{\frac{1}{2}}(t-\theta)(\theta-s)^{\frac{1}{2}} \le \overline{C_1}(t-\theta)(\theta-s)^{\frac{1}{2}}, \quad (15)$$

$$\overline{C_1} = \tilde{C}_1\left(\sup_{s\in[0,T]}\|j(s)\|\right)^{\frac{1}{2}}.$$

З (15) отримуємо

$$|\psi(\Phi(t-\theta,\ x+y)) - \psi(\Phi(t-\theta,x)+y)| \le \overline{C_1}(t-\theta)(\theta-s)^{\frac{1}{2}}\sup_x\left\|\psi'(x)\right\|. \quad (16)$$

Позначаючи $K_1(\psi) = \overline{C_1}\sup_x\left\|\psi'(x)\right\|$ та враховуючи (12) та (16), робимо остаточний висновок, що

$$\left\| T^{j(s)}(\theta-s)P(t-\theta)\psi - P(t-\theta)T^{j(s)}(\theta-s)\psi \right\| \le K_1(\psi)(t-\theta)(\theta-s)^{\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

Тепер оцінимо $\|A\psi_2 - B\psi_2\|$. Виходячи з (6) та визначення операторів A та B, маємо

$$\left\| T^{j(\theta)}(t-\theta)\psi_2 - T^{j(s)}(t-\theta)\psi_2 \right\| \le K_2(\psi_2)(t-\theta)(\theta-s),$$

$$K_2(\psi_2) \stackrel{\Delta}{=} C\sup_{x\in H}\|\psi_2''(x)\|, \quad (18)$$

де C — константа Ліпшиця функціонала $j(s)$. Тепер з (11), (17) та (18) остаточно отримуємо

$$\| U(t,s)\varphi - U(t,\theta)U(\theta,s)\varphi \| \leq K_1(\psi)(t-\theta)(\theta-s)^{\frac{1}{2}} + K_2(\psi_2)(t-\theta)(\theta-s), \quad (19)$$

де $K_1(\psi) = \overline{C}_1 \sup_x \| \psi'(x) \|$, $K_2(\psi_2) = C \sup_x \| \psi_2''(x) \|$, $\psi = P(\theta - s)\varphi$, $\psi_2 = T^{j(s)}(\theta - s) P(t-\theta)\psi$.

Доведемо, що виконуються нерівності $K_1(\psi) \leq a_1 K_1(\varphi)$ та $K_2(\psi_2) \leq d_1 K_1(\varphi) + d_2 K_2(\varphi)$ для деяких a_1, d_1, $d_2 > 0$. Використовуючи оцінку $\sup_x \left\| (\varphi \circ \Phi_{\theta-s})'(x) \right\|$, встановлену в [3], для деякої додатної константи C_1 маємо

$$K_1(\psi) = K_1(P(\theta - s)\varphi) = \overline{C}_1 \sup_x \left\| (\varphi \circ \Phi_{\theta-s})'(x) \right\| \leq$$
$$\leq \overline{C}_1 \exp((\theta - s) C_1) \sup_x \| \varphi'(x) \| \leq \overline{C}_1 \exp(TC_1) \sup_x \| \varphi'(x) \| = a_1 K_1(\varphi), \quad (20)$$

де $a_1 = \exp(TC_1)$. За повною аналогією з (9) встановлюється, що

$$\sup_x \left\| \left(T^{j(s)}(\theta - s) P(t-\theta)\psi\right)''(x) \right\| \leq \sup_x \left\| \left(P(t-\theta)\psi\right)''(x) \right\| \quad (21)$$

для будь-якої функції $\psi \in \mathfrak{A}_0$.

На підставі властивостей півгрупи $P(t)$, встановлених в [3], для деяких констант C_1, $C_2 > 0$ (константа C_1 та сама, що і в (20)) при $t \in \Delta$ будемо мати

$$\sup_x \left\| \left(P(t-\theta)\psi\right)''(x) \right\| \leq$$
$$\leq \exp(2(t-\theta)C_1) \sup_x \| \psi''(x) \| + 2C_2(t-\theta) \exp(3(t-\theta)C_1) \sup_x \| \psi'(x) \| \leq$$
$$\leq \exp(2TC_1) \sup_x \| \psi''(x) \| + 2C_2 T \exp(3TC_1) \sup_x \| \psi'(x) \|. \quad (22)$$

Тепер з (21), (22) та означення K_2 випливає

$$K_2(\psi_2) \leq b_1 K_1(\psi) + b_2 K_2(\psi), \quad (23)$$

де $b_1 = \dfrac{2C_2 CT \exp(3TC_1)}{\overline{C}_1}$, $b_2 = \exp(2TC_1)$.

З (20) маємо $K_1(\psi) \leq a_1 K_1(\varphi)$, а з (22) — $K_2(\psi) \leq b_1 K_1(\varphi) + b_2 K_2(\varphi)$. Тому, виходячи з (23), отримуємо

$$K_2(\psi_2) = a_1 b_1 K_1(\varphi) + b_2 b_1 K_1(\varphi) + b_2^2 K_2(\varphi) =$$
$$= (a_1 b_1 + b_1 b_2) K_1(\varphi) + b_2^2 K_2(\varphi). \quad (24)$$

З (19) та (24) випливає

$$\| U(t,s)\varphi - U(t,\theta)U(\theta,s)\varphi \| \leq$$
$$\leq a_1 K_1(\varphi)(t-\theta)(\theta-s)^{\frac{1}{2}} + \left((a_1 b_1 + b_1 b_2) K_1(\varphi) + b_2^2 K_2(\varphi)\right)(t-\theta)(\theta-s). \quad (25)$$

Позначимо $\tilde{K}_1(\varphi) = a_1 K_1(\varphi)$, $\tilde{K}_2(\varphi) = (a_1 b_1 + b_1 b_2) K_1(\varphi) + b_2^2 K_2(\varphi)$. Тоді нерівність (25) можна записати у вигляді

$$\| U(t,s)\varphi - U(t,\theta)U(\theta,s)\varphi \| \leq \tilde{K}_1(\varphi)(t-\theta)(\theta-s)^{\frac{1}{2}} + \tilde{K}_2(\varphi)(t-\theta)(\theta-s).$$

Тепер встановимо, що

$$\sup_{q,t,s} \tilde{K}_1\left(U_q(t,s)\varphi\right) = \tilde{k}_1(\varphi) < +\infty, \quad (26)$$

$$\sup_{q,t,s} \tilde{K}_2\big(U_q(t,s)\varphi\big) = \tilde{k}_2(\varphi) < +\infty. \tag{27}$$

Спочатку доведемо (26). На підставі (7) для будь-якого додатного суттєво нескінченновимірного функціонала j та для будь-якого $t \in [0, T]$

$$\sup_{x \in H} \left\| \left(T^j(t)\varphi\right)'(x) \right\| = \sup\left\{ \left| \left(\left(T^j(t)\varphi\right)'(x), h \right) \right| \,\middle|\, x \in H;\ \|h\| \le 1 \right\} \le \sup_{x \in H} \left\| \varphi'(x) \right\|. \tag{28}$$

Враховуючи (20) та (28), маємо

$$\tilde{K}_1\big(U_q(t,s)\varphi\big) = \mathrm{const} \cdot \sup_{x \in H} \left\| \big(U(t, t_m) U(t_m, t_{m-1}) \ldots U(t_j, s)\varphi\big)'(x) \right\| =$$

$$= \mathrm{const} \cdot \sup_{x \in H} \left\| \left(T^{j(t_m)}(t - t_m)\big(P(t - t_m) U(t_m, t_{m-1}) \ldots U(t_j, s)\varphi\big)\right)'(x) \right\| \le$$

$$\le \mathrm{const} \cdot \sup_{x \in H} \left\| \big(P(t - t_m) U(t_m, t_{m-1}) \ldots U(t_j, s)\varphi\big)'(x) \right\| \le$$

$$\le \mathrm{const} \cdot \exp\big((t - t_m) C_1\big) \sup_{x \in H} \left\| \big(U(t_m, t_{m-1}) \ldots U(t_j, s)\varphi\big)'(x) \right\| \le$$

$$\le \mathrm{const} \cdot \exp\big((t - t_m) C_1\big) \exp\big((t_m - t_{m-1}) C_1\big) \sup_{x \in H} \left\| \big(U(t_{m-1}, t_{m-2}) \ldots U(t_j, s)\varphi\big)'(x) \right\| \le \ldots$$

$$\ldots \le \mathrm{const} \cdot \exp\big((t - t_m) C_1\big) \exp\big((t_m - t_{m-1}) C_1\big) \ldots \exp\big((t_j - s) C_1\big) \sup_{x \in H} \left\| \varphi'(x) \right\| =$$

$$= \mathrm{const} \cdot \exp\big((t - s) C_1\big) \sup_{x \in H} \left\| \varphi'(x) \right\| \le \exp(TC_1)\, \tilde{K}_1(\varphi).$$

Звідси випливає, що $\tilde{k}_1(\varphi) < +\infty$. Аналогічно доводиться (27). Цим існування границі $\lim\limits_{q} U_q(t, \tau)\varphi$ повністю доведено.

Згідно з твердженням 2.2 з гл. 6 [2], генератором $\Gamma(t)$ сім'ї $\tilde{U}(t, s)$ є оператор, що діє на функції φ з $D = \mathfrak{A}_0$ за правилом

$$\Gamma(t)\varphi = U_1'(t, t)\varphi,$$

$$\frac{d}{dt} U(t, s)\varphi = \frac{d}{dt} V(t, s) P(t - s)\varphi = V_1'(t, s)\big(P(t - s)\varphi\big) + V(t, s) P'(t - s)\varphi.$$

Тому $\Gamma(t)\varphi = U_1'(t, t)\varphi = L^{j(t)}\varphi + Z\varphi$. Існування розв'язку задачі Коші доведено. Єдиність розв'язку доводиться аналогічно тому, як це зроблено в теоремі 1.

Теорему доведено.

1. *Богданский Ю. В.* Задача Коши для существенно бесконечномерного параболического уравнения с переменными коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 6. – С. 663 – 670.
2. *Далецкий Ю. Л., Фомин С. В.* Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
3. *Bogdansky Yu. V.* Cauchy problem for the essentialy infinite-dimensional heat equation on a surface in Hilbert space // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 6. – С. 737 – 746.
4. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
5. *Богданский Ю. В.* Параболические уравнения с существенно бесконечномерными эллиптическими операторами. – Киев, 1977. – 50 с. – Деп. в УкрНИИНТИ, № 4Б269-77 Деп.

Одержано 08.07.2002