УДК 517.937

В. А. Літовченко (Чернівец. нац. ун-т)

КОРЕКТНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО РІВНЯННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

We describe spaces of test functions which are some generalization of S-type and W-type spaces. In these spaces, we establish the whole solvability of the Cauchy problem for an equation of integral form with the Bessel operator of fractional integro-differentiation.

Описано простори основних функцій, які є певним узагальненням просторів типу S та W, і у цих просторах встановлено цілковиту розв'язність задачі Коші для одного рівняння інтегрального вигляду з оператором Бесселя дробового інтегро-диференціювання.

Вступ. Поширення операцій інтегрування та диференціювання на дробові порядки дозволяє розглядати задачі Коші для рівнянь з молодшими членами, у яких має місце неперервне підсумовування псевдодиференціальних чи псевдоінтегро-диференціальних операторів за їх порядками на певних обмежених або напівобмежених проміжках (називатимемо такі рівняння рівняннями інтегрального вигляду).

У даній роботі розглядається задача Коші для одного рівняння інтегрального вигляду з оператором Бесселя дробового інтегро-диференціювання з додатним параметром [1], яке рівносильне рівнянню, що є близьким за структурою до рівняння теплопровідності.

Слід зазначити, що завдяки добре розвиненій теорії просторів типу S [2–4], де S — відомий простір Л. Шварца [5], у [6] вдалося встановити цілковиту розв'язність задачі Коші для рівняння теплопровідності у цих просторах, тобто описати всі початкові дані, при яких вона є коректно розв'язною, причому її розв'язок має ту саму властивість гладкості і поведінку при наближенні просторової змінної до нескінченності, що і фундаментальний розв'язок.

Близькість структур розглядуваного рівняння та рівняння теплопровідності дозволила використати ідею, реалізовану в [6] для одержання аналогічних результатів, а специфіка символу псевдодиференціального оператора, що розглядається у рівнянні, привела до появи просторів основних функцій, які є певним узагальненням просторів типу S та W.

1. Простори основних і узагальнених функцій. Нехай $\mathbf{N}, \mathbf{R}$ і $\mathbf{C}$ — відповідно множини натуральних, дійсних і комплексних чисел, $\mathbf{Z}_+ = \mathbf{N} \cup \{0\}$, $C^\infty(\mathbf{R})$ — простір усіх нескінченно диференційовних функцій, визначених на $\mathbf{R}$, $C^\infty(\mathbf{C})$ — простір цілих функцій, а $\mu(\cdot)$ — зростаюча неперервна функція на $[0; +\infty)$, причому $\mu(0) = 0$ і $\lim\limits_{x\to+\infty} \mu(x) = +\infty$.

Покладемо

$$M(x) = \int\limits_0^x \mu(\xi)\, d\xi, \qquad x \geq 0.$$

Функція $M(\cdot)$ має такі властивості:

1) вона диференційовна, зростаюча на $[0; +\infty)$;

2) $M(0) = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} M(x) = +\infty$;

2) $M(\cdot)$ — опукла функція, тобто:

а) $\forall \{x_1, x_2\} \subset [0; +\infty) : M(x_1) + M(x_2) \leq M(x_1 + x_2)$; б) $\forall x \in [0; +\infty) \ \ \forall n \in \mathbf{N}$: $nM(x) \leq M(nx)$.

Довизначимо $M(\cdot)$ на $(-\infty; 0)$ парним чином.

Поряд з функцією $M(\cdot)$ розглянемо аналогічну функцію $\Omega(\cdot)$, побудовану за функцією $\omega(\cdot)$, яка має такі самі властивості, що і функція $\mu(\cdot)$.

Для довільних $\alpha > 0$ і $\beta > 0$ покладемо

$$\overline{W}_M^{\beta} = \Big\{\varphi \in C^{\infty}(\mathbf{R}) \Big| \ \exists c > 0 \ \exists A > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall k \in \mathbf{Z}_+ \ \forall x \in \mathbf{R}:$$

$$\left|D^k\varphi(x)\right| \le cA^k k^{\beta k} e^{-M(\delta x)}\Big\},$$

$$\overline{W}_{\alpha}^{\Omega} = \Big\{\varphi \in C^{\infty}(\mathbf{C}) \Big| \ \exists c > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall z = x + iy \in \mathbf{C}:$$

$$\left|\varphi(z)\right| \le c\exp\left\{-\delta\left|z\right|^{1/\alpha} + \Omega(ay)\right\}\Big\}.$$

Неважко переконатися, що $\overline{W}_M^{\beta_1} \subset \overline{W}_M^{\beta_2}$, $\overline{W}_{\alpha_1}^{\Omega} \subset \overline{W}_{\alpha_2}^{\Omega}$ для всіх $0 < \beta_1 \le \beta_2$, $0 < \alpha_1 \le \alpha_2$, а також

$$\overline{W}_M^{\beta} \subset \begin{Bmatrix} W_M \\ S^{\beta} \end{Bmatrix} \subset S \subset \begin{Bmatrix} (W_M)' \\ (S^{\beta})' \end{Bmatrix} \subset \left(\overline{W}_M^{\beta}\right)',$$

$$\overline{W}_{\alpha}^{\Omega} \subset \begin{Bmatrix} W^{\Omega} \\ S_{\alpha} \end{Bmatrix} \subset S \subset \begin{Bmatrix} (W^{\Omega})' \\ (S_{\alpha})' \end{Bmatrix} \subset \left(\overline{W}_{\alpha}^{\Omega}\right)',$$

де W_M, W^{Ω} і W_M^{Ω} — простори типу W, побудовані Г. М. Гуревичем у [4]; S_{α}, S^{β} і S_{α}^{β} — простори типу S (тут через Φ' позначено простір, топологічно спряжений до Φ).

Слід зазначити, що у $\overline{W}_M^{\beta}$ містяться не лише цілі функції, як це вимагається для простору W_M^{Ω}, а символ $|\cdot|^{1/\alpha}$ простору $\overline{W}_{\alpha}^{\Omega}$ не завжди є функцією з властивостями, аналогічними до властивостей 1 – 3 функції $M(\cdot)$, що є обов'язковим для простору W_M^{Ω}. Отже, $\overline{W}_M^{\beta}$ і $\overline{W}_{\alpha}^{\Omega}$ є певним узагальненням відповідних просторів типу W. Зауважимо ще, що якщо $M(\cdot) = |\cdot|^{1/\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, то $\overline{W}_M^{\beta} \equiv S_{\alpha}^{\beta}$ для всіх $\beta > 0$.

Як і W_M^{Ω}, простір $\overline{W}_M^{\beta}$ $\left(\overline{W}_{\alpha}^{\Omega}\right)$ можна подати у вигляді об'єднання зліченно нормованих просторів $\overline{W}_{M,a}^{\beta,A}$ $\left(\overline{W}_{\alpha,a}^{\Omega,b}\right)$, де $\overline{W}_{M,a}^{\beta,A}$ $\left(\overline{W}_{\alpha,a}^{\Omega,b}\right)$ складається з тих функцій $\varphi \in \overline{W}_M^{\beta}$ $\left(\overline{W}_{\alpha}^{\Omega}\right)$, для яких виконуються нерівності

$$\left|D^k\varphi(x)\right| \le c\overline{A}^k k^{\beta k} \exp\{-M(\overline{a}x)\}, \quad k \in \mathbf{Z}_+, \quad x \in \mathbf{R}$$

$$\left(\left|\varphi(z)\right| \le c\exp\left\{-\overline{a}\left|z\right|^{1/\alpha} + \Omega(\overline{b}y)\right\}, \quad z = x + iy \in \mathbf{C}\right)$$

(тут $\overline{A}$ $(\overline{b})$ — довільна додатна стала, більша за A (b), $\overline{a}$ — довільна додатна стала, менша за a).

Якщо для $\varphi \in \overline{W}_{M,a}^{\beta,A}$ $\left(\overline{W}_{\alpha,a}^{\Omega,b}\right)$ покласти

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{\substack{x \in \mathbf{R} \\ k \in \mathbf{Z}_+}} \left\{\frac{\left|D^k\varphi(x)\right|}{(A+\delta)^k k^{\beta k} \exp\{-M(a(1-\rho)x)\}}\right\}$$

$$\left(\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{z\in\mathbf{C}}\left\{|\varphi(z)|\exp\left\{-\Omega\big(b(1+\delta)y\big) + a(1-\rho)|z|^{1/\alpha}\right\}\right\}\right),$$

$$\{\delta;\rho\}\subset\{1/n,\ n\geq 2\},$$

то міркуючи, як і у випадку просторів типу S та W, неважко переконатися, що з цими нормами простір $\overline{W}_{M,a}^{\beta,A}$ $\left(\overline{W}_{\alpha,a}^{\Omega,b}\right)$ стає повним, досконалим, зліченно нормованим.

Будемо говорити, що послідовність $\{\varphi_\nu,\ \nu\in\mathbf{N}\}\subset\overline{W}_M^\beta$ збігається до $\varphi\in\overline{W}_M^\beta$ при $\nu\to+\infty$ у цьому просторі (і позначати $\varphi_\nu\xrightarrow[\nu\to\infty]{\overline{W}_M^\beta}\varphi$), якщо:

1) $\forall\, k\in\mathbf{Z}_+:\ D^k\varphi_\nu(x)\xrightarrow[\nu\to\infty]{}D^k\varphi(x)$ рівномірно по x на кожному компакті $\mathbf{K}$ з $\mathbf{R}$;

2) $\exists c>0\ \ \exists A>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall k\in\mathbf{Z}_+\ \ \forall\nu\in\mathbf{N}\ \ \forall x\in\mathbf{R}:\ \left|D^k\varphi_\nu(x)\right|\leq cA^k k^{k\beta}\times$ $\times\exp\{-M(\delta x)\}$.

Аналогічно визначається збіжність і у просторі $\overline{W}_\alpha^\Omega$.

Правильним є таке твердження.

Теорема 1. *Нехай функції $M(\cdot),\Omega(\cdot)$ взаємодвоїсті за Юнгом. Тоді*

$$F\left[\overline{W}_{M,a}^{\beta,A}\right] = \overline{W}_{\beta,1/A}^{\Omega,1/a},\qquad F\left[\overline{W}_{\alpha,a}^{\Omega,b}\right] = \overline{W}_{M,1/b}^{\alpha,1/a}$$

(*тут F — оператор Фур'є; означення двоїстості за Юнгом див. у* [2]).

Доведення. Як і у випадку просторів типу S та W (див. [2, 3]), досить перевірити виконання таких включень:

$$F\left[\overline{W}_{M,a}^{\beta,A}\right]\subset\overline{W}_{\beta,1/A}^{\Omega,1/a},\qquad F\left[\overline{W}_{\alpha,a}^{\Omega,b}\right]\subset\overline{W}_{M,1/b}^{\alpha,1/a}. \tag{1}$$

Спочатку встановимо перше з них. Зважаючи на поведінку функції φ з $\overline{W}_{M,a}^{\beta,A}$ у околі нескінченно віддаленої точки, приходимо до висновку, що перетворення Фур'є $\psi(\cdot)$ цієї функції допускає продовження на комплексні значення $\xi+i\tau\in\mathbf{C}$ завдяки формулі

$$\psi(\xi+i\tau) = \int_{\mathbf{R}}\varphi(x)e^{ix(\xi+i\tau)}\,dx,$$

причому останній інтеграл збігається абсолютно.

Згідно з відомими правилами диференціювання невласних інтегралів з параметром одержуємо, що функція $\psi(s)$ диференційовна при кожному s з $\mathbf{C}$, тобто $\psi(\cdot)$ — ціла функція.

Оскільки $\varphi\in\overline{W}_{M,a}^{\beta,A}$, то

$$\left|s^k\psi(s)\right|\leq c(A+\delta)^k k^{k\beta}\int_{\mathbf{R}}e^{-M(a(1-\rho)x)+|x||\tau|}\,dx,$$

$$s\in\mathbf{C},\qquad\{\rho;\delta\}\subset\left(0;\frac{1}{2}\right),\qquad k\in\mathbf{Z}_+.$$

Звідси, застосовуючи нерівність Юнга

$$xy\leq M(x)+\Omega(y),\qquad\{x;y\}\subset\mathbf{R}_+, \tag{2}$$

і замінюючи у ній x на $\gamma|x|$, y на $|\tau|/\gamma$, де $\gamma=a(1-2\rho)$, отримуємо оцінку

$$\left|s^k\psi(s)\right| \le c_1(A+\delta)^k k^{k\beta} e^{\Omega((1/a+\rho_1)\tau)}, \tag{3}$$

$$s \in \mathbf{C}, \quad \{\rho; \rho_1; \delta\} \subset \left(0; \frac{1}{2}\right), \quad k \in \mathbf{Z}_+.$$

З нерівності (3) та з оцінки (3) з [2, с. 204] одержуємо

$$\left|\psi(s)\right| \le c_1 \inf_{k\in\mathbf{Z}_+} \left\{\frac{(A+\delta)^k k^{k\beta}}{|s|^k}\right\} e^{\Omega(\tau/\gamma)} \le c_2 e^{-(1-\delta_1)|s|^{1/\beta}/A+\Omega((1/a+\rho_1)\tau)},$$

де c_2, ρ_1 і δ_1 — додатні сталі, причому $\{\rho_1; \delta_1\} \subset (0; 1)$, $s \in \mathbf{C}$.

Таким чином, перше з включень (1) виконується.

Щодо виконання другого з включень (1), то, виходячи з властивостей функції $\psi(\cdot)$ з $\overline{W}_{a,a}^{\Omega,b}$, на підставі відомої теореми Коші можна у виразі перетворення Фур'є

$$\varphi(\xi) = \int_{\mathbf{R}} \psi(x) e^{ix\xi}\, dx, \quad \xi \in \mathbf{R},$$

шлях інтегрування замінити довільною горизонтальною прямою, не змінюючи при цьому результату:

$$\varphi(\xi) = \int_{\mathbf{R}} \psi(x+iy) e^{i(x+iy)\xi}\, dx, \quad \{\xi; y\} \subset \mathbf{R}.$$

З цієї рівності маємо

$$\left|D^k\varphi(\xi)\right| \le \int_{\mathbf{R}} \left|z^k\psi(z)\right| e^{-y\xi}\, dx \le$$

$$\le e^{-\xi y+\Omega(b(1+\delta)y)} \sup_{|z|\in\mathbf{R}_+} \left\{|z|^k e^{-\frac{a}{2}(1-\rho)|z|^{1/\alpha}}\right\} \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{a}{2}(1-\rho)|x|^{1/\alpha}}\, dx \le$$

$$\le c_3\left(\frac{1}{a}+\rho_2\right)^k k^{k\alpha} e^{-\xi y+\Omega(b(1+\delta)y)}, \tag{4}$$

де c_3 і ρ_2 — додатні сталі, $k \in \mathbf{Z}_+$, $\{\xi; y\} \subset \mathbf{R}$.

Досі величина y була довільною з $\mathbf{R}$. Виберемо тепер знак y так, щоб $y\xi = |y||\xi|$, $\xi \in \mathbf{R}$, а величину y так, щоб нерівність Юнга (2), у якій y замінимо на $b(1+\delta)|y|$, а x — на $\dfrac{|\xi|}{b(1+\delta)}$, перетворилась у рівність

$$|y||\xi| = M\left(\frac{|\xi|}{b(1+\delta)}\right) + \Omega\big(b(1+\delta)|y|\big).$$

Звідси та з нерівностей (4), замінивши $\dfrac{1}{b(1+\delta)}$ на $\dfrac{1}{b} - \delta_1$, де $\delta_1 > 0$ і $\delta > 0$, одержимо $F[\psi](\cdot) \subset \overline{W}_{M,1/b}^{\alpha,1/a}$. Тобто друге з включень (1) також виконується.

Теорему доведено.

На підставі теореми 1, зважаючи на те, що оператор F переводить обмежені множини розглядуваних просторів у обмежені множини відповідних просторів, а також те, що $\overline{W}_M^{\beta}$ $\left(\overline{W}_\alpha^{\Omega}\right)$ є об'єднанням просторів $\overline{W}_{M,a}^{\beta,A}$ $\left(\overline{W}_{\alpha,a}^{\Omega,b}\right)$, приходимо до такого твердження.

Теорема 2. *Якщо функції* $M(\cdot)$, $\Omega(\cdot)$ *взаємодвоїсті за Юнгом, то для* $\alpha > 0$, $\beta > 0$

$$F\left[\overline{W}_M^{\beta}\right] = \overline{W}_{\beta}^{\Omega}, \qquad F\left[\overline{W}_{\alpha}^{\Omega}\right] = \overline{W}_M^{\alpha},$$

причому оператор Фур'є F *на цих просторах є неперервним.*

Далі, нехай

$$P(x) = 2\,\frac{(a+x^2)^{\gamma/2}}{\ln(a+x^2)}, \qquad x \in \mathbf{R}, \qquad \alpha > 1, \qquad \gamma > 1,$$

причому a і γ — такі, що функція $\Omega_1(\cdot) = P(\cdot) - P(0)$ є опуклою на $[0; +\infty)$, а $\Phi \in \left\{W_{\Omega_1}; \overline{W}_{\Omega_1}^{\beta}, \beta \ge 1\right\}$.

Правильними є допоміжні твердження.

Лема 1. *Функція* $\Omega(\cdot)$ *має такі властивості:*

1) $\forall\,\delta \ge 1\ \ \forall x \in [0; +\infty) : \Omega(\delta x) \ge \delta\Omega(x)$;

2) $\forall\,\delta \in (0; 1)\ \ \forall x \in [0; +\infty) : \Omega(\delta x) \le \delta\Omega(x)$;

3) *якщо* $\Omega(\cdot) = \Omega_1(\cdot)$, *то* $\Omega(\delta x) \ge \delta^{\gamma}\Omega(x) - (1-\delta^{\gamma})P(0)$ *для всіх* $\delta \in (0; 1)$, $x \in \mathbf{R}$.

Доведення. Зауважимо, що для довільного $\delta > 0$

$$\Omega(\delta x) = \int_0^{\delta x} \omega(\xi)\,d\xi = \delta\int_0^{x} \omega(\delta\xi)\,d\xi.$$

Звідси, зважаючи на те, що $\omega(\cdot)$ — монотонно зростаюча функція на $[0; +\infty)$, одержуємо твердження 1 і 2 цієї леми.

У випадку, коли $\Omega(\cdot) = \Omega_1(\cdot)$, для $\delta \in (0; 1)$

$$\Omega(\delta x) = \frac{2\left(a+(\delta x)^2\right)^{\gamma/2}}{\ln\left(a+(\delta x)^2\right)} - P(0) \ge \frac{2\delta^{\gamma}\left(a/\delta^2 + x^2\right)^{\gamma/2}}{\ln(a+x^2)} - P(0) \ge$$

$$\ge \frac{2\delta^{\gamma}(a+x^2)^{\gamma/2}}{\ln(a+x^2)} - P(0) = \delta^{\gamma}\Omega(x) - (1-\delta^{\gamma})P(0), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Лему доведено.

Лема 2. *Для кожного фіксованого* $\delta > 0$ *функція* $\theta_{\delta}(\cdot) = e^{-\delta P(\cdot)}$ *належить простору* $\overline{W}_{\Omega_1}^{1}$.

Доведення. Оскільки функція θ_{δ}, $\delta > 0$, нескінченно диференційовна, то, зважаючи на твердження леми 1, для доведення досить перевірити, що

$$\exists\delta_1 > 0\ \ \exists c > 0\ \ \exists A > 0\ \ \forall k \in \mathbf{Z}_+\ \ \forall x \in \mathbf{R} : \left|D^k\theta_{\delta}(x)\right| \le cA^k k!\,\theta_{\delta_1}(x).$$

Виходячи з відомої формули Фаа де Бруно диференціювання складеної функції [7], одержуємо

$$\forall k \in \mathbf{Z}_+ : \left|D^k\theta_{\delta}(x)\right| \le$$

$$\le \sum_{p}^{k} \frac{k!}{i!\,j!\ldots h!}\,\delta^p\theta_{\delta}(x)\left|\frac{dP(x)}{1!\,dx}\right|^i\left|\frac{d^2P(x)}{2!\,dx^2}\right|^j\ldots\left|\frac{d^LP(x)}{L!\,dx^L}\right|^h, \tag{5}$$

$$\delta > 0, \qquad x \in \mathbf{R}$$

(тут знак суми поширюється на всі цілочисельні, невід'ємні розв'язки рівняння $k = i + 2j + \ldots + Lh$, а число $p = i + j + \ldots + h$).

Використовуючи ще раз формулу Фаа де Бруно, а також те, що

$$\frac{p!}{i!j!\ldots h!} \leq 2^k, \qquad \sum_p^k 1 \leq (2e)^k,$$

переконуємось у тому, що

$$\left| D^l\left(\left(\ln(a+x^2)\right)^{-1}\right) \right| \leq cl!A^l(a+x^2)^{-l/2}\left(\ln(a+x^2)\right)^{-1},$$

а

$$\left| D^l\left((a+x^2)\right)^{\gamma/2} \right| \leq c_2 l! A_1^l (a+x^2)^{(\gamma-l)/2},$$

де c, c_1, A і A_1 — додатні сталі, не залежні від $l \in \mathbf{Z}_+$. Тому

$$\forall m \in \mathbf{Z}_+ : \left| \frac{d^m P(x)}{m! dx^m} \right| \leq$$

$$\leq cc_1 \sum_{l=0}^m A^l \left(\ln(a+x^2)\right)^{-1} A_1^{m-l}(a+x^2)^{(\gamma-m)/2} \leq$$

$$\leq c_2 A_2^m \frac{(a+x^2)^{(\gamma-m)/2}}{\ln(a+x^2)}, \qquad x \in \mathbf{R} \tag{6}$$

(c_2, A_2 — додатні сталі, не залежні від m і x).

Отже,

$$\left| D^k \theta_\delta(x) \right| \leq c_3 A_3^k k! \theta_\delta(x) \sum_p^k \frac{(\delta P(x))^p}{i!j!\ldots h!} \leq$$

$$\leq c_3 A_3^k k! \theta_{\delta/2}(x) \sum_p^k \frac{\sup\limits_{t \geq 0}\left\{t^p e^{-t}\right\}}{i!j!\ldots h!} \leq c_3 A_3^k k! \theta_{\delta/2}(x) \sum_p^k \frac{p!}{i!j!\ldots h!} \leq$$

$$\leq c_3 A_4^k k! \theta_{\delta/2}(x), \qquad k \in \mathbf{Z}_+, \qquad x \in \mathbf{R}, \tag{7}$$

де c_3, A_3 — додатні сталі, не залежні від x, k і δ, що й потрібно було довести.

Лема 3. *Для кожного елемента* φ *з* Φ *існує таке* $\delta_0 \in (0; 1)$, *що для всіх* δ *з інтервалу* $(0; \delta_0)$ *добуток* $\theta_{-\delta}(\cdot)\varphi(\cdot)$ *належить простору* Φ.

Доведення. Покладемо спочатку $\Phi = \overline{W}_{\Omega_1}^\beta$. Тоді, зважаючи на твердження леми 1, досить переконатись у тому, що

$$\exists \delta_* > 0 \;\; \exists \delta_0 \in (0;1) \;\; \forall \delta \in (0; \delta_0) \;\; \exists c_1 > 0 \;\; \exists A_1 > 0 \;\; \forall l \in \mathbf{Z}_+ \;\; \forall x \in \mathbf{R}:$$

$$\left| D^l(\theta_{-\delta}(x)\varphi(x)) \right| \leq c_1 A_1^l l^{l\beta} \theta_{\delta_*}(x), \qquad \varphi \in \Phi. \tag{8}$$

Для довільного $l \in \mathbf{Z}_+$

$$\left| D^l\left(\theta_{-\delta}(x)\varphi(x)\right) \right| \leq \sum_{k=0}^l C_l^k \left| D^k \theta_{-\delta}(x) \right| \left| D^{l-k}\varphi(x) \right|, \qquad x \in \mathbf{R}$$

(C_l^k — біноміальний коефіцієнт), і оскільки $\varphi \in \Phi$, то існують такі додатні сталі c, A і $\delta_1 \in (0;1)$, що

$$\left| D^l\left(\theta_{-\delta}(x)\varphi(x)\right)\right| \le cA^l \sum_{k=0}^{l} (l-k)^{(l-k)\beta} e^{-\Omega_1(\delta_1 x)} \left| D^k \theta_{-\delta}(x)\right| \le$$

$$\le ce^{2a^{\gamma/2}/\ln a} A^l \sum_{k=0}^{l} (l-k)^{(l-k)\beta} \left(\left| D^k\theta_{-\delta}(x)\right| \theta_{\delta_1^\gamma}(x)\right) \qquad (9)$$

(ми скористалися твердженням 3 леми 1).

Міркуючи, як і при встановленні нерівностей (5), (6), одержуємо

$$\theta_{\delta_1^\gamma}(x)\left| D^k\theta_{-\delta}(x)\right| \le c_2 A_2^k k^k e^{-\left(\delta_1^\gamma/2-\delta\right)P(x)},$$

$$\delta > 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad k \in \mathbf{Z}_+,$$

де c_2, A_2 — додатні сталі, не залежні від k і x.

Звідси при $0 < \delta < \delta_1^\gamma/2$, а також з нерівностей (9) приходимо до (8).

Неважко переконатись у тому, що дане твердження є правильним й у випадку $\Phi = W_{\Omega_1}$.

Лему доведено.

Наступне твердження характеризує мультиплікатори у просторі Φ.

Теорема 3. *Для того щоб функція $c(\cdot)$ була мультиплікатором у просторі Φ, необхідно і достатньо, щоб для кожного фіксованого δ, $0 < \delta << 1$, добуток $c(\cdot)\theta_\delta(\cdot) \in \Phi$.*

Доведення. Необхідність очевидна. Доведемо *достатність*, тобто виконання таких умов:

1) $\forall \varphi \in \Phi : c(\cdot)\varphi(\cdot) \in \Phi$;

2) $\forall \{\varphi_\nu, \nu \in \mathbf{N}\} \subset \Phi$, $\varphi_\nu \xrightarrow[\nu\to+\infty]{\Phi} 0 : c(\cdot)\varphi_\nu(\cdot) \xrightarrow[\nu\to+\infty]{\Phi} 0$.

Згідно з твердженням леми 3

$$\forall \varphi \in \Phi \;\; \exists \delta_0 \in (0;1) \;\; \forall \delta \in (0;\delta_0) : c(\cdot)\varphi(\cdot) = \left(c(\cdot)\theta_\delta(\cdot)\right)\left(\theta_{-\delta}(\cdot)\varphi(\cdot)\right) \in \Phi,$$

як добуток функцій з Φ. Отже, умова 1 виконується.

Для доведення умови 2 у випадку, коли $\Phi = \overline{W}_{\Omega_1}^{\beta}$, досить показати, що:

I. $\forall k \in \mathbf{Z}_+ : \left| D^k\left(c(x)\varphi_\nu(x)\right)\right| \xrightarrow[\nu\to+\infty]{} 0$ рівномірно по x на кожному компакті $\mathbf{K}$ з $\mathbf{R}$;

II. $\exists \delta > 0 \;\; \exists c_1 > 0 \;\; \exists A_1 > 0 \;\; \forall \nu \in \mathbf{N} \;\; \forall k \in \mathbf{Z}_+ \;\; \forall x \in \mathbf{R} : \left| D^k\left(c(x)\varphi_\nu(x)\right)\right| \le$ $\le c_1 A_1^k k^{\beta k} e^{-\Omega_1(\delta x)}$.

Оскільки $\varphi_\nu \xrightarrow[\nu\to+\infty]{\Phi} 0$, то на підставі твердження 3 леми 1:

а) $\forall k \in \mathbf{Z}_+ : \left| D^k\varphi_\nu(x)\right| \xrightarrow[\nu\to+\infty]{} 0$ рівномірно по x на кожному компакті $\mathbf{K} \subset \mathbf{R}$;

б) $\forall \nu \in \mathbf{N} \;\; \forall k \in \mathbf{Z}_+ : \left| D^k\varphi_\nu(x)\right| \le c_0 A_0^k k^{\beta k}\theta_{\delta_0}(x)$, $x \in \mathbf{R}$,

де c_0, A_0, δ_0 — додатні сталі, які не залежать від x, k і ν.

Умова I виконується. Справді, згідно з умовою а),

$$\forall k \in \mathbf{Z}_+ : \left| D^k\left(c(x)\varphi_\nu(x)\right)\right| =$$

$$= \sum_{l=0}^{k} C_k^l \sup_{x\in\mathbf{K}\subset\mathbf{R}} \left(\left|D^l c(x)\right|\right)\left|D^{k-l}\varphi_\nu(x)\right| \xrightarrow[\nu\to+\infty]{} 0$$

рівномірно по x на довільному компакті $\mathbf{K}\subset\mathbf{R}$.

Доведемо виконання умови II. Завдяки умові б) та міркуванням, проведеним при встановленні нерівності (8), одержуємо

$$\left|D^l\left(\theta_{-\delta}(x)\varphi_\nu(x)\right)\right| \le c_2 A_2^l l^{\beta l} e^{-(\delta_0/2-\delta)P(x)},$$

де c_2, A_2 — додатні сталі, які не залежать від $l\in\mathbf{Z}_+$ і $x\in\mathbf{R}$, а $0<\delta<\delta_0/2$.

Звідси, зважаючи на те, що $c(\cdot)\theta_\delta(\cdot)\in\Phi$, $0<\delta<<1$, та на твердження 2 леми 1, приходимо до наступного:

$$\forall\nu\in\mathbf{N}\ \forall k\in\mathbf{Z}_+\ \forall x\in\mathbf{R}: \left|D^k\left(c(x)\varphi_\nu(x)\right)\right| \le$$

$$\le \sum_{l=0}^{k} C_k^l \left|D^{k-l}\left(c(x)\theta_\delta(x)\right)\right|\left|D^l\left(\theta_{-\delta}(x)\varphi_\nu(x)\right)\right| \le c_3 A_3^k k^{\beta k} e^{-\Omega_1(\delta_3 x)},$$

де c_3, A_3, δ_3 — додатні сталі, які не залежать від ν, k і x. Отже, умова II виконується.

У випадку, коли $\Phi = W_{\Omega_1}$, виконання умови II доводиться аналогічно.

Теорему доведено.

Наступні допоміжні твердження характеризують властивості функції $\theta_\delta(\cdot)$ відносно параметра $\delta>0$.

Лема 4. *Для кожного елемента* φ *з* Φ *граничне співвідношення* $\theta_\delta(\cdot)\times\varphi(\cdot)\xrightarrow[\delta\to+0]{}\varphi(\cdot)$ *виконується у розумінні топології простору* Φ.

Доведення. Нехай $\Phi = \overline{W}_{\Omega_1}^{\beta}$, тоді досить перевірити виконання таких умов:

I. $\forall k\in\mathbf{Z}_+: D^k\left(\theta_\delta(x)\varphi(x)\right)\xrightarrow[\delta\to+0]{} D^k\varphi(x)$ рівномірно по x на кожному компакті $\mathbf{K}$ з $\mathbf{R}$;

II. $\exists\delta_1>0\ \exists c_1>0\ \exists A_1>0\ \forall\delta\in(0;1)\ \forall k\in\mathbf{Z}_+\ \forall x\in\mathbf{R}: \left|D^k\left(\theta_\delta(x)\varphi(x)\right)\right| \le$ $\le c_1 A_1^k k^{\beta k} e^{-\Omega_1(\delta_1 x)}$.

Зазначимо, що

$$D^k\left(\theta_\delta(x)\varphi(x)\right) = \theta_\delta(x)D^k\varphi(x) + \sum_{l=1}^{k} C_k^l D^l\theta_\delta(x) D^{k-l}\varphi(x), \tag{10}$$

$$k\in\mathbf{Z}_+,\quad x\in\mathbf{R},$$

і оскільки для кожної компактної множини $\mathbf{K}$ з $\mathbf{R}$

$$D^l\theta_\delta(x)D^{k-l}\varphi(x)\xrightarrow[\delta\to+0]{} 0,\qquad \theta_\delta(x)\xrightarrow[\delta\to+0]{} 1$$

рівномірно по $x\in\mathbf{K}$ для всіх $l\in\{1;\ldots;k\}$, то умова I виконується.

Доведемо виконання умови II. Оскільки $\varphi\in\Phi$, то з огляду на твердження леми 1

$$\exists\delta_0>0\ \exists c_0>0\ \exists A_0>0\ \forall k\in\mathbf{Z}_+\ \forall x\in\mathbf{R}: \left|D^k\varphi(x)\right| \le c_0 A_0^k k^{\beta k}\theta_{\delta_0}(x).$$

Звідси, а також з рівності (10), враховуючи нерівність (7), одержуємо оцінку

$$\left|D^k\big(\theta_\delta(x)\varphi(x)\big)\right| \le \sum_{l=0}^{k} C_k^l \left|D^l\theta_\delta(x)\right|\left|D^{k-l}\varphi(x)\right| \le$$

$$\le c_0 c_3 2^k \sum_{l=0}^{k} A_4^l l^l \theta_{\delta/2}(x) A_0^{k-l}(k-l)^{\beta(k-l)}\theta_{\delta_0}(x) \le$$

$$\le c_4 A_5^k k^{\beta k}\theta_{\delta_0}(x), \quad k\in \mathbf{Z}_+, \quad x\in\mathbf{R}, \quad \delta>0$$

(тут c_4, A_5, δ_0 — додатні сталі, не залежні від k, x і δ), з якої на підставі леми 1 отримуємо умову II.

У випадку, коли $\Phi = W_{\Omega_1}$, виконання відповідної умови II доводиться аналогічно.

Лему доведено.

Лема 5. *Функція* $\theta_t(\cdot)$ *диференційовна по* $t>0$ *у розумінні топології простору* Φ.

Доведення. Досить переконатись у тому, що граничне співвідношення

$$\psi_{\Delta t}(t,x) \equiv \frac{1}{\Delta t}\left[\theta_{(t+\Delta t)}(x) - \theta_t(x)\right] \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} P(x)\theta_t(x)$$

виконується у тому розумінні, що:

I. $\forall k\in\mathbf{Z}_+\ \forall t>0:\ D_x^k\psi_{\Delta t}(t,x) \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} D_x^k\big(P(x)\theta_t(x)\big)$ рівномірно по x на кожному компакті $\mathbf{K}$ з $\mathbf{R}$;

II. $\forall t>0\ \exists c_3>0\ \ \exists A_3>0\ \ \exists \delta_3>0\ \ \forall k\in\mathbf{Z}_+\ \forall x\in\mathbf{R}\ \ \forall \Delta t\in(-1;1)$, $|\Delta t|\le t/2:\ \left|D_x^k\psi_{\Delta t}(t,x)\right| \le c_3 A_3^k k^{\beta k} e^{-\Omega_1(\delta_3 x)}$, якщо $\Phi = \overline{W}_{\Omega_1}^{\beta}$.

Функція $\theta_t(\cdot)$, $t>0$, диференційовна по t у звичайному розумінні, отже,

$$\psi_{\Delta t}(t,x) = P(x)\theta_{(t+\eta\Delta t)}(x),$$

$$t+\eta\Delta t>0, \quad \eta\in(0;1), \quad t>0, \quad x\in\mathbf{R}.$$

Таким чином,

$$D_x^k\psi_{\Delta t}(t,x) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j D_x^j P(x) D_x^{k-j}\theta_{(t+\eta\Delta t)}(x), \tag{11}$$

$$t+\eta\Delta t>0, \quad \eta\in(0;1), \quad \{t;x\}\subset\mathbf{R}, \quad k\in\mathbf{Z}_+.$$

Оскільки

$$D_x^j P(x) D_x^{k-j}\theta_{(t+\eta\Delta t)}(x) \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} D_x^j P(x) D_x^{k-j}\theta_t(x)$$

рівномірно по x на кожному компакті $\mathbf{K}$ з $\mathbf{R}$, то з (11) приходимо до умови I.

Виконання умови II стає очевидним, виходячи з (11), якщо врахувати нерівності типу (6), (7), а також твердження леми 1.

У випадку, коли $\Phi = W_{\Omega_1}$, виконання відповідної умови II доводиться аналогічно.

Лему доведено.

Зважаючи на те, що оператор оберненого перетворення Фур'є F^{-1} є неперервним у просторі Φ (див. [2], а також теорему 2), з твердження леми 5 приходимо до такого наслідку.

***Наслідок* 1.** *Для кожного* $t>0$ *є правильною рівність*

$$F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}\theta_t(\cdot)\right] = \frac{\partial}{\partial t}F^{-1}[\theta_t(\cdot)].$$

Далі через Φ' позначимо сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів, визначених на Φ зі слабкою збіжністю.

Перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in \Phi'$ визначимо співвідношенням

$$\langle F[f], F[\varphi]\rangle = 2\pi\langle f, \varphi\rangle, \quad \varphi \in \Phi.$$

2. Задача Коші. Оператор $(bE - D^2)^{\tau/2}$, $\tau \in \mathbf{R}$, дія якого на елементах простору S визначається так:

$$\forall f \in S: (bE - D^2)^{\tau/2} f = F^{-1}\left[(b + \xi^2)^{\tau/2} F[f]\right],$$

де $b > 0$, а E — одиничний оператор, будемо називати оператором Бесселя дробового інтегро-диференціювання у просторі S з додатним параметром [1].

Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} + \int_{-\infty}^{\gamma}\left(\left(aE - D^2\right)^{\tau/2} U\right)(t, x)\, d\tau = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}, \tag{12}$$

де $\gamma > 0$, $(aE - D^2)^{\tau/2}$ — оператор Бесселя дробового інтегро-диференціювання у просторі S, з параметром $a > 1$, причому γ і a такі, що функція $\Omega_1(\cdot)$ з попереднього пункту є опуклою.

Якщо для рівняння (12) задати початкову умову

$$U(t, \cdot)\big|_{t=0} = f, \quad f \in \tilde{\Phi}', \tag{13}$$

де $\tilde{\Phi} \equiv F[\Phi]$ — простір Фур'є-образів, тобто

$$F[\Phi] = \left\{F[\varphi](\sigma) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(x) e^{ix\sigma}\, dx, \varphi \in \Phi\right\},$$

то під розв'язком задачі Коші (12), (13) розумітимемо функцію U, яка задовольняє рівняння (12) і початкову умову (13) у тому розумінні, що

$$U(t, \cdot) \xrightarrow[t \to +0]{\tilde{\Phi}'} f.$$

Позначимо через $G_t(\cdot)$ обернене перетворення Фур'є функції $\theta_t(\cdot)$, тобто

$$G_t(x) = F^{-1}[\theta_t(\xi)](t, x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Згідно з лемою 2 $G_t(\cdot) \in F[\Phi]$ при кожному $t > 0$.

Правильним є таке твердження.

Теорема 4. *Нехай функції* $M_1(\cdot)$ *і* $\Omega_1(\cdot)$ *є взаємодвоїстими за Юнгом. Тоді для того щоб задача Коші* (12), (13) *була коректно розв'язною* (*тобто мала єдиний розв'язок, який неперервно залежить від початкових даних*) *і*:

1) *її розв'язок* $U(t, \cdot)$ *при кожному фіксованому* $t > 0$ *належав простору* $\Psi \in \left\{W^{M_1}; \overline{W}_{\beta}^{M_1}, \beta \geq 1\right\}$;

2) $\frac{\partial}{\partial t}F[U] = F\left[\frac{\partial U}{\partial t}\right]$, $t > 0$,

необхідно і достатньо, щоб $F[f]$ *було мультиплікатором у просторі* Φ.

При цьому завжди виконуватиметься рівність

$$U(t,x) = f * G_t(x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}$$

(*тут* $*$ — *операція згортки*).

Доведення. Перш за все встановимо, що

$$\forall f \in S\colon \int\limits_{-\infty}^{\gamma} \Big((aE - D^2)^{\tau/2} f \Big)(x)\, d\tau = F^{-1}\big[P(\xi)\, F[f](\xi)\big](x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Для цього досить переконатись у тому, що

$$\int\limits_{-\infty}^{\gamma} F^{-1}\Big[(a+\xi^2)^{\tau/2} F[f](\xi)\Big](x)\, d\tau =$$

$$= F^{-1}\left[\int\limits_{-\infty}^{\gamma} (a+\xi^2)^{\tau/2}\, d\tau\, F[f](\xi)\right](x), \quad f \in S, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{14}$$

Але рівність (14) стає очевидною, якщо зважити на те, що функція $(a + \xi^2)^{\tau/2} e^{-ix\xi} F[f](\xi)$ вимірна (як неперервна) за сукупністю змінних $\tau \in (-\infty; \gamma]$, $\{x, \xi\} \in \mathbf{R}$, а інтеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\gamma} \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi} (a+\xi^2)^{\tau/2} F[f](\xi)\, d\tau\, d\xi$$

абсолютно збігається рівномірно по $x \in \mathbf{R}$. Справді,

$$\int\limits_{-\infty}^{\gamma} \int\limits_{\mathbf{R}} \left| e^{-ix\xi} (a+\xi^2)^{\tau/2} F[f](\xi) \right| d\tau\, d\xi \le \int\limits_{-\infty}^{0} \int\limits_{\mathbf{R}} \Big| a^{\tau/2} \big| F[f](\xi) \big| \Big|\, d\tau\, d\xi \, +$$

$$+ \int\limits_{0}^{\gamma} \int\limits_{\mathbf{R}} (a+\xi^2)^{\gamma/2} \big| F[f](\xi) \big|\, d\tau\, d\xi < +\infty, \quad x \in \mathbf{R}, \quad f \in S.$$

Таким чином, рівняння (12) рівносильне рівнянню

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} + F^{-1}\big[P(\xi)\, F[U](t,\xi)\big](t,x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}, \tag{15}$$

тобто задача Коші (12), (13) є рівносильною задачі Коші (15), (13).

Далі, оскільки нас цікавлять розв'язки рівняння (15), які при кожному фіксованому $t > 0$ є елементами з простору $\Psi = \tilde{\Phi}$ і по t задовольняють умову 2 даної теореми, то, врахувавши те, що відображення

$$F\Big(F^{-1}\Big)\colon \overline{W}_{\Omega_1}^{\beta} \to \overline{W}_{\beta}^{M_1}, \quad F\Big(F^{-1}\Big)\colon W_{\Omega_1} \to W^{M_1}, \quad \beta > 0,$$

є взаємно однозначними і неперервними (див. теорему 2 і [2]), одержуємо рівносильність рівняння (15) з рівнянням

$$\frac{\partial \tilde{U}(t,\xi)}{\partial t} + P(\xi)\tilde{U}(t,\xi) = 0, \quad t > 0, \quad \xi \in \mathbf{R} \tag{16}$$

(тут і далі $\tilde{Y} = F[Y]$), причому початкова умова (13) виконуватиметься тоді і тільки тоді, коли

$$\tilde{U}(t,\cdot) \xrightarrow[t \to +0]{\Phi'} \tilde{f}. \tag{17}$$

Отже, питання про коректну розв'язність задачі Коші (12), (13) у просторі Ψ рівносильне питанню про коректну розв'язність задачі Коші (16), (17) у просторі Φ.

Доведемо *необхідність*. Для цього досить показати, що якщо задача Коші (16), (17) коректно розв'язна, то $\tilde{f}$ — мультиплікатор у Φ.

Зазначимо, що рівняння (16) — звичайне диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними, загальний розв'язок якого

$$\tilde{U}(t,\xi) = c(\xi)\theta_t(\xi), \qquad t > 0, \qquad \xi \in \mathbf{R}. \tag{18}$$

Оскільки $\tilde{U}(t,\cdot) \in \Phi$ при кожному фіксованому $t > 0$, то згідно з теоремою 3 функція $c(\cdot)$ є мультиплікатором у просторі Φ. Зважаючи на твердження леми 4, з умови (17) та з рівності (18) знаходимо

$$\forall \varphi \in \Phi\colon \langle c(\cdot), \varphi(\cdot)\rangle = \left\langle \tilde{f}(\cdot), \varphi(\cdot)\right\rangle.$$

Звідси на підставі єдиності розв'язку задачі Коші (16), (17) переконуємось у тому, що $\tilde{f}$ — регулярний функціонал, породжений мультиплікатором у просторі Φ. Необхідність доведено.

Доведемо *достатність*. Нехай $F[f]$ — мультиплікатор у Φ, тоді (див. лему 2) функція $\tilde{U}(t,\cdot) = \tilde{f}(\cdot)\theta_t(\cdot)$ є елементом з простору Φ при кожному $t > 0$, причому вона є розв'язком задачі Коші (16), (17). Переконаємося, що цей розв'язок єдиний у Φ. Для цього припустимо, що існує у цьому просторі ще один розв'язок $\tilde{U}_1$ цієї задачі. Виходячи зі структури загального розв'язку (18) рівняння (16), маємо $\tilde{U}_1(t,\cdot) = c_1(\cdot)\theta_t(\cdot)$, $t > 0$. Оскільки $\tilde{U}_1(t,\cdot) \in \Phi$, $t > 0$, то функція $c_1(\cdot)$ — мультиплікатор у Φ (теорема 3).

Розглянемо функцію $V(t,\cdot) = \tilde{U}(t,\cdot) - \tilde{U}_1(t,\cdot)$, $t > 0$, яка також є розв'язком рівняння (16), причому ця функція задовольняє умову $V(t,\cdot) \xrightarrow[t\to+0]{\Phi'} 0$. З цієї умови, оскільки різниця мультиплікаторів у просторі Φ є мультиплікатором у цьому просторі, на підставі леми 4 отримаємо

$$\langle V(t,\cdot), \varphi(\cdot)\rangle \xrightarrow[t\to+0]{} \left\langle \tilde{f}(\cdot) - c_1(\cdot), \varphi(\cdot)\right\rangle = \langle 0, \varphi(\cdot)\rangle, \qquad \varphi \in \Phi.$$

Таким чином,

$$\forall \varphi \in \Phi\colon \left\langle \tilde{f}(\cdot) - c_1(\cdot), \varphi(\cdot)\right\rangle = 0.$$

Покладемо в останній рівності

$$\varphi(\cdot) = \overline{\left(\tilde{f}(\cdot) - c_1(\cdot)\right)}\theta_1(\cdot) \in \Phi$$

й одержимо

$$\int\limits_{\mathbf{R}} \overline{\left(\tilde{f}(\xi) - c_1(\xi)\right)^2}\,\theta_1(\xi)\,d\xi = 0$$

(тут $\overline{g}(\cdot)$ — функція, комплексно-спряжена до $g(\cdot)$). Звідси $\tilde{f}(\cdot) = c_1(\cdot)$ майже скрізь на $\mathbf{R}$. Але оскільки $\tilde{f}(\cdot)$ і $c_1(\cdot)$ — нескінченно диференційовні функції, то ця рівність справджується скрізь на $\mathbf{R}$, тобто $\tilde{U}_1(t,\xi) \equiv U(t,\xi)$, $t > 0$, $\xi \in \mathbf{R}$.

Отже, задача Коші (16), (17) має єдиний розв'язок у просторі Φ.

Щодо умови 2 цієї теореми, то виконання її стає очевидним, якщо взяти до уваги наслідок 1.

Нарешті, зважаючи на те, що

$$U(t,\cdot) = F^{-1}\Big[\tilde{U}(t,\xi)\Big] = F^{-1}\Big[\tilde{f}(\xi)\theta_t(\xi)\Big], \quad t > 0,$$

і беручи до уваги твердження теореми 1 з [8], приходимо до висновку, що

$$U(t,\cdot) = f * G_t(\cdot), \quad t > 0.$$

Розв'язок U задачі Коші (12), (13) неперервно залежить від початкових даних задачі, оскільки відповідний розв'язок $\tilde{U}$ має таку властивість, а F^{-1} є неперервним оператором з Φ у $\tilde{\Phi}$.

Теорему доведено.

На завершення зазначимо, що наведені тут твердження мають місце й у випадку n-вимірного евклідового простору $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, якщо розглянуті тут простори $\overline{W}_{\Omega}^{\beta}$, $\overline{W}_{\alpha}^{M}$ поширити на функції від n незалежних змінних за аналогією до відповідних просторів типу $S(\mathbf{R}^n)$ та $W(\mathbf{R}^n)$ [2, 3], а замість D^2 у рівнянні (12) розглядати n-вимірний оператор Лапласа.

1. *Літовченко В. А.* Бесселеве дробове інтегродиференціювання з додатним параметром // Наук. вісн. Чернів. у-ту. Математика. – 2002. – Вип. 134. – С. 65 – 70.
2. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.
3. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.
4. *Гуревич Б. Л.* Новые пространства основных и обобщенных функций и проблема Коши для конечно-разностных систем // Докл. АН СССР. – 1954. – **99**, № 6. – С. 893 – 896.
5. *Schwartz L.* Theorie des distributions // Acta. sci industr. – 1950. – **1**, № 1091.
6. *Літовченко В. А.* Коректна розв'язність однієї задачі Коші // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 8. – С. 1067 – 1076.
7. *Гурса Э.* Курс математического анализа. – М.; Л.: Гостехиздат, 1933. – Т. 1, ч. 1. – 368 с.
8. *Борок В. М.* Решение задачи Коши для некоторых типов систем линейных уравнений в частных производных // Докл. АН СССР. – 1954. – **97**, № 6. – С. 949 – 952.

Одержано 26.11.2002