УДК 517.9

Э. Кенне (Ун-т Чанге, Камерун)

АСИМПТОТИЧЕСКИ КОРРЕКТНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

In the domain defined as the Cartesian product of an interval and a line, we investigate two-point boundary-value problem for partial differential equations. We establish conditions, under which the problem is asymptotically correct in the class of finite differentiable functions.

В області, що є декартовим добутком відрізка і прямої, вивчається двоточкова гранична задача для диференціальних рівнянь з частинними похідними. Встановлено умови асимптотичної коректності задачі у класі обмежених диференційовних функцій.

Введение. В настоящей статье, которая является обобщением и развитием работ [1 – 5], исследуется вопрос об асимптотической корректности задачи с нелокальными граничными условиями для уравнений с частными производными.

В области $\Pi = \mathbf{R} \times [0, Y]$ рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, y), \qquad (x, y) \in \Pi, \tag{1}$$

$$A u(x, 0) + B u(x, Y) + C\int_0^Y u(x, y)\,dy = u_0(x), \qquad x \in \mathbf{R}, \tag{2}$$

где $A, B, C \in \mathbf{C}$. В уравнении (1) $P(s)$ — произвольный полином с постоянными (комплексными) коэффициентами. При этом будем считать задачу (1), (2) нелокальной, т. е. отличной от задачи Коши. Внимание к таким задачам в последнее время обусловлено, с одной стороны, тем, что подобные задачи возникают при исследовании прикладных вопросов, а с другой — установленным фактом, что для многих уравнений в частных производных в ряде областей корректные задачи возможны лишь при нелокальных граничных условиях [7, 8].

Обозначим

$$H_m = \left\{\varphi \in C^m(\mathbf{R}),\ \|\varphi\|_m = \max_{0\le k\le m}\ \sup_{\mathbf{R}}\left|\varphi^{(k)}(x)\right| < +\infty\right\}, \qquad H = \bigcup_{m\ge 0} H_m.$$

Определение 1. *Задача* (1), (2) *называется корректной* (*в* H), *если для любого* $m \ge 0$ *существует* $l \ge 0$ *такое, что для любой* $u_0(x) \in H_l$ *существует единственное решение* $u(x, y)$ *задачи* (1), (2), *которое при любом* $y \in [0, Y]$ *принадлежит пространству* H_m, *причем*

$$\sup_{[0, Y]} \|u(x, t)\|_m \le C\|u_0(x)\|_l.$$

В работе [1] доказана следующая теорема о корректности в H задачи (1), (2): эта задача при условии $|AB| + |C| > 0$ корректна тогда и только тогда, когда $\Delta_Y(\sigma) \ne 0$, $\sigma \in \mathbf{R}$, где

$$\Delta_Y(\sigma) = \begin{cases} A + B\exp\{YP(i\sigma)\} + C\dfrac{\exp\{YP(i\sigma)\} - 1}{P(i\sigma)}, & P(i\sigma) \ne 0; \\ A + B + CY, & P(i\sigma) = 0. \end{cases}$$

В настоящей работе найдены критерии асимптотической корректности задачи (1), (2) при $Y \to +0$ (т. е. ее корректности при всех достаточно малых $Y > 0$) и $Y \to +\infty$ (ее корректности при всех достаточно больших $Y > 0$). В качестве следствия полученных результатов отметим тот факт, что для любого уравнения вида (1) в любой полосе Π существует корректная задача (1), (2).

Определение 2. *Задачу* (1), (2) *назовем асимптотически корректной при* $Y \to +0$ *или* AK_0*-задачей, если существует такое* $Y_0 > 0$, *что при любом значении* $Y \in \,]\,0, Y_0]$ *задача* (1), (2) *корректна.*

Определение 3. *Задачу* (1), (2) *назовем асимптотически корректной при* $Y \to +\infty$ *или* AK_∞*-задачей, если существует такое* $Y_0 > 0$, *что при любом значении* $Y > Y_0$ *задача* (1), (2) *корректна.*

В случае задачи Коши $(AB = C = 0)$ условие (A) И. Г. Петровского [9] показывает, что факт корректности этой задачи не зависит от ширины полосы Y, а зависит лишь от алгебраических свойств полинома $P(s)$, т. е. условие (A) является одновременно критерием AK_0- и AK_∞-задач. Поэтому будем считать, что $|AB| + |C| > 0$.

В первом пункте для задачи (1), (2) даны критерии асимптотической корректности при $Y \to +0$, а во втором — при $Y \to +\infty$. Доказательство полученных результатов базируется на критерии корректной разрешимости задачи (1), (2).

Введем следующие обозначения:

$$P_1(\sigma) \equiv \operatorname{Re}(P(i\sigma)), \qquad P_2(\sigma) \equiv \operatorname{Im}(P(i\sigma)),$$
$$P_3(\sigma) \equiv C - AP(i\sigma), \qquad P_4(\sigma) \equiv C + BP(i\sigma),$$
$$P_5(\sigma) \equiv |P_3(\sigma)|^2 - |P_4(\sigma)|^2, \qquad N[f] = \{\sigma \in \mathbf{R} : f(\sigma) = 0\},$$
$$N_i = N[P_i], \qquad i = 1, 2, \ldots, 5, \qquad \alpha = |A| - |B|,$$
$$\mathbf{R}_a = \{\sigma \in \mathbf{R} : |\sigma| \ge a > 0\}, \qquad \mathbf{R}_a^{\pm} = \{\sigma \in \mathbf{R}_a : \pm\sigma \ge 0\},$$
$$\beta_2 = \operatorname{Im} \overline{C}(A + B), \qquad P_j(\sigma) \equiv (\sigma - \sigma_0)^{q_j} \tilde{P}_j(\sigma),$$

где $\sigma_0 \in \mathbf{R}$ произвольно, а числа $q_j \in \mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$ и полиномы $\tilde{P}_j(\sigma)$ зависят от σ_0, причем $\tilde{P}_j(\sigma_0) \ne 0$, если $P_j(\sigma) \ne \text{const} = 0$. Функция $\arg(z)$ при $0 \ne z = \sigma + i\tau \in \mathbf{C}$ определяется формулой

$$\arg(z) = \begin{cases} (\pi \operatorname{sign} \tau)/2, & \sigma = 0; \\ \pi(1 - \operatorname{sign} \sigma)/2, & \tau = 0; \\ \arctan(\tau/\sigma) + \dfrac{1}{2}[(1 - \operatorname{sign} \sigma)\pi \operatorname{sign} \tau], & \sigma\tau \ne 0. \end{cases}$$

Если $z = \sigma + i\tau \in \mathbf{C}$, то $\bar{z} = \sigma - i\tau$.

1. AK_0-задача. Будем рассматривать следующие случаи:

$$P(s) \equiv P = \text{const};$$
$$A + B = 0, \qquad P(s) \ne \text{const};$$
$$A + B \ne 0, \qquad C = 0, \qquad P(s) \ne \text{const};$$
$$C(A + B) \ne 0, \qquad P_1(\sigma) = \operatorname{Re}(P(s)) \equiv 0, \qquad P_2(\sigma) = \operatorname{Im}(P(s)) \ne \text{const};$$
$$C(A + B) \ne 0, \qquad P_1(\sigma) = \operatorname{Re}(P(s)) \ne \text{const}, \qquad P_2(\sigma) = \operatorname{Im}(P(s)) \equiv 0;$$
$$C(A + B)P_1(\sigma)P_2(\sigma) \ne \text{const} = 0, \qquad P(s) \ne \text{const}.$$

1.1. Случай $P(s) \equiv P = \text{const}$.

Теорема 1. *Пусть* $P(s) \equiv P = \text{const}$. *Для того чтобы задача* (1), (2) *была* AK_0*-задачей, необходимо и достаточно, чтобы* $|A + B| + |C + BP| > 0$.

Доказательство. В рассматриваемом случае для любого $Y > 0$ имеем

$$\Delta_Y(\sigma) \equiv \Delta_Y = \begin{cases} \dfrac{(C+BP)\exp\{YP\}-(C-AP)}{P}, & P \neq 0; \\ A+B+CY, & P=0. \end{cases}$$

Необходимость. Если $|A+B|+|C+BP|=0$, то при $P=0$ $\Delta_Y = A+B+CY=0$, и задача (1), (2) некорректна, каково бы ни было $Y>0$.

Пусть $P \neq 0$. Тогда $\Delta_Y = A+B+(C+BP)\dfrac{\exp\{YP\}-1}{P}=0$, и задача (1), (2) некорректна, каково бы ни было $Y>0$.

Достаточность. Пусть $|A+B|+|C+BP|>0$. Если $P=0$, то $\Delta_Y = A+B+CY$, $Y>0$, и $\Delta_Y \neq 0$ при всех $Y>0$, кроме, возможно, $Y=-(A+B)/C$. Это означает, что задача (1), (2) является AK_0-задачей.

Пусть $P \neq 0$. Тогда для любого $Y>0$ $\Delta_Y = 0 \Leftrightarrow (C+BP)\exp\{YP\}-(C-AP)=0$. Если $C+BP=0$, то $A+B\neq 0$, и тогда $\Delta_Y = A+B \neq 0$. Если $C-AP=0$, то имеем $\Delta_Y = (A+B)\exp\{YP\} \neq 0$. Действительно, если $A+B=0$, то $C+BP=C-AP=0$, и тогда $|A+B|+|C+BP|=0$, что противоречит предположению.

Рассмотрим случай, когда $P(C+BP)(C-AP)\neq 0$. В этом случае

$$\Delta_Y(\sigma) = 0 \Leftrightarrow YP = \mathrm{Ln}\frac{C-AP}{C+BP} = \ln\left|\frac{C-AP}{C+BP}\right| + i(\varphi_0+2k\pi), \quad z \in \mathbf{Z},$$

$$\varphi_0 = \arg\frac{C-AP}{C+BP}.$$

Отсюда приходим к выводу, что задача (1), (2) может быть некорректна лишь для некоторой последовательности $Y_k \to +\infty$. Поэтому она является AK_0-задачей. Тем самым теорема доказана.

***1. 2. Случай* $\mathbf{A+B=0}$, $\mathbf{P(s) \neq}$ const.**

Теорема 2. *Пусть* $A+B=0$, $P(s)\neq \mathrm{const}$. *Задача* (1), (2) *является* AK_0-*задачей тогда и только тогда, когда выполнены два условия*:

а) $N_4 = \{\sigma \in \mathbf{R} : C+BP(i\sigma)=0\} = \varnothing$;

б) $P_1(\sigma) \equiv \mathrm{Re}\,(P(i\sigma)) \neq \mathrm{const} = 0$.

Доказательство. *Необходимость.* Если $\sigma_0 \in N_4$, то $\sigma_0 \in N_3 = \{\sigma \in \mathbf{R} : C-AP(i\sigma)=0\}$ и $\Delta_Y(\sigma_0)=0$ при любом значении $Y>0$. Если $P_1(\sigma)\equiv 0$, то выбираем $Y>0$ и $\sigma \in \mathbf{R}$ из условия $YP_2(\sigma)/2\pi \in \mathbf{Z}$. Тогда $\exp\{YP(i\sigma)\}=1$, откуда (при $P_2(\sigma)\neq 0$) получаем $\Delta_Y(\sigma)=0$. Ясно, что $Y>0$ и $\sigma\in\mathbf{R}$ можно выбирать так, чтобы $Y>0$ было сколь угодно малым.

Достаточность. В данном случае $\Delta_Y(\sigma) = CY$ при $\sigma \in N[P] = \{\sigma\in\mathbf{R} : P(i\sigma)=0\}$ и $\Delta_Y(\sigma) = \dfrac{(C+BP(i\sigma))(\exp\{YP(i\sigma)\}-1)}{P(i\sigma)}$ при $\sigma \notin N[P]$.
Поскольку $N_4=\varnothing$, в случае $N[P]\neq\varnothing$ имеем $C\neq 0$ и поэтому $\Delta_Y(\sigma)\neq 0$ при $\sigma \in N[P]$. Кроме того, при $\sigma \in N_1 = \{\sigma\in\mathbf{R} : P_1(\sigma)=0\}$ также $\Delta_Y(\sigma)\neq 0$ (при любом $Y>0$). Наконец, если $N_1\setminus N_2 \neq \varnothing$, то $\sup\{|P_2(\sigma)|, \sigma \in N_1\setminus N_2\} = P > 0$. Тогда при $Y \in \,]0, Y_0[$, $Y_0 = 2\pi/P$ и $\sigma \in N_1\setminus N_2$ снова получаем $\Delta_Y(\sigma)\neq 0$. Теорема доказана.

***1. 3. Случай* $\mathbf{A+B \neq 0}$, $\mathbf{C=0}$, $\mathbf{P(s)\neq}$ const.**

***Замечание* 1.** В дальнейшем считаем $A+B\neq 0$. Тогда для любого $\sigma_0>0$ существует $Y_0 = Y_0(\sigma_0)>0$ такое, что $\Delta_Y(\sigma)\neq 0$ при $|\sigma|\leq\sigma_0$ и $Y \in \,]0, Y_0[$.

Это следует из равномерного на множестве $\mathbf{R} \setminus \mathbf{R}_{\sigma_0}$ стремления функции $\Delta_Y(\sigma)$ к числу $A+B$ при $Y \to +0$.

Теорема 3. *Пусть* $A+B \neq 0$, $C=0$. *Задача* (1), (2) *является* AK_0-*задачей тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

1) $P_1(\sigma) \equiv \text{const} \neq 0$;

2) $\alpha P_1(\sigma) \equiv 0$, $|\alpha| + |P_1(\sigma)| \neq \text{const} = 0$, $\alpha = |A| - |B|$;

3) $\alpha P_1(\sigma) < 0$, $|\sigma| \to +\infty$;

4) $\alpha P_1(\sigma) > 0$, $\sigma \to \pm\infty$, $\deg P_2(\sigma) \leq \deg P_1(\sigma)$, $\dfrac{P_2(\sigma)}{P_1(\sigma)} \neq \text{const}$;

5) $\alpha P_1(\sigma) > 0$, $\sigma \to \pm\infty$, $P_2(\sigma) \equiv \lambda P_1(\sigma)$, $\dfrac{[\lambda \ln|A/B| - \arg(-A/B)]}{2\pi} \in \mathbf{Z}$.

Отметим, что $AB \neq 0$, так как $C=0$ и $|AB| + |C| > 0$.

Доказательство. *Необходимость.* Невыполнение условий 1 – 5 означает, что либо а) $\alpha \equiv P_1(\sigma) \equiv 0$, либо б) $\deg P_2 > \deg P_1$, $\alpha P_1(\sigma) > 0$, $\sigma \to \pm\infty$, либо

в) $P_2(\sigma) \equiv \lambda P_1(\sigma)$, $\dfrac{[\lambda \ln|A/B| - \arg(-A/B)]}{2\pi} \in \mathbf{Z}$, $\alpha P_1(\sigma) > 0$, $\sigma \to \pm\infty$.

В случае а) при $\sigma \in N[P]$ имеем $\Delta_Y(\sigma) = B[\exp\{iYP_2(\sigma)\} - \exp\{i\varphi_0\}]$, где $\varphi_0 \in \,]0, 2\pi[$. При любом $Y > 0$ из условия $YP_2(\sigma) = \varphi_0 + 2k\pi$ находим $k \in \mathbf{Z}$ и $\sigma = \sigma(k, Y) \in \mathbf{R}$. Тогда $\Delta_Y(\sigma) = 0$.

В случае б) находим сначала решение $\sigma = \sigma_k$ уравнения $P(\sigma) = (\varphi_0 + 2k\pi)P_1(\sigma)$ такое, что $\sigma_k \to +\infty$ при $|k| \to +\infty$, $\sigma_k \to -\infty$, если $\alpha P_1(\sigma) > 0$ при $\sigma \to +\infty$ (при $\sigma \to -\infty$). Положив затем $Y_k = \dfrac{\ln|A/B|}{P_1(\sigma_k)}$, получим $Y_k \to +0$ и $\Delta_{Y_k}(\sigma_k) = 0$ ($Y_k = \dfrac{\ln|A/B|}{P_1(\sigma_k)} \to +0$ в силу условия $\alpha P_1(\sigma) > 0$ в соответствующем направлении).

В случае в) при любом достаточно малом $Y > 0$ из условия $P_1(\sigma) = Y^{-1}\ln|A/B|$ находим $\sigma = \sigma(Y) \in \mathbf{R}$. Тогда $\Delta_Y(\sigma(Y)) = 0$, так как в этом случае $\alpha P_1(\sigma) > 0$, $\sigma \to \pm\infty$, и

$$\Delta_Y(\sigma) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} YP_1(\sigma) = \ln|A/B| \\ \lambda_1(\sigma)Y = 2k\pi + \arg(-A/B), \quad k \in \mathbf{Z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{[\lambda \ln|A/B| - \arg(-A/B)]}{2\pi} \in \mathbf{Z}.$$

Но в рассматриваемом случае $\dfrac{[\lambda \ln|A/B| - \arg(-A/B)]}{2\pi} \in \mathbf{Z}$, значит,

$$\Delta_Y(\sigma) = 0 \Leftrightarrow YP_1(\sigma) = \ln|A/B|.$$

Достаточность. При $C=0$ имеем $\Delta_Y(\sigma) = A + B\exp\{YP(i\sigma)\}$.

Пусть выполнено условие 1. Тогда $|A| \neq |B|\exp\{YP_1(\sigma)\}$ при достаточно малых $Y > 0$ и поэтому $\Delta_Y(\sigma) \equiv \Delta_Y \neq 0$.

Пусть выполнено условие 2 и $\alpha = 0$, $P_1(\sigma) \neq \text{const} = 0$. Тогда $\Delta_Y(\sigma) = B[\exp\{YP(i\sigma)\} - \exp\{i\varphi_0\}] \neq 0$, $A/B = \exp\{i\varphi_0\}$, при $\sigma \in N_1$. Но с учетом замечания 1 можно ограничиться рассмотрением лишь больших значений $|\sigma|$. Отсюда получаем требуемое. Если же $\alpha = |A| - |B| \neq 0$, $P_1(\sigma) \equiv 0$, то неравенство $\Delta_Y(\sigma) = A + B\exp\{iYP_2(\sigma)\} \neq 0$, $\sigma \in \mathbf{R}$, очевидно.

Пусть выполнено условие 3. Тогда $YP_1(\sigma)$ и $\ln|A/B|$ при $Y > 0$ и $\sigma \in \mathbf{R}_{\sigma_0}$ ($\sigma_0 > 0$ — достаточно большое) имеют различные знаки, откуда $\Delta_Y(\sigma) \neq 0$ при $\sigma \in \mathbf{R}_{\sigma_0}$ и любом $Y > 0$.

Если при выполнении условия 4 $\Delta_Y(\tilde{\sigma}) = 0$, то $YP_1(\tilde{\sigma}) = \ln|A/B|$ и $YP_2(\tilde{\sigma}) = \varphi_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, $\varphi_0 = \arg(-A/B)$, откуда

$$P_2(\tilde{\sigma})\ln|A/B| = P_1(\tilde{\sigma})(\varphi_0 + 2k\pi), \qquad k \in \mathbf{Z}. \tag{3}$$

Но $P_2(\sigma)/P_1(\sigma) \neq \text{const}$ и $\deg P_2 \leq \deg P_1$, значит, функция $P_2(\sigma)/P_1(\sigma)$ строго монотонна и ограничена на множествах $\mathbf{R}^+_{\sigma_0}$ и $\mathbf{R}^-_{\sigma_0}$ при достаточно большом $\sigma_0 > 0$. Поэтому равенство (3) при $\sigma \in \mathbf{R}_{\sigma_0}$ невозможно, что доказывает достаточность условия 4.

Наконец, при выполнении условия 5 равенство заменяется равенством $\lambda\ln|A/B| = \varphi_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, которое не может выполняться по условию. Тем самым теорема доказана.

1. 4. Случай $C(A+B) \neq 0$, $P_1(\sigma) \equiv 0$, $P_2(\sigma) \neq \text{const}$.

Теорема 4. *Пусть* $C(A+B) \neq 0$, $P_1(\sigma) \equiv 0$. *Тогда для того чтобы задача* (1), (2) *была* AK_0-*задачей, необходимо и достаточно, чтобы* $|\alpha| + |\beta_2| > 0$, $\beta_2 = \operatorname{Im}\overline{C}(A+B)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\alpha = \beta_2 = 0$. Условие $\Delta_Y(\sigma) = 0$ в данном случае равносильно системе уравнений

$$\begin{aligned} |C - iAP_2(\sigma)| &= |C + iBP_2(\sigma)|, \\ YP_2(\sigma) &= \varphi_0(\sigma) + 2k\pi, \qquad k \in \mathbf{Z} \end{aligned} \tag{4}$$

($\varphi_0(\sigma) = \arg(-A/B) + o(1)$, $|\sigma| \to +\infty$, $AB \neq 0$, так как $A + B \neq 0$ и $\alpha = |A| - |B| = 0$). Первое уравнение системы (4) является тождеством, а второе имеет решение $\sigma = \sigma(k, Y) \in \mathbf{R}^{\pm}_{\sigma_0}$ при любом $Y > 0$ и достаточно большом $k \in \mathbf{Z}$ ($\operatorname{sign} k = \operatorname{sign} P_2(\sigma)$ при $\sigma \in \mathbf{R}^{\pm}_{\sigma_0}$).

Достаточность. Первое уравнение системы (4) не имеет решений $\sigma \in \mathbf{R}_{\sigma_0}$ ($\sigma_0 > 0$ — достаточно большое). Это очевидно, если записать это уравнение в виде $\left[|A|^2 - |B|^2 P_2^2(\sigma)\right] - 2iP_2(\sigma)\beta_2 = 0$.

Теорема доказана.

1. 5. Случай $C(A+B)P_2(\sigma) \neq \text{const}$, $P_1(\sigma) \equiv 0$.

Теорема 5. *Пусть* $C(A+B)P_2(\sigma) \neq \text{const}$, $P_1(\sigma) \equiv 0$. *Тогда задача* (1), (2) *является* AK_0-*задачей тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий*:

1) $|\operatorname{Im}(A+B)\overline{C}| + |\operatorname{Im} A\overline{B}| > 0$;

2) $\operatorname{Im}(A+B)\overline{C} = \operatorname{Im} A\overline{B} = 0$, $\operatorname{Re} A\overline{B} > 0$;

3) $\operatorname{Im}(A+B)\overline{C} = \operatorname{Im} A\overline{B} = 0$, $\operatorname{Re} A\overline{B} < 0$, $(A+B)\overline{B}P_1(\sigma) > 0$, $|\sigma| \to +\infty$;

4) $\operatorname{Im}(A+B)\overline{C} = AB = 0$, $(A+B)\overline{C} > 0$;

5) $\operatorname{Im}(A+B)\overline{C} = AB = 0,\ (|A|-|B|)P_1(\sigma) < 0,\ |\sigma| \to +\infty.$

Доказательство. При достаточно большом σ_0 и $\sigma \in \mathbf{R}_{\sigma_0}$ имеем

$$\Delta_Y(\sigma) = 0 \Leftrightarrow \exp\{YP_1(\sigma)\} = \frac{C-AP_1(\sigma)}{C+BP_1(\sigma)}. \tag{5}$$

Необходимость. Пусть $AB \neq 0$ и не выполняются условия 1 – 3. Тогда $\operatorname{Re} A\overline{B} < 0$, $\operatorname{Im}(A+B)\overline{C} = \operatorname{Im} A\overline{B} = 0$ и, например, $\lim_{\sigma\to+\infty}(A+B)\overline{B}P_1(\sigma) = -\infty$. Обозначив

$$\varepsilon(\sigma) = \frac{C-AP_1(\sigma)}{C+BP_1(\sigma)} + \frac{A}{B},$$

получим $\varepsilon(\sigma) = o(1)$, $|\sigma| \to +\infty$. Кроме того, $-A/B > 0$ и поэтому

$$\operatorname{sign}\left[\ln\left(\frac{A}{B}\right)\right] = \operatorname{sign}\left[\ln\left(1-\frac{(A+B)\overline{B}}{|B|^2}\right)\right] = -\operatorname{sign}\left[(A+B)\overline{B}\right]. \tag{6}$$

Поскольку $P_1(\sigma)(A+B)\overline{B} < 0$ при $\sigma \to +\infty$, то $P_1(\sigma)\ln(-A/B) > 0$ при $\sigma \to$ $\to +\infty$. Отсюда следует, что уравнение в правой части (5) имеет решение

$$Y = \frac{1}{P_1(\sigma)}\ln\frac{C-AP_1(\sigma)}{C+BP_1(\sigma)} = \frac{1}{P_1(\sigma)}\ln\left(-\frac{A}{B}+\varepsilon(\sigma)\right) \to +0, \quad \sigma \to +\infty.$$

Если $A = \operatorname{Im} B\overline{C} = 0$, $B\overline{C} < 0$ и $P_1(\sigma) < 0$, $\sigma \to \pm\infty$, то решение Y уравнения (5) принимает вид

$$Y = Y(\sigma) = \frac{1}{P_1(\sigma)}\ln\frac{C}{C+BP_1(\sigma)} \quad \text{и} \quad Y(\sigma) \to +0, \quad \sigma \to \pm\infty.$$

Аналогично, при $B = \operatorname{Im} A\overline{C} = 0$, $A\overline{C} < 0$ и $P_1(\sigma) > 0$, $\sigma \to \pm\infty$, для уравнения (5) получаем

$$Y = Y(\sigma) = \frac{1}{P_1(\sigma)}\ln\frac{C-AP_1(\sigma)}{C} \to +0, \quad \sigma \to \pm\infty.$$

Достаточность. Пусть выполнено условие 1. На основании замечания 1, соотношения (5) и неравенства $\ln\dfrac{C-AP_1(\sigma)}{C+BP_1(\sigma)} \neq 0$, $\sigma \in \mathbf{R}_{\sigma_0}$, заключаем, что $\Delta_Y(\sigma) \neq 0$, $\sigma \in \mathbf{R}$.

При выполнении условия 2 имеем

$$\frac{C-AP_1(\sigma)}{C+BP_1(\sigma)} = -\frac{A\overline{B}}{|B|^2} + o(1) < 0, \quad |\sigma| \to +\infty,$$

и снова можно воспользоваться замечанием 1 и соотношением (5).

При выполнении условия 3 уравнение (5) не имеет решений при больших значениях $|\sigma|$ и $Y > 0$, так как

$$P_1(\sigma)\ln\frac{C-AP_1(\sigma)}{C+BP_1(\sigma)} = P_1(\sigma)\ln\left(-\frac{A}{B}+o(1)\right) < 0$$

(мы воспользовались равенством (6)).

Пусть выполнено условие 4 и $A = 0$. Тогда $\operatorname{Im} B\overline{C} = 0$, $B\overline{C} > 0$, и если $P_1(\sigma) > 0$, $|\sigma| \to +\infty$, то $\exp\{YP_1(\sigma)\} > 1$, $|\sigma| \to +\infty$, тогда как $\dfrac{C}{C + BP_1(\sigma)} < 1$. Если же $P_1(\sigma) < 0$, $|\sigma| \to +\infty$, то $\dfrac{C}{C + BP_1(\sigma)} < 0$, $|\sigma| \to +\infty$, а $\exp\{YP_1(\sigma)\} > 0$, что ведет к неразрешимости (5).

При $B = 0$ $\operatorname{Im} A\overline{C} = 0$, $A\overline{C} > 0$, и если $P_1(\sigma) > 0$, $|\sigma| \to +\infty$, то $\exp\{YP_1(\sigma)\} > 0$, $|\sigma| \to +\infty$, тогда как $\dfrac{C - AP_1(\sigma)}{C} < 0$; если же $P_1(\sigma) < 0$, $|\sigma| \to +\infty$, то $\exp\{YP_1(\sigma)\} < 1$, $|\sigma| \to +\infty$, а $\dfrac{C - AP_1(\sigma)}{C} > 1$, $|\sigma| \to +\infty$, что ведет к неразрешимости уравнения (5).

Пусть, наконец, выполнено условие 5 и $A = 0$. Тогда из неравенства $(|A| - |B|)P_1(\sigma) < 0$, $|\sigma| \to +\infty$, получаем $P_1(\sigma) > 0$, $|\sigma| \to +\infty$. Выберем $\sigma > 0$ из условия $P_1(\sigma) > \delta_0 = |A/B|$ при $\sigma \in \mathbf{R}_{\sigma_0}$. Тогда при $\sigma \in \mathbf{R}_{\sigma_0}$ получим $|\Delta_Y(\sigma)| \geq \exp\{YP_1(\sigma)\}\left(|B| - |C|P_1^{-1}(\sigma)\right) > 0$. Если же $B = 0$, из неравенства $(|A| - |B|)P_1(\sigma) < 0$, $|\sigma| \to +\infty$, получаем $P_1(\sigma) < 0$, $|\sigma| \to +\infty$. Выберем $\sigma_0 > 0$ из условия $-P_1(\sigma) > \delta_0 = |A/B|$ при $\sigma \in \mathbf{R}_{\sigma_0}$. Тогда при $\sigma \in \mathbf{R}_{\sigma_0}$ получим $|\Delta_Y(\sigma)| \geq |A| + |C|P_1^{-1}(\sigma) > 0$. Тем самым теорема доказана.

1. 6. Случай $C(A + B)P_1(\sigma)P_2(\sigma) \neq \mathrm{const} = 0$, $P(i\sigma) \neq \mathrm{const}$.

Лемма 1. *Пусть* $C(A + B)P_1(\sigma)P_2(\sigma) \neq \mathrm{const} = 0$, $\deg P_2 = \deg P_1 + m$, $m > 0$ *или* $m = AB = 0$. *Тогда для любого* $\lambda \in \mathbf{R}$ *существует* $\sigma_0(\lambda) > 0$ *такое, что на множестве* $\mathbf{R}^{\pm}_{\sigma_0(\lambda)}$ *функция*

$$g(\sigma) = \frac{P_2(\sigma)}{P_1(\sigma)} \ln\left|\frac{C - AP(i\sigma)}{C + BP(i\sigma)}\right| + \lambda \arg\frac{C - AP(i\sigma)}{C + BP(i\sigma)}$$

строго монотонна.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathbf{R}$, $\sigma_0 > 0$ — достаточно большое, такое, что:

1) на $\mathbf{R}_{\sigma_0}$ $h_1(\sigma) \equiv \operatorname{Im}(C - AP(i\sigma))\left(\overline{C} + \overline{BP}(i\sigma)\right)$ и $h_2(\sigma) \equiv \operatorname{Re}(C - AP(i\sigma))\left(\overline{C} + \overline{BP}(i\sigma)\right)$ имеют постоянные знаки;

2) $\forall \sigma \in \mathbf{R}_{\sigma_0} : P_1(\sigma)P_2(\sigma)(C - AP(i\sigma))\left(\overline{C} + \overline{BP}(i\sigma)\right) \neq 0$.

Тогда на $\mathbf{R}_{\sigma_0}$ можно записать $g(\sigma) = q_1(\sigma)\ln q_2(\sigma) + \lambda \arctan q_3(\sigma)$, где $q_j(\sigma)$, $j \in \{1, 2, 3\}$, — рациональные функции. Если $q_1(\sigma) = \mathrm{const}$, то $g'(\sigma) = q_4(\sigma) \neq \mathrm{const} = 0$ ($q_4(\sigma)$ — рациональная функция). Тогда существует $\sigma_1 > \sigma_0$ такое, что $N[q_4(\sigma)] \cap \mathbf{R}_{\sigma_1} = \varnothing$, и при $\sigma_0(\lambda) = \sigma_1$ получаем требуемое.

Если же $q_1(\sigma) \neq \mathrm{const}$, то существует $\sigma_2 > \sigma_0$ такое, что $N[q_1'(\sigma)] \cap \mathbf{R}_{\sigma_2} = \varnothing$ и на $\mathbf{R}_{\sigma_2}$ $g'(\sigma) = q_1'(\sigma)g_1(\sigma)$, $g_1(\sigma) \neq \mathrm{const}$. Но $g'(\sigma)$ — рациональная функция, поэтому существует $\sigma_0(\lambda) \geq \sigma_2$ такое, что $N[g_1'(\sigma)] \cap \mathbf{R}_{\sigma_0(\lambda)} = \varnothing$, следовательно, на каждом из множеств $\mathbf{R}^-_{\sigma_0(\lambda)}$ и $\mathbf{R}^+_{\sigma_0(\lambda)}$ функция $g(\sigma)$ строго монотонна. Тем самым лемма доказана.

Теорема 6. *Пусть* $C(A + B)P_1(\sigma)P_2(\sigma) \neq \mathrm{const} = 0$, $P(i\sigma) \neq \mathrm{const}$. *Тогда задача* (1), (2) *является* AK_0-*задачей тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий*:

1) $\alpha = |A| - |B| = 0$;

2) $(|A| - |B|)P_1(\sigma) < 0$, $|\sigma| \to +\infty$;

3) $\deg P_2 < \deg P_1$;

4) $AB \neq 0, \quad \deg P_2 = \deg P_1$.

Доказательство. Необходимость. Невыполнение условий $1-4$ означает, что $\alpha P_1(\sigma) > 0$, $\sigma \to \pm\infty$, $\alpha = |A| - |B|$ (пусть, для определенности, $\alpha P_1(\sigma) > 0$ при $\sigma \in \mathbf{R}^{+}_{\sigma_0}$) и либо $\deg P_1 > \deg P_2$, либо $\deg P_2 - \deg P_1 = AB = 0$. В обоих случаях функция

$$\varphi(\sigma) \equiv \frac{P_2(\sigma)}{P_1(\sigma)} \ln\left|\frac{C - AP(i\sigma)}{C + BP(i\sigma)}\right|$$

монотонна (в силу леммы 1), стремится к $+\infty$ или к $-\infty$ при $\sigma \to +\sigma_0$, поэтому уравнение

$$\varphi(\sigma) - \arg\frac{C - AP(i\sigma)}{C + BP(i\sigma)} = 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}, \tag{7}$$

имеет решение σ_k такое, что $\sigma_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$ или $k \to -\infty$. Поскольку $\alpha P_1(\sigma) > 0$, $\sigma \to +\infty$, то

$$Y_k = \frac{1}{P_1(\sigma_k)} \ln\frac{C - AP(i\sigma_k)}{C + BP(i\sigma_k)} \to +0, \quad \sigma_k \to +\infty.$$

При этом $\Delta_{Y_k}(\sigma_k) = 0$, так как

$$\varphi(\sigma_k) - \arg\frac{C - AP(i\sigma_k)}{C + BP(i\sigma_k)} = 2k\pi$$

и

$$Y_k P_1(\sigma_k) = \ln\frac{C - AP(i\sigma_k)}{C + BP(i\sigma_k)} \Leftrightarrow P_4(\sigma_k)\exp\{Y_k P(i\sigma_k)\} - P_4(\sigma_k) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta_{Y_k}(\sigma_k) = 0 \quad (P(i\sigma_k) \neq 0, \ P_3(\sigma) = C - AP(i\sigma), \ P_4(\sigma) = C + BP(i\sigma)).$$

Достаточность. Если $\tilde{\sigma} \in \mathbf{R}_{\sigma_0} \cap N[\Delta_Y]$, то $\tilde{\sigma}$ — решение уравнения (7) при некотором $k \in \mathbf{Z}$. В силу леммы 1 левая часть (7) является строго монотонной функцией на множествах $\mathbf{R}^{\pm}_{\sigma_0}$ при достаточно большом σ_0, откуда следует, что (7) не имеет решений на $\mathbf{R}_{\sigma_0}$, если функция $\varphi(\sigma)$ ограничена при $|\sigma| \to +\infty$. Именно так обстоит дело при выполнении хотя бы одного из условий 1, 3 или 4. При выполнении условия 2 имеем

$$P_1^{-1}(\sigma) \ln\left|\frac{C - AP(i\sigma)}{C + BP(i\sigma)}\right| < 0$$

при $\sigma \in \mathbf{R}_{\sigma_0}$, что влечет $\Delta_Y(\sigma) \neq 0$ при $Y > 0$ и $\sigma \in \mathbf{R}_{\sigma_0}$. С учетом замечания 1 получаем требуемое.

Теорема доказана.

2. AK_∞-задача. В этом пункте изучается вопрос об асимптотической корректности задачи (1), (2) при $Y \to +\infty$. При этом будем рассматривать следующие случаи:

2.1) $P(i\sigma) \equiv \text{const}$;

2.2) $A + B = 0, \quad \deg P > 0$;

2.3) $A + B \neq 0, \quad C = 0, \quad \deg P > 0$;

2.4) $C(A+B) \neq 0, \quad P_1(\sigma) \equiv 0, \quad \deg P > 0;$

2.5) $C(A+B) \neq 0, \quad P_2(\sigma) \equiv 0, \quad \deg P > 0;$

2.6) $C(A+B)P_2(\sigma) \neq \text{const} = 0, \quad \deg P_1 > 0;$

2.7) $P_1(\sigma) \equiv P_1 = \text{const}, \quad C(A+B)P_1 \neq 0, \quad \deg P_2 > 0.$

Введем такие обозначения:

$$\alpha = |A| - |B|, \quad \beta_2 = \operatorname{Im} \overline{C}(A+B), \quad \gamma = -\frac{2\beta_2}{|A|^2 - |B|^2}, \quad \alpha \neq 0.$$

2.1. Случай $\boldsymbol{P(i\sigma) \equiv}$ **const.**

Теорема 7. *При* $P(i\sigma) \equiv 0$ *задача* (1), (2) *является* AK_∞*-задачей тогда и только тогда, когда* $|A+B| + |C| > 0$. *При* $P(i\sigma) \equiv P = \text{const} \neq 0$ *задача* (1), (2) *является* AK_∞*-задачей тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий*:

1) $A + B = 0, \quad (C - AP)\operatorname{Re} P \neq 0;$

2) $A + B \neq 0, \quad (C - AP)(C + BP) = 0;$

3) $(A+B)(C-AP)(C+BP)\operatorname{Re} P \neq 0;$

4) $(A+B)(C-AP)(C+BP)(|\alpha| + |\beta_2|) \neq 0, \quad \operatorname{Re} P = \alpha\beta_2 = 0;$

5) $(A+B)(C-AP)(C+BP)\alpha\beta_2(\operatorname{Im} P - \gamma) \neq 0, \quad \operatorname{Re} P = 0.$

Доказательство. При $P(i\sigma) \equiv 0$ утверждение теоремы следует из формулы $\Delta_Y(\sigma) \equiv A + B + CY$.

Пусть $P(i\sigma) \equiv P = P_1 + iP_2 = \text{const} \neq 0$.

Необходимость. Если $A + B = C - AP = 0$, то $\Delta_Y(\sigma) \equiv 0$, а если $A + B = P_1 = 0$, то $\Delta_{Y_k}(\sigma) \equiv 0$ при $Y_k = 2k\pi / P_2$, $k \in \mathbf{Z}$. Значит, задача (1), (2) не является в этих случаях AK_∞-задачей. При $A + B \neq 0$ невыполнение условий 2, 5 означает, что $(C - AP)(C + BP) \neq 0$, $P_1 = 0$ и либо $\alpha\beta_0 \neq 0$, $P_2 = \gamma$, либо $\alpha = \beta_2 = 0$. В обоих случаях имеем $C - AP = (C + BP)\exp\{i\varphi_0\}$, $\varphi_0 \in]0, 2\pi[$, откуда $\Delta_Y(\sigma) \equiv \Delta_Y = P_2^{-1}(C - AP)\exp\{i\varphi_0\} - \exp\{iP_2Y\}$, и при $Y = Y_k = P_2^{-1}(\varphi_0 + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$, получаем $\Delta_{Y_k} \equiv 0$.

Достаточность. Поскольку $\Delta_Y(\sigma) \equiv \Delta_Y = [AP - C + (C + BP)\exp\{YP\}]/P$, то достаточность условия 1 очевидна. При $A + B \neq 0$ имеем $|C - AP| + |C + BP| > 0$, откуда следует достаточность условия 2. Если выполнено условие 3, то $\Delta_Y \neq 0$ при $Y > P_1^{-1} \ln\left|\dfrac{C - AP}{C + BP}\right|$. Если $P_1 = 0$, то $\Delta_Y = 0 \Leftrightarrow |C - AP| = |C + BP|$ или $\left(|A|^2 - |B|^2\right)P_2 + 2\beta_2 = 0$, что невозможно при выполнении условий 4 или 5.

Теорема доказана.

В дальнейшем $\deg P > 0$.

2.2. Случай $\boldsymbol{A + B = 0,\ \deg P > 0.}$

Теорема 8. *Пусть* $A + B = 0$. *Задача* (1), (2) *является* AK_∞*-задачей тогда и только тогда, когда выполнены условия* $N_1 \subset N_2$ *и* $N_4 = \varnothing$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\sigma_0 \in N_4 \neq \varnothing$. Если при этом $\sigma_0 \in N[P]$, то $C = 0$ и $\Delta_Y(\sigma_0) = A + B = 0$ для любых $Y > 0$. То же самое верно и при $P(i\sigma_0) \neq 0$, так как $\Delta_Y(\sigma_0) = P^{-1}(i\sigma_0)P_4(\sigma_0)[\exp\{YP(i\sigma_0)\} - 1] = 0$. Если $\sigma_0 \in N_1 \setminus N_2$, то $\Delta_Y(\sigma_0) = 0$ при $Y = Y_k = P_2^{-1}(\sigma_0)2k\pi > 0$ (здесь $k \in \mathbf{Z}$ любое такое, что $kP_2(\sigma_0) > 0$).

Достаточность. При $\sigma_0 \notin N[P]$ имеем $P_1(\sigma) \neq 0$ (так как $N_1 \subset N_2$) и

$$\Delta_Y(\sigma) = \frac{P_4(\sigma)[\exp\{YP(i\sigma)\}-1]}{P(i\sigma)} \neq 0$$

при любом $Y > 0$, поскольку $P_1(\sigma)P_4(\sigma) \neq 0$. Если же $P(i\sigma_0) = 0$, то $C \neq 0$ (так как $N_4 = \varnothing$) и $\Delta_Y(\sigma_0) = CY \neq 0$.

Теорема доказана.

2.3. Случай $A + B \neq 0$, $C = 0$, $\deg P > 0$.

Теорема 9. *В случае* $A + B \neq 0$, $C = 0$, $\deg P > 0$ *задача* (1), (2) *является* AK_∞*-задачей тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий*:

1) $N_1 = \varnothing$;

2) $\alpha = |A| - |B| = 0$ *и* $N_1 \subset N_2$;

3) $\alpha \neq 0$, $\quad P_1(\sigma) \equiv 0$;

4) $\alpha P_1(\sigma) \neq \text{const} = 0$, $P_2(\sigma) \equiv \lambda P_1(\sigma)$ *и либо* $(2\pi)^{-1}[\lambda \ln|A/B| - \arg(-A/B)] \notin \mathbf{Z}$, *либо для любого* $\sigma_0 \in N_1$ *выполняется неравенство*

$$\left[1 + (-1)^{q_1}\right]\alpha \tilde{P}_1(\sigma_0) < 0, \tag{8}$$

где $\tilde{P}_1(\sigma)$ *определяется равенством* $P_1(\sigma) \equiv (\sigma - \sigma_0)^{q_1}\tilde{P}_1(\sigma)$, $q_1 \in \mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$, *и* $\tilde{P}_1(\sigma_0) \neq 0$, *если* $P_1(\sigma) \neq \text{const} = 0$;

5) $\alpha P_1(\sigma)[P_2(\sigma) - \lambda P_1(\sigma)] \neq \text{const} = 0$ $(\forall \lambda \in \mathbf{R})$ *и для любого* $\sigma_0 \in N_1$ *либо выполняется неравенство* (8), *либо* $q_2 \geq q_1$.

Доказательство. В данном случае $\Delta_Y(\sigma) = A + B\exp\{YP(i\sigma)\}$, $AB \neq 0$, и равенство $\Delta_Y(\sigma) = 0$ можно записать в виде равносильной системы двух уравнений

$$YP_1(\sigma) = \ln|A/B| \wedge YP_2(\sigma) = \varphi_0 + 2k\pi, \quad \varphi_0 = \arg(-A/B), \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{9}$$

Необходимость. Если $\alpha = 0$ и $\sigma_0 \in N_1 \setminus N_2$, то $\Delta_Y(\sigma_0) = 0$, $Y = Y_k = (\varphi_0 + 2k\pi)/P_2(\sigma_0) > 0$, $k \in \mathbf{Z}$. Если $\alpha P_1(\sigma) \neq \text{const} = 0$, $P_2(\sigma) = \lambda_0 P_1(\sigma)$, $\lambda_0 = (\varphi_0 + 2k_0\pi)/\ln|A/B|$, $k_0 \in \mathbf{Z}$, то находим точку $\sigma_0 \in N_1$, для которой условие (8) не выполняется. Тогда для любого достаточно большого $Y > 0$ в окрестности точки σ_0 можно найти решение $\sigma = \sigma(Y)$ первого уравнения системы (9). Второе уравнение (9) при $\sigma = \sigma(Y)$ и $k = k_0$ также удовлетворяется (в силу значения λ_0). Значит, $\Delta_Y(\sigma(Y)) = 0$. Наконец, если $\alpha P_1(\sigma)[P_2(\sigma) - \lambda P_1(\sigma)] \neq \text{const} = 0$ $(\forall \lambda \in \mathbf{R})$, то находим значение $\sigma_0 \in N_1$, для которого $q_2 < q_1$ и неравенство (8) не выполняется. Далее находим последовательности $\sigma_k^\pm \to \sigma_0 \pm 0$, $k \to \pm\infty$, такие, что $P_1^{-1}(\sigma_k^\pm)P_2(\sigma_k^\pm)\ln|A/B| = \varphi_0 + 2k\pi$. Невыполнение неравенства (8) влечет неравенство $P_1(\sigma)\ln|A/B| > 0$, $\sigma \to \sigma_0 \pm 0$, и поэтому хотя бы одна из двух последовательностей $Y_k^\pm = P_1^{-1}(\sigma_k^\pm)\ln|A/B|$ удовлетворяет условию $Y_k^\pm \to +\infty$. Из (9) заключаем, что $\Delta_{Y_k^\pm}(\sigma_k^\pm) = 0$.

Достаточность. При $N_1 = \varnothing$, очевидно, $\Delta_Y(\sigma) \neq 0$ при достаточно больших $Y > 0$ и $\sigma \in \mathbf{R}$, поскольку $|A| - |B|\exp\{YP_1(\sigma)\} \neq 0$, $\sigma \in \mathbf{R}$.

При выполнении условия 2 первое уравнение системы (9) имеет вид $P_1(\sigma) =$

$=0$, а второе — $\varphi_0 + 2k\pi = 0$, что невозможно при $k \in \mathbf{Z}$, так как $\varphi_0 \in]0, 2\pi[$.

При выполнении условия 3 первое уравнение системы (9) неразрешимо.

Пусть выполнено условие 4. Перепишем (9) в виде

$$YP_1(\sigma) = \ln|A/B|, \quad \lambda \ln|A/B| = \varphi_0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{10}$$

Из условия 4 следует, что либо второе из этих равенств не имеет места, каково бы ни было $k \in \mathbf{Z}$, либо неразрешимо (в силу (8)) первое уравнение из (10) при больших $Y > 0$.

Пусть, наконец, выполнено условие 5. Первое из уравнений (9) при больших $Y > 0$ может иметь решение $\sigma = \sigma(Y)$ лишь в окрестности множества N_1, но оно неразрешимо (при $Y > 0$) в окрестности тех точек множества N_1, для которых выполнено условие (8). Если же для $\sigma_0 \in N_1$ не выполнено (8), то в этой точке $q_2 \geq q_1$. На множестве решений первого уравнения системы (9) второе уравнение принимает вид $P_1^{-1}(\sigma) P_2(\sigma) \ln|A/B| = \varphi_0 + 2k\pi$. Оно неразрешимо ни в одной достаточно малой окрестности точки σ_0, так как его левая часть строго монотонна и (поскольку $q_2 \geq q_1$) имеет конечный предел при $\sigma \to \sigma_0$.

Теорема доказана.

2.4. Случай $C(A+B) \neq 0$, $P_1(\sigma) \equiv 0$, $\deg P > 0$.

Теорема 10. *Пусть* $C(A+B) \neq 0$, $P_1(\sigma) \equiv 0$, $\deg P > 0$. *Тогда для того чтобы задача* (1), (2) *была* AK_∞*-задачей, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий*:

1) $\alpha\beta_2 = 0, \quad |\alpha| + |\beta_2| \neq 0, \quad \alpha = |A| - |B|, \quad \beta_2 = \operatorname{Im} \overline{C}(A+B);$

2) $\alpha\beta_2 \neq 0, \quad N[P_2(\sigma) - \gamma] = \varnothing, \quad \gamma = -\dfrac{2\beta_2}{|A|^2 - |B|^2}.$

Доказательство. Очевидно, $\Delta_Y(\sigma) \neq 0$ при $\sigma \in N_2$. При $\sigma \notin N_2$ имеем

$$\Delta_Y(\sigma) = \frac{P_4(\sigma)\exp\{YP(i\sigma)\} - P_3(\sigma)}{P(i\sigma)},$$

значит, $\Delta_Y(\sigma) \neq 0$, $\sigma \in N_3 \cup N_4$. Наконец, при $\sigma \notin N_2 \cup N_3 \cup N_4 = N_0$ уравнение $\Delta_Y(\sigma) = 0$ равносильно системе

$$\ln\left|\frac{P_3(\sigma)}{P_4(\sigma)}\right| = 0,$$
$$YP_2(\sigma) = \arg\frac{P_3(\sigma)}{P_4(\sigma)} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{11}$$

Необходимость. Невыполнение условий 1 и 2 означает, что либо $\alpha = \beta_2 = 0$, либо $\alpha\beta_2 \neq 0$, $N[P_2(\sigma) - \gamma] \neq \varnothing$. В первом случае первое уравнение системы (11) является тождеством $(\sigma \in \mathbf{R} \setminus N_0)$, а во втором оно имеет решение $\sigma = \sigma_0 \in N[P_2(\sigma) - \gamma]$. При этом $\sigma_0 \notin N_0$. Поскольку $P_2(\sigma_0) = \gamma \neq 0$, то $P_3(\sigma_0) \neq 0$, так как в противном случае $C = Ai\gamma$ и тогда $A + B = 0$. Аналогично $P_4(\sigma_0) \neq 0$. Зафиксируем в первом случае любое $\sigma \notin N_0$, а во втором $\sigma_0 \in N[P_2(\sigma) - \gamma]$. Положим

$$Y = Y_k = P_2^{-1}(\sigma_0)\left[\arg\frac{P_3(\sigma_0)}{P_4(\sigma_0)} + 2k\pi\right], \quad k \in \mathbf{Z}.$$

При $k \to +\infty$ (или $k \to -\infty$) имеем $\Delta_Y(\sigma_0) = 0$.

Достаточность. Запишем первое из уравнений системы (11) в виде

$$[\alpha(|A|+|B|)P_2(\sigma)+2\beta_2]P_1(\sigma) = 0.$$

Тогда очевидно, что это уравнение не имеет решения $\sigma \in N_0$, если выполняется хотя бы одно из условий 1 или 2.

Теорема доказана.

2. 5. Случай $\boldsymbol{C(A+B)\neq 0,\ P_2(\sigma)\equiv 0,\ \deg P>0}$.

Теорема 11. *Пусть* $P_2(\sigma)\equiv 0$, $\deg\{C(A+B)P\}>0$. *Тогда для того чтобы задача* (1), (2) *была* AK_∞*-задачей, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий*:

1) $\left|\operatorname{Im} A\overline{C}\right| + \left|\operatorname{Im} B\overline{C}\right| > 0$;

2) $\left|\operatorname{Im} A\overline{C}\right| + \left|\operatorname{Im} B\overline{C}\right| > 0$ *и для любого* $\sigma\in N_3\cup N_4$ *либо* $\left[1+(-1)^{q_3+q_4}\right]\times$ $\times\ \tilde P_3(\sigma_0)\tilde P_4(\sigma_0) < 0$, *либо* $\overline{C}(Aq_3+Bq_4) > 0$.

Доказательство. В случае $P_2(\sigma)\equiv 0$, $\deg\{C(A+B)P\}>0$ уравнение $\Delta_Y(\sigma)=0$ не имеет решений $\sigma\in N_1\cup N_3\cup N_4$, так как при $\sigma\in N_1$ $\Delta_Y(\sigma)= =A+B+CY\neq 0$ при $Y>\left|(A+B)/C\right|$; если $\sigma\in N_3$, то $C+BP(i\sigma)\neq 0$ (так как $A+B\neq 0$) и

$$\Delta_Y(\sigma) = \frac{C+BP(i\sigma)}{P(i\sigma)}\exp\{YP(i\sigma)\} \neq 0.$$

Если $\sigma\in N_4$, то $C-BP(i\sigma)\neq 0$ (так как $A+B\neq 0$) и

$$\Delta_Y(\sigma) = \frac{C-BP(i\sigma)}{P(i\sigma)} \neq 0.$$

При $\sigma\notin N_1\cup N_3\cup N_4$ уравнение $\Delta_Y(\sigma)=0$ равносильно системе уравнений

$$YP_1(\sigma) = \ln\left|\frac{C-AP(i\sigma)}{C+BP(i\sigma)}\right|, \qquad \arg\frac{C-AP(i\sigma)}{C+BP(i\sigma)} = 0. \tag{12}$$

Первое из этих уравнений при $Y\to+\infty$ разрешимо лишь в окрестности множества $N_3\cup N_4$ при выполнении дополнительного условия $P_1(\sigma_0)(q_3-q_4)< <0$, что равносильно неравенству $\overline{C}(Aq_3+Bq_4)<0$ $(q_3=q_3(\sigma_0),\ q_4=q_4(\sigma_0))$, так как $\forall\sigma_0\in N_3\cup N_4$:

$$P_1^{-1}(\sigma)\ln\left|\frac{C-AP(i\sigma)}{C+BP(i\sigma)}\right| \underset{\sigma\to\sigma_0}{\longrightarrow} \varepsilon, \qquad \varepsilon\in\{-1,+1\}.$$

Заметим, что $\varepsilon=+1 \Leftrightarrow (\sigma_0\in N_3\wedge P_1(\sigma_0)<0)$ или $(\sigma_0\in N_4\wedge P_1(\sigma_0)>0) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow P_1(\sigma_0)(q_3-q_4)<0$. Но $\sigma_0\in N_3 \Leftrightarrow C-AP(i\sigma_0)=0$, тогда $q_4(\sigma_0)=0$, $P_1(\sigma_0)=C/A$ и $P_1(\sigma_0)q_3<0 \Rightarrow A\overline{C}<0$. Если же $\sigma_0\in N_4$, то получаем $B\overline{C}< <0$. Таким образом, если $\sigma_0\in N_3\cup N_4$, то $\overline{C}(Aq_3+Bq_4)<0$.

Теперь пусть $\varepsilon=+1$ и $\overline{C}(Aq_3+Bq_4)<0$. Тогда если $\sigma_0\in N_3$, то $P_1(\sigma_0)< <0$, и если $\sigma_0\in N_4$, то $P_1(\sigma_0)>0 \Rightarrow P_1(\sigma_0)(q_3-q_4)<0$.

Второе уравнение системы (12), в свою очередь, равносильно условиям

$$\operatorname{Im} A\overline{C} = \operatorname{Im} B\overline{C} = 0 \wedge P_3(\sigma)\overline{P_4}(\sigma) \equiv (\sigma-\sigma_0)^{q_3+q_4}\tilde P_3(\sigma)\overline{P_4}(\sigma) > 0. \tag{12$'$}$$

Неравенство (12′) имеет место хотя бы в одной полуокрестности точки σ_0, только если для этой точки выполняется $\left[1+(-1)^{q_3+q_4}\right]\tilde{P}_3(\sigma_0)\overline{P}_4(\sigma_0) \geq 0$. В соответствующей полуокрестности второе уравнение системы (12) выполняется тождественно.

Достаточность. Пусть выполнено условие 1. Тогда $\left|\operatorname{Im} A\overline{C}\right| + \left|\operatorname{Im} B\overline{C}\right| > 0$ и второе уравнение системы (12), которое равносильно уравнениям $\operatorname{Im} A\overline{C} = \operatorname{Im} B\overline{C} = 0$, $P_3(\sigma)\overline{P}_4(\sigma) > 0$, неразрешимо. Следовательно, для любого $Y > 0$ $\Delta_Y(\sigma) \neq 0$, $\sigma \in \mathbf{R}$.

Пусть теперь выполнено условие 2. Тогда если для любого $\sigma_0 \in N_3 \cup N_4$ $\left[1+(-1)^{q_3+q_4}\right]\tilde{P}_3(\sigma_0)\overline{P}_4(\sigma_0) < 0$, то в достаточно малой окрестности точки σ_0 $\overline{P}_4(\sigma)P_3(\sigma) \leq 0$. Второе же уравнение системы (12) неразрешимо в такой окрестности. Следовательно, система (12) при $Y \to +\infty$ неразрешима. Значит, $\exists\, Y_0 > 0\ \ \forall\, Y > Y_0\ \ \forall\, \sigma \in \mathbf{R} : \Delta_Y(\sigma) \neq 0$.

Пусть $\exists\, \sigma_0 \in N_3 \cup N_4 : \left[1+(-1)^{q_3+q_4}\right]\tilde{P}_3(\sigma_0)\overline{P}_4(\sigma_0) \geq 0$. Тогда $\overline{C}(Aq_3 + Bq_4) > 0$ и система (12) при $Y \to +\infty$ не имеет решения. Таким образом, $\exists\, Y_0 > 0\ \ \forall\, Y > Y_0\ \ \forall\, \sigma \in \mathbf{R} : \Delta_Y(\sigma) \neq 0$.

Необходимость. Если условия теоремы не выполняются, то существует $\sigma_0 \in N_3 \cup N_4$ такое, что $\left[1+(-1)^{q_3+q_4}\right]\tilde{P}_3(\sigma_0)\overline{P}_4(\sigma_0) \geq 0$, $\operatorname{Im} A\overline{C} = \operatorname{Im} B\overline{C} = 0$ и $\overline{C}(Aq_3 + Bq_4) \leq 0$. Тогда, как показано выше, существует $\delta_0 > 0$ такое, что хотя бы на одном из множеств $(\sigma_0 - \delta_0, \sigma_0)$ и $(\sigma_0, \sigma_0 + \delta_0)$ второе уравнение (12) выполняется тождественно. Не нарушая общности, считаем, что на $(\sigma_0, \sigma_0 + \delta_0)$ второе уравнение системы (12) выполняется тождественно. При достаточно малом δ_0

$$\left\{\frac{1}{P_1(\sigma)}\ln\left|\frac{C - AP(i\sigma)}{C + BP(i\sigma)}\right| : \sigma \in (\sigma_0, \sigma_0 + \delta_0)\right\} = [Y_0, +\infty[,$$

тогда для любого $Y \geq Y_0$ существует $\sigma_Y \in (\sigma_0, \sigma_0 + \delta_0)$ такое, что $\Delta_Y(\sigma_Y) = 0$. Значит, задача (1), (2) не является AK_∞-задачей. Тем самым теорема доказана.

2.6. Случай $\boldsymbol{C(A+B)P_2(\sigma) \neq \mathrm{const} = 0,\ \deg P_1 > 0}$**.**

Теорема 12. *Для того чтобы задача* (1), (2) *при условии* $C(A+B)P_2(\sigma) \neq \mathrm{const} = 0$, $\deg P_1 > 0$, *была* AK_∞*-задачей, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) $\forall\, \sigma_0 \in N_1 \setminus N_2 = N_{01} \Rightarrow q_5 = 0$ *и* $\left[1+(-1)^{q_1}\right]\tilde{P}_1(\sigma_0)P_5(\sigma_0) < 0$;

2) $\forall\, \sigma_0 \in N[P] = N_{02} \Rightarrow q_2 \geq q_1 - q_5 \vee \left[1+(-1)^{q_1-q_5}\right]\tilde{P}_1(\sigma_0)\tilde{P}_5(\sigma_0) < 0$;

3) $\forall\, \sigma_0 \in N_3 \cup N_4 = N_{03} \Rightarrow \left[1+(-1)^{q_1}\right]\tilde{P}_1(\sigma_0)P_5(\sigma_0) < 0 \vee q_2 > 0$.

(Напомним, что $P_3(\sigma) \equiv C - AP(i\sigma)$, $P_4(\sigma) \equiv C + BP(i\sigma)$, $P_5(\sigma) \equiv \equiv |P_3(\sigma)|^2 - |P_4(\sigma)|^2$.)

Доказательство. Имеем

$$\Delta_Y(\sigma)\Big|_{\sigma \in N[P]} = A + B + CY \neq 0, \qquad Y > 0, \qquad Y \neq -\frac{A+B}{C},$$

$$\Delta_Y(\sigma)\Big|_{\sigma \notin N[P]} = \frac{1}{P(i\sigma)}\left[(C + BP(i\sigma))\exp\{YP(i\sigma)\} - (C - AP(i\sigma))\right].$$

Если $\sigma_0 \in N_{03} = N_3 \cup N_4$, то $(C - AP(i\sigma_0))(C + BP(i\sigma_0)) = 0$,

$$\left|\Delta_Y(\sigma_0)\right| \geq \frac{1}{|P(i\sigma_0)|}\left|\left|C+BP(i\sigma_0)\right|\exp\{YP_1(\sigma_0)\}-\left|C-AP(i\sigma_0)\right|\right| \neq 0.$$

Пусть $\sigma_0 \in N_{01}$. Тогда если $\sigma_0 \notin N_5$, т. е. $P_5(\sigma_0) \neq 0$, то $\Delta_Y(\sigma_0) \neq 0$, $Y > 0$. Если же $\sigma_0 \in N_5$, т. е. $P_5(\sigma_0) = 0$, то $\alpha = |A| - |B| = \operatorname{Im}\overline{C}(A+B) = 0$ и при

$$Y_k = \frac{1}{P_1(\sigma_0)}\left[2k\pi + \arg\frac{C-AP(i\sigma_0)}{C+BP(i\sigma_0)}\right], \quad k \in \mathbf{Z}, \quad Y_k > 0, \quad \Delta_{Y_k}(\sigma_0) = 0,$$

и поскольку $Y_k \to +\infty$, $k \to \infty$, задача (1), (2) не может быть AK_∞-задачей.

Пусть теперь $\sigma_0 \notin N_0 = N_{01} \cup N_{02} \cup N_{03}$. Тогда уравнение $\Delta_Y(\sigma) = 0$ запишем в виде системы

$$Y = P_1^{-1}(\sigma)\ln\left|\frac{C-AP(i\sigma)}{C+BP(i\sigma)}\right|, \tag{13}$$

$$P_1^{-1}(\sigma)P_2(\sigma)\ln\left|\frac{C-AP(i\sigma)}{C+BP(i\sigma)}\right| - \arg\frac{C-AP(i\sigma)}{C+BP(i\sigma)} = 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{14}$$

Достаточность. Уравнение (13) при достаточно больших значениях $Y > 0$ может иметь 4 решения лишь в окрестности (конечного) множества N_0. При $\sigma \to \sigma_0 \in N_{01}$ уравнение (13) можно переписать в виде

$$Y = |P_4(\sigma)|^{-2}\left[2(\sigma-\sigma_0)^{q_1}\tilde{P}_1(\sigma)\right]^{-1}\ln(1+P_5(\sigma)), \quad P_5(\sigma_0) \neq 0.$$

Поскольку $\operatorname{sign}\left[\ln(1+P_5)(\sigma_0)|P_4(\sigma_0)|^{-2}\right] = \operatorname{sign}P_5(\sigma_0)$, из условия 1 вытекает неразрешимость уравнения (13) в достаточно малой окрестности точки σ_0 при $Y > 0$. Если $\sigma \to \sigma_0 \in N_{02}$, то левую часть уравнения (14) запишем в виде

$$\frac{\tilde{P}_2(\sigma_0)\tilde{P}_3(\sigma_0)(1+o(1))}{|P_4(\sigma_0)|^2\tilde{P}_1(\sigma_0)(\sigma-\sigma_0)^{q_1-q_2-q_5}} - \arg\frac{C-AP(i\sigma)}{C+BP(i\sigma)} = o(1), \quad \sigma \to \sigma_0. \tag{15}$$

Если $q_2 \geq q_1 - q_5$, то, используя (15) и строгую монотонность левой части (14), получаем, что (14) неразрешимо при любом $k \in \mathbf{Z}$ в $(\sigma_0 - \delta, \sigma_0)$ и $(\sigma_0, \sigma_0 + \delta)$, когда δ достаточно мало, $\sigma_0 \in N_{02}$ и $q_2 \geq q_1 - q_5$. Если же $\sigma_0 \in N_{02}$ и $\left[1+(-1)^{q_1-q_5}\right]\tilde{P}_1(\sigma_0)\tilde{P}_5(\sigma_0) < 0$, то неразрешимым в окрестности точки σ_0 при $Y > 0$ является уравнение (13). Наконец, если $\sigma_0 \in N_{03}$ и $\left[1+(-1)^{q_1}\right]\tilde{P}_1(\sigma_0)P_5(\sigma_0) < 0$, то при $\sigma \to \sigma_0$ и $Y > 0$ неразрешимо уравнение (13), что видно из неравенства

$$Y = \left[2(\sigma-\sigma_0)^{q_1}P_1(\sigma)\right]^{-1}\ln\left(1+|P_5(\sigma)|^{-2}P_5(\sigma)\right) < 0.$$

Если же $\sigma_0 \in N_{03}$ и $q_2 > 0$, то $q_1 = 0$, и мы приходим к неразрешимости (14), снова используя монотонность и ограниченность левой части уравнения.

Необходимость. Пусть $\sigma_0 \in N_{01}$ и $q_5 > 0$. Тогда $P_2(\sigma_0)P_4(\sigma_0) \neq 0$ и, выбирая $Y = Y_k$, $k \in \mathbf{Z}$, из условия

$$Y_k = P_2^{-1}(\sigma_0)\left[2k\pi + \arg\frac{P_3(\sigma_0)}{P_4(\sigma_0)}\right] \to +\infty,$$

получаем $\Delta_{Y_k}(\sigma_0) = 0$. Если $\sigma_0 \in N_{01}$, $q_5 = 0$, $\left[1+(-1)^{q_1}\right]\tilde{P}_1(\sigma_0)P_5(\sigma_0) \geq 0$, то правая часть (13) положительна хотя бы в одной полуокрестности точки σ_0 и при $\sigma \to \sigma_0$ в этой полуокрестности стремится к $+\infty$. Левая часть (14) при этом также стремится к $+\infty$ или к $-\infty$. Решая уравнение (14) в этой полуокрестности, находим точки σ_k $(\to \sigma_0)$ и затем

$$Y_k = P_1^{-1}(\sigma_k)\ln\left|\frac{P_3(\sigma_k)}{P_4(\sigma_k)}\right|.$$

Итак, $\Delta_{Y_k}(\sigma_k) = 0$. Если $\sigma_0 \in N_{02}$, $q_2 < q_1 - q_5$ и $\left[1 + (-1)^{q_1 - q_5}\right]\tilde{P}_1(\sigma_0)\tilde{P}_5(\sigma_0) \geq \geq 0$, то аналогично предыдущему случаю можно найти последовательность решений $\sigma_k \to \sigma_0$ уравнения (14) и, подставив их в правую часть (13), получить последовательность $Y_k \to +\infty$, при этом $\Delta_{Y_k}(\sigma_k) = 0$.

В случае невыполнения условия 3 ситуация аналогична, так как если существует $\sigma_0 \in N_{03}$ такое, что $q_2 = 0 \wedge \left[1 + (-1)^{q_1}\right]\tilde{P}_1(\sigma_0)P_5(\sigma_0) \geq 0$, то существует $\delta_0 > 0$ такое, что хотя бы на одном из множеств $(\sigma_0 - \delta_0, \sigma_0)$ и $(\sigma_0, \sigma_0 + + \delta_0)$

$$\frac{1}{P_1(\sigma)}\ln\left|\frac{C - AP(i\sigma)}{C + BP(i\sigma)}\right| \to +\infty.$$

Кроме того,

$$\left[\frac{P_2(\sigma)}{P_1(\sigma)}\ln\left|\frac{C - AP(i\sigma)}{C + BP(i\sigma)}\right| - \arg\frac{C - AP(i\sigma)}{C + BP(i\sigma)}\right]\frac{1}{2\pi} \to \infty$$

на этом же множестве $(\sigma_0 - \delta_0, \sigma_0)$ или $(\sigma_0, \sigma_0 + \delta_0)$. Тогда можно найти последовательность решений $\sigma_k \to \sigma_0$ уравнения (13) и, подставив их в правую часть (13), получить последовательность $Y_k \to +\infty$, при этом $\Delta_{Y_k}(\sigma_k) = 0$. Тем самым теорема доказана.

2.7. Случай $\boldsymbol{P_1(\sigma) \equiv P_1 = \mathrm{const},\ C(A + B)P_1 \neq 0,\ \deg P_2 > 0}$.

Теорема 13. *При* $P_1(\sigma) \equiv P_1 = \mathrm{const}$, $C(A + B)P_1 \neq 0$, $\deg P_2 > 0$ *задача* (1), (2) *является* AK_∞*-задачей тогда и только тогда, когда выполняются условия*

1) *для любого* $\sigma_0 \in N_3 \cup N_2$ *либо* $q_2 > 0$, *либо* $P_1(q_4 - q_3) < 0$
и одно из условий:

2) $AB \neq 0$

или

3) $AB = 0 \wedge P_1(|A| - |B|) < 0$.

Доказательство. В данном случае $N[P] = \varnothing$ и $\Delta_Y(\sigma) \neq 0$ при $\sigma \in N_3 \cup \cup N_4$. При $\sigma \notin N_3 \cup N_4$ уравнение $\Delta_Y(\sigma) = 0$ равносильно системе (13), (14). Поскольку нас интересует разрешимость этой системы при $Y \to +\infty$, из (13) следует, что σ можно искать либо в окрестности множества $N_3 \cup N_4$, либо (в случае $AB = 0$) при $|\sigma| \to \infty$. Для разрешимости (13) при $Y > 0$ и $\sigma \to \sigma_0 \in \in N_3 \cup N_4$ необходимо и достаточно выполнение неравенства $P_1(q_4 - q_3) > 0$. Если это так, то в силу условия 1 имеем $q_2 > 0$. Но тогда уравнение (14) неразрешимо в $(\sigma_0 - \delta, \sigma_0)$ и $(\sigma_0, \sigma_0 + \delta)$ в силу ограниченности и строгой монотонности его левой части в $(\sigma_0 - \delta, \sigma_0)$ и $(\sigma_0, \sigma_0 + \delta)$. Итак, при $AB \neq 0$ имеем $N[\Delta_Y] = \varnothing$. При $AB = 0$ для разрешимости (13) при $Y \to +\infty$ и $|\sigma| \to +\infty$ необходимо (и достаточно), чтобы $P_1(q_4 - q_3) > 0$, что противоречит условию 3.

Пусть теперь условия теоремы не выполняются. Тогда либо а) существует $\sigma_0 \in N_3 \cup N_4$, причем $q_2 = 0$ и $P_1(q_4 - q_3) > 0$, либо б) выполнено условие 1, $AB = 0$, $P_1(|A| - |B|) > 0$. В случае а) уравнение (14) разрешимо, причём оно имеет решения $\sigma_k \to \sigma_0 \pm 0$ (левая часть (14) — монотонная неограниченная функция при $\sigma \to \sigma_0 \pm 0$). Подставляя σ_k в (13), находим, что $Y_k \to +\infty$ и

(σ_k, Y_k) — решение системи (13), (14), т. е. $\Delta_{Y_k}(\sigma_k) = 0$. В случае б) левая часть (14) неограничена на $\mathbf{R} \setminus \mathbf{R}_{\sigma_0}$ (и непрерывна). Если σ_k, $|\sigma_k| \to +\infty$, $k \to \infty$, — решения (14) и $Y_k = P_1^{-1} \ln \left| \dfrac{P_3(\sigma_k)}{P_4(\sigma_k)} \right| \to +\infty$, $k \to \infty$, то $\Delta_{Y_k}(\sigma_k) = 0$.

Теорема доказана.

1. *Кенне Э.* Критерий регулярности краевой задачи с интегралом в краевом условии. – Деп. в ВИНИТИ, № 754-В92.
2. *Борок В. М., Кенне Э.* Классификация нелокальных краевых задач в узкой полосе // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 4. – С. 38 – 46.
3. *Борок В. М., Кенне Э.* Классификация интегральных краевых задач в широкой полосе // Изв. вузов. Математика. – 1994. – **5**. – С. 3 – 12.
4. *Kengne E.* On the narrow stripe of correctness of boundary value problems // Afr. Math. Ser. 3 – 1997. – **7**. – P. 35–53.
5. *Кенне Э.* Возмущение двухточечной задачи // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 7. – С. 980 – 984.
6. *Emmanuel Kengne, François Beceau Pelap.* Regularity of two-point boundary problems // Afr. Math. Ser. 3. – 2001. – **12**. – P. 61 – 70.
7. *Мамян А. Х.* Общие граничные задачи в слое // Докл. АН СССР. – 1982. – **267**, № 2. – С. 292 – 296.
8. *Панеях Б. П.* О некоторых нелокальных краевых задачах для линейных дифференциальных операторов // Мат. заметки. – 1984. – **35**, № 3. – С. 425 – 434.
9. *Петровский И. Г.* О проблеме Коши для системы линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюл. Моск. ун-та. Секц. А – 1938. – **1**, № 7. – С. 1 – 72.

Получено 04.07.2002