УДК 517.925.51

**В. И. Урманчев** (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

# КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЫВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ТОЧЕЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

For two-dimensional discontinuous dynamical systems, we investigate properties of the Poincaré mapping function by using the method of pointwise mappings. We obtain a criterion of the stability of $n$-impulse cycles and an estimate of number of attractors for considered dynamical systems.

Для двовимірних розривних динамічних систем методом точкових відображень досліджено властивості функції відображення Пуанкаре та отримано критерій стійкості $n$-імпульсних циклів і оцінку для числа стоків.

Задача качественного исследования импульсных систем является одной из самых актуальных задач современной теории дифференциальных уравнений. Это связано с запросами техники, где импульсные системы автоматического регулирования, импульсные вычислительные системы заняли весьма заметное место. Импульсные системы возникают также во многих задачах естествознания, при рассмотрении математических моделей, которые описываются системами дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр при производных, как нулевое приближение к решению при разложении по степеням малого параметра.

Основы общей теории импульсных систем изложены в основополагающей работе [1].

В 70-е годы теория одномерных динамических систем успешно использовалась для изучения двумерных разрывных динамических систем. Однако при этом авторы ограничивались либо рассмотрением достаточно узких классов таких систем и получением достаточных условий, касающихся качественных особенностей разрывных динамических систем (в основном вопросов устойчивости) [2 – 4], либо рассмотрением конкретных примеров [5, 6].

Таким образом, актуальной является задача распространения метода точечных отображений на общие классы двумерных разрывных динамических систем, а также более полное использование известных результатов теории одномерных точечных отображенией для исследования последних.

Будем рассматривать двумерную разрывную динамическую систему вида

$$\begin{aligned} \dot{\bar{r}} &= H(\bar{r}), \\ \Delta \bar{r}\Big|_{\bar{r} \in M} &= A(\bar{r}), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\bar{r} \in R^2$, $A$ продолжимо до отображения $A^*$ множества $R^2$ в себя, $A^*(\bar{r}) \in C^k(U(M))$ ($U(M)$ — некоторая окрестность $M$), $1 \le k \le 3$.

В дальнейшем под $A'_r(\bar{r})$, $A''_{rr}(\bar{r})$, $A'''_{rrr}(\bar{r})$ будем понимать ограничение соответствующей производной от $A^*(\bar{r})$ на множестве $M$. При этом решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{\bar{r}} &= H(\bar{r}), \\ \bar{r}(0) &= \bar{r}_0, \end{aligned}$$

имеет гладкость класса $C^k$ по начальным значениям; $M$ является одномерным подмногообразием в $R^2$ гладкости класса $C^k$, $1 \le k \le 3$.

© В. И. УРМАНЧЕВ, 2004

Пусть $x \in A(M)$. Обозначим через $L(x)$ точку первого пересечения положительной полутраектории системы

$$\dot{\bar{r}} = H(\dot{\bar{r}}), \tag{2}$$

выходящей из точки $x$, с множеством $M$ и положим $F = A \circ L$. Отображение будем называть функцией соответствия для разрывной динамической системы. Отображение $F$ будем называть отображением последования (или отображением Пуанкаре) для разрывной динамической системы.

Исследование разрывной динамической системы (1) с помощью метода точечных отображений сводится к исследованию разностного уравнения $a_{n+1} = F(a_n)$, $a_0 \in A(M)$. Однако для случая разрывных динамических систем на плоскости отображение $F$, отображающее одномерное множество $A(M)$ в себя (а также отображения $A$ и $L$, отображающие соответственно $M$ в $A(M)$ и $A(M)$ в $M$), плохо приспособлено для непосредственного использования известных результатов теории одномерных разностных уравнений [7, 8]. Поэтому вместо рассмотрения отображений $F$, $A$, $L$ необходимо временно ввести вспомогательные отображения, соответствующие последним, которые естественно определить исходя из некоторых параметрических уравнений начального и конечного множеств скачка.

Важным моментом является возможность поднятия отображения $F$ до отображения прямой в прямую. Это дает возможность использовать известные результаты из теории отображений прямой в прямую [7]. Именно этот случай и будем рассматривать в дальнейшем.

Пусть $L$, $A$ и $F$ — соответственно функция соответствия, оператор скачка и функция последования для разрывной динамической системы (1). Пусть отображение $F$ можно поднять до отображения прямой в прямую, $\bar{r} = \bar{s}(\tau)$ — параметрическое уравнение начального множества скачков системы (1), $\bar{r} = \bar{h}(\sigma)$ — параметрическое уравнение конечного множества скачков системы (1). Будем предполагать, что $\bar{h} \in C^1(R^1)$, $\bar{s} \in C^1(R^1)$, $\forall\, \tau \; |\bar{s}'(\tau)| \neq 0$, $\forall\, \sigma \; \left|\bar{h}'(\sigma)\right| \neq 0$. Определим функции $f_L$, $f_A$ и $f_F$ соответственно равенствами $\bar{s}(f_L(\sigma)) = L\left(\bar{h}(\sigma)\right)$, $\bar{h}(f_A(\tau)) = A(\bar{s}(\tau))$ и $f_F(\sigma) = f_A\left(f_L(\sigma)\right)$.

Функции $f_L$, $f_A$ и $f_F$ будем называть соответственно функцией соответствия, функцией скачка и функцией последования, ассоциированными с заданными параметризациями начального и конечного множеств скачка.

Из качественной теории гладких одномерных отображений прямой в прямую [7] следует, что для качественного исследования функций $f_L$, $f_A$, $f_F$ необходимо, в первую очередь, вычислить их первую и вторую производные, а также их шварцианы (для последних понадобится вычисление и третьей производной).

Условие гладкости класса $C^k$ по начальным значениям для решения задачи Коши

$$\dot{\bar{r}} = H(\bar{r}),$$
$$\bar{r}(0) = \bar{r}_0,$$

а также условия на множество $M$ гарантируют существование $k$-х производных от функций $f_L$, $f_A$, $f_F$.

Вычисление $k$-х производных необходимо выполнить в терминах понятий, касающихся рассматриваемой разрывной динамической системы.

С помощью первой производной от $f_F$ можно решать вопросы, связанные с устойчивостью $n$-импульсных циклов, вторая производная необходима для решения вопросов теории бифуркаций, а шварцианы дают возможность получать оценки сверху для числа минимальных притягивающих множеств исследуемой системы.

Следующая теорема устанавливает выражения для первых трех производных от $f_L$, $f_A$, $f_F$ в терминах понятий, касающихся рассматриваемой разрывной динамической системы.

**Теорема 1.** *Пусть дана двумерная разрывная динамическая система* (1) *такая, что* $\bar{r} = \bar{h}(\sigma)$ — *параметрическое уравнение ее конечного множества скачков;* $\bar{r} = \bar{s}(\tau)$ — *параметрическое уравнение ее начального множества скачков;* $A^*(\bar{r}) \in C^k(U(M))$, *где* $U(M)$ — *некоторая окрестность* $M$; $\bar{s} \in C^k(R^1)$, $\bar{h} \in C^k(f_A(R^1))$; $Z(\bar{r}) = C$ — *общий интеграл системы дифференциальных уравнений* $Z(\bar{r}) \in C^k(V(A(M)) \cup U(M))$, *где* $V(A(M))$ — *некоторая окрестность* $A(M)$, $k = 1, 2, 3$. *Положим*

$$u_0(\sigma) = \left\langle Z'_r\big(\bar{h}(\sigma)\big), h'(\sigma)\right\rangle, \qquad v_0(\sigma) = \left\langle Z'_r(\bar{s}(f_L(\sigma))), \bar{s}'(f_L(\sigma))\right\rangle,$$

$$u_1(\sigma) = \left\langle Z''_{rr}\big(\bar{h}(\sigma)\big)\bar{h}'(\sigma), \bar{h}'(\sigma)\right\rangle + \left\langle Z'_r\big(\bar{h}(\sigma)\big), \bar{h}''(\sigma)\right\rangle,$$

$$v_1(\sigma) = \left\langle Z''_{rr}(\bar{s}(f_L(\sigma)))\bar{s}'(f_L(\sigma)), \bar{s}'(f_L(\sigma))\right\rangle + \left\langle Z'_r(\bar{s}(f_L(\sigma))), \bar{s}'(f_L(\sigma))\right\rangle,$$

$$u_2(\sigma) = \left\langle Z'''_{rrr}\big(\bar{h}(\sigma)\big)\bar{h}'(\sigma)\bar{h}'(\sigma), \bar{h}'(\sigma)\right\rangle + $$
$$+ 2\left\langle Z''_{rr}\big(\bar{h}(\sigma)\big)\bar{h}'(\sigma), \bar{h}''(\sigma)\right\rangle + \left\langle Z'_r\big(\bar{h}(\sigma)\big), \bar{h}'''(\sigma)\right\rangle,$$

$$v_2(\sigma) = \left\langle Z'''_{rrr}(\bar{s}(f_L(\sigma)))\bar{s}'(f_L(\sigma))\bar{s}'(f_L(\sigma)), \bar{s}'(f_L(\sigma))\right\rangle +$$
$$+ \left\langle Z'_r(\bar{s}(f_L(\sigma))), \bar{s}'(f_L(\sigma))\right\rangle,$$

$$b_1(\tau) = \left|A'_r(\bar{s}(\tau))\bar{s}'(\tau)\right|, \qquad c_1(\tau) = \left|\bar{h}'(f_A(\tau))\right|,$$

$$b_2(\tau) = \left\langle A''_{rr}(\bar{s}(\tau))\bar{s}'(\tau)\bar{s}'(\tau), A'_r(\bar{s}(\tau))\bar{s}'(\tau)\right\rangle +$$
$$+ \left\langle A'_r(\bar{s}(\tau))\bar{s}''(\tau), A'_r(\bar{s}(\tau))\bar{s}'(\tau)\right\rangle,$$

$$c_2(\tau) = \left\langle \bar{h}''(f_A(\tau)), \bar{h}'(f_A(\tau))\right\rangle,$$

$$b_3(\tau) = \left\langle A'''_{rrr}(\bar{s}(\tau))\bar{s}'(\tau)\bar{s}'(\tau)\bar{s}'(\tau), A'_r(\bar{s}(\tau))\bar{s}'(\tau)\right\rangle +$$
$$+ \left\langle A''_{rr}(\bar{s}(\tau))\bar{s}'(\tau)\bar{s}'(\tau), \left(A''_{rr}(\bar{s}(\tau))\bar{s}'(\tau) + A'_r(\bar{s}(\tau))\bar{s}''(\tau)\right)\right\rangle,$$

$$c_3(\tau) = \left\langle \bar{h}'''(f_A(\tau)), \bar{h}'(f_A(\tau))\right\rangle + \left\langle \bar{h}''(f_A(\tau)), \bar{h}''(f_A(\tau))\right\rangle.$$

*Тогда*:

*если* $k = 1$, *то*

$$f'_L(\sigma) = d_{L,1}(\sigma) = \frac{u_0(\sigma)}{v_0(\sigma)} \quad \text{при условии} \quad v_0(\sigma) \neq 0,$$

$$f'_A(\tau) = d_{A,1}(\tau) = \operatorname{sign}\left(\det\left(A'_r(\bar{s}(\tau))\right)\right)\frac{b_1(\tau)}{c_1(\tau)} \quad \text{при условии} \quad c_1(\tau) \neq 0,$$

$$f'_F(\sigma) = d_{L,1}(\sigma)d_{A,1}(f_L(\sigma));$$

*если* $k = 2$, *то*

$$f''_L(\sigma) = d_{L,2}(\sigma) = \frac{u_1(\sigma)v_0^2(\sigma) - v_1(\sigma)u_0^2(\sigma)}{v_0^3(\sigma)},$$

$$f''_A(\tau) = d_{A,2}(\sigma) = \operatorname{sign}\left(\det\left(A'_r(\bar{s}(\tau))\right)\right)\frac{b_2(\tau)}{c_1(\tau)b_1(\tau)} - \frac{b_1^2(\tau)c_2(\tau)}{c_1^4(\tau)},$$

$$f_F''(\sigma) = d_{L,2}(\sigma)d_{A,1}(f_L(\sigma)) + (d_{L,1}(\sigma))^2 d_{A,2}(f_L(\sigma));$$

*если* $k=3$, *то*

$$f_L'''(\sigma) = d_{L,3}(\sigma) = \frac{u_2(\sigma)v_0^3(\sigma) - v_0^2(\sigma)v_1(\sigma)u_0(\sigma)u_1(\sigma) - v_2(\sigma)v_0(\sigma)u_0^3(\sigma)}{v_0^5(\sigma)} - \\ - \frac{2u_1(\sigma)u_0(\sigma)v_1(\sigma)v_0(\sigma) + 3v_1^2(\sigma)u_0^3(\sigma)}{v_0^5(\sigma)},$$

$$f_A'''(\tau) = d_{A,3}(\tau) =$$

$$= \operatorname{sign}(\det(A_r'(\bar{s}(\tau))))\left(\frac{b_3(\tau)c_1^2(\tau)b_1^2(\tau) - \left(c_2(\tau)b_1^2(\tau) + c_1^2(\tau)b_2(\tau)\right)b_2(\tau)}{c_1^3(\tau)b_1^3(\tau)}\right) - \\ - \frac{\left(2b_1^3(\tau)c_2(\tau) + c_1^2(\tau)b_2(\tau)c_2(\tau) + b_1^3(\tau)\operatorname{sign}(\det(A_r'(\bar{s}(\tau))))\right)b_1(\tau)c_3(\tau)}{b_1(\tau)c_1^7(\tau)} - \\ - \frac{4b_1^2(\tau)c_2^2(\tau)}{c_1^6(\tau)},$$

$$f_F'''(\sigma) = d_{L,3}(\sigma)d_{A,1}(f_L(\sigma)) + 3d_{L,1}(\sigma)d_{L,2}(\sigma)d_{A,1}(f_L(\sigma)) + \\ + d_{A,3}(f_L(\sigma))(d_{L,1}(\sigma))^3.$$

***Доказательство.*** 1. Докажем формулы для производных от функции $f_L(\sigma)$. Согласно определению интегральная кривая системы дифференциальных уравнений (2) проходит через точки $\bar{h}(\sigma)$ и $\bar{s}(f_L(\sigma))$. Таким образом, справедливо тождество $Z(\bar{h}(\sigma)) = Z(\bar{s}(f_L(\sigma)))$. Дифференцируя последнее соотношение по $\sigma$, получаем $f_L'(\sigma)\langle \operatorname{grad} Z(\bar{s}(f_L(\sigma))), \bar{s}'(f_L(\sigma))\rangle = \langle \operatorname{grad} Z(\bar{h}(\sigma)), \bar{h}'(\sigma)\rangle$, откуда с учетом введенных обозначений после преобразований имеем

$$f_L' = \frac{u_0}{v_0}. \tag{3}$$

Из определений функций $u_i(\sigma)$ и $v_i(\sigma)$ с учетом (3) получаем

$$u_0'(\sigma) = u_1(\sigma), \quad v_0'(\sigma) = \frac{u_0}{v_0}v_1, \quad u_1'(\sigma) = u_2(\sigma), \quad v_1'(\sigma) = \frac{u_0}{v_0}v_2,$$

откуда

$$f_L'' = (f_L')' = \left(\frac{u_0}{v_0}\right)' = \frac{u_0'v_0 - v_0'u_0}{v_0^2} = \frac{u_1v_0 - v_1u_0^2/v_0}{v_0^2} = \frac{u_1v_0^2 - v_1u_0^2}{v_0^3}. \tag{4}$$

Дифференцируя формулу (4) по $\sigma$ с учетом (3), после преобразований имеем

$$f_L''' = \left(\frac{u_1v_0^2 - v_1u_0^2}{v_0^3}\right)' = \frac{u_2v_0^3 - v_0^2v_1u_0u_1 - v_2v_0u_0^3 - 2u_1u_0v_1v_0 + 3v_1^2u_0^3}{v_0^5}.$$

2. Докажем формулы для производных от функции $f_A(\tau)$. Согласно определению $A(\bar{s}(\tau)) = \bar{h}(f_A(\tau))$. Дифференцируя обе части этого равенства по $\tau$, получаем $A_r'(\bar{s}(\tau))\bar{s}'(\tau) = \bar{h}'(f_A(\tau))$, откуда $|A_r'(\bar{s}(\tau))\bar{s}'(\tau)| = |f_A'(\tau)|\left|\bar{h}'(f_A(\tau))\right|$.

Таким образом,

$$\left| f_A'(\tau) \right| = \frac{\left| A_r'(\bar{s}(\tau))\bar{s}'(\tau) \right|}{\left| \bar{h}'(f_A(\tau)) \right|}.$$

Знак $f_A'(\tau)$ определяется тем, меняет или не меняет ориентацию оператор скачка, т. е. знаком $\det(A_r'(\bar{s}(\tau)))$. Таким образом, с учетом того, что $f_A'(\tau) = \operatorname{sign}(f_A'(\tau)) \left| f_A'(\tau) \right|$, получаем

$$f_A'(\tau) = \operatorname{sign}(\det(A_r'(\bar{s}(\tau)))) \frac{\left| A_r'(\bar{s}(\tau))\bar{s}'(\tau) \right|}{\left| \bar{h}'(f_A(\tau)) \right|} \quad \text{при условии} \quad \left| \bar{h}'(f_A(\tau)) \right| \neq 0$$

или с учетом обозначений

$$f_A'(\tau) = d_{A,1}(\tau) = \operatorname{sign}(\det(A_r'(\bar{s}(\tau)))) \frac{b_1(\tau)}{c_1(\tau)} \tag{5}$$

при условии $c_1(\tau) \neq 0$. Дифференцируя формулу (5) по $\tau$, имеем

$$f_A''(\tau) = \operatorname{sign}(\det(A_r'(\bar{s}(\tau)))) \frac{b_1'(\tau)c_1(\tau) - c_1'(\tau)b_1(\tau)}{c_1^2(\tau)}. \tag{6}$$

Продифференцируем $b_1(\tau)$, $c_1(\tau)$ по $\tau$ с учетом введенных обозначений:

$$b_1'(\tau) = \frac{b_2(\tau)}{b_1(\tau)}, \tag{7}$$

$$c_1'(\tau) = f_A'(\tau) \frac{c_2(\tau)}{c_1(\tau)}. \tag{8}$$

Подставляя (7) и (8) в (6), находим

$$f_A''(\tau) = \operatorname{sign}(\det(A_r'(\bar{s}(\tau)))) \frac{b_2(\tau)}{c_1(\tau)b_1(\tau)} - \frac{b_1^2(\tau)c_2(\tau)}{c_1^4(\tau)}. \tag{9}$$

Дифференцируя формулу (9) по $\tau$, получаем

$$f_A'''(\tau) = \operatorname{sign}(\det(A_r'(\bar{s}(\tau)))) \left( \frac{b_2'(\tau)c_1(\tau)b_1(\tau) - (c_1'(\tau)b_1(\tau) + c_1(\tau)b_1'(\tau))b_2(\tau)}{c_1^2(\tau)b_1^2(\tau)} \right) -$$
$$- \left( \frac{\left(2b_1(\tau)b_1'(\tau)c_2(\tau) + b_1^2(\tau)c_2'(\tau)\right)c_1^4(\tau) - 4c_1'(\tau)c_1^3(\tau)b_1^2(\tau)c_2(\tau)}{c_1^8(\tau)} \right). \tag{10}$$

Продифференцируем $b_2(\tau)$, $c_2(\tau)$ по $\tau$ с учетом введенных обозначений:

$$b_2'(\tau) = b_3(\tau), \tag{11}$$

$$c_2'(\tau) = f_A'(\tau)c_3(\tau) = \operatorname{sign}(\det(A_r'(\bar{s}(\tau)))) \frac{b_1(\tau)}{c_1(\tau)} c_3(\tau). \tag{12}$$

Подставляя (11) и (12) в (10), после преобразований имеем

$$f_A'''(\tau) = \operatorname{sign}(\det(A_r'(\bar{s}(\tau)))) \left( \frac{b_3(\tau)c_1^2(\tau)b_1^2(\tau) - \left(c_2(\tau)b_1^2(\tau) + c_1^2(\tau)b_2(\tau)\right)b_2(\tau)}{c_1^3(\tau)b_1^3(\tau)} \right) -$$
$$- \frac{\left(2b_1^3(\tau)c_2(\tau) + c_1^2(\tau)b_2(\tau)c_2(\tau) + b_1^3(\tau)\operatorname{sign}(\det(A_r'(\bar{s}(\tau))))\right)b_1(\tau)c_3(\tau)}{b_1(\tau)c_1^7(\tau)} -$$
$$- \frac{4b_1^2(\tau)c_2^2(\tau)}{c_1^6(\tau)}.$$

3. Докажем формулы для производных от функции $f_F(\tau)$. Поскольку

$$f_F'(\sigma) = f_L'(\sigma) f_A'(f_L(\sigma)),$$

$$f_F''(\sigma) = f_L''(\sigma) f_A'(f_L(\sigma)) + (f_L'(\sigma))^2 f_A''(f_L(\sigma)),$$

$$f_F'''(\sigma) = f_L'''(\sigma) f_A'(f_L(\sigma)) + 3 f_L'(\sigma) f_L''(\sigma) f_A''(f_L(\sigma)) + (f_L'(\sigma))^3 f_A'''(f_L(\sigma)),$$

с учетом введенных обозначений и полученных выше результатов получаем доказываемые формулы для производных от $f_F$.

Введенные в начале статьи параметризации являются „вынужденной мерой", и от их выбора качественные характеристики исследуемой разрывной динамической системы не зависят. Для того чтобы избавиться от произвола выбора параметризаций, необходимо перейти к рассмотрению случая, когда уравнения начального и конечного множеств скачков заданы неявно.

Следующая теорема обеспечивает переход от рассмотрения функций, определенных на множествах параметров, параметризующих $M$ и $A(M)$, к функциям, определенным на $M$ и $A(M)$ непосредственно. Соответствующие функции приведены в замечании к теореме.

**Теорема 2.** *Пусть дана разрывная динамическая система* (1), $\bar{r} = \bar{s}(\tau)$ — *параметрическое уравнение ее начального множества скачков,* $\bar{r} = \bar{h}(\sigma)$ — *параметрическое уравнение ее конечного множества скачков,* $S(\bar{r}) = 0$ — *неявное уравнение начального множества скачков системы* (1), $Q(\bar{r}) = 0$ — *неявное уравнение конечного множества скачков системы* (1),

$$\bar{s} \in C^k(R^1), \quad \bar{h} \in C^k(R^1), \quad S \in C^k(R^2), \quad Q \in C^k(R^2), \quad k = 1, 2, 3,$$

$$\forall \tau \ \ |\bar{s}'(\tau)| \neq 0, \quad \forall \sigma \ \ \left|\bar{h}'(\sigma)\right| \neq 0, \quad |\operatorname{grad} S(\bar{r})| \neq 0, \quad |\operatorname{grad} Q(\bar{r})| \neq 0.$$

*Тогда для получения аналогов формул для k-х производных от* $f_L$, $f_A$, $f_F$ *в соответствующих формулах достаточно заменить*:

$$\bar{s}'(\tau) \ \ \text{на} \ \ \operatorname{sgrad} S(\bar{s}(\tau)), \quad \bar{h}'(\sigma) \ \ \text{на} \ \ \operatorname{sgrad} Q\big(\bar{h}(\sigma)\big),$$

$$\bar{s}''(\tau) \ \ \text{на} \ \ G(S(\bar{s}(\tau)))\operatorname{sgrad} S((\bar{s}(\tau))), \quad \bar{h}''(\sigma) \ \ \text{на} \ \ G\big(Q\big(\bar{h}(\sigma)\big)\big)\operatorname{sgrad} Q\big(\bar{h}(\sigma)\big),$$

$$\bar{s}'''(\tau) \ \ \text{на} \ \ G_{\bar{r}}'(S(\bar{s}(\tau)))\operatorname{sgrad} S((\bar{s}(\tau)))\operatorname{sgrad} S((\bar{s}(\tau))) + G^2(S(\bar{s}(\tau)))\operatorname{sgrad} S((\bar{s}(\tau))),$$

$$\bar{h}'''(\sigma) \ \ \text{на} \ \ G_{\bar{r}}'\big(Q\big(\bar{h}(\sigma)\big)\big)\operatorname{sgrad} Q\big(\bar{h}(\sigma)\big)\operatorname{sgrad} Q\big(\bar{h}(\sigma)\big) + G^2\big(Q\big(\bar{h}(\sigma)\big)\big)\operatorname{sgrad} Q\big(\bar{h}(\sigma)\big),$$

*где*

$$G(W(\bar{u})) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial^2 W}{\partial u_1 \partial u_2} & \dfrac{\partial^2 W}{\partial u_1^2} \\ -\dfrac{\partial^2 W}{\partial u_2^2} & \dfrac{\partial^2 W}{\partial u_1 \partial u_2} \end{pmatrix}, \quad \bar{u} = (u_1, u_2).$$

***Доказательство.*** Рассмотрим задачу описания класса функций, задающих параметрические уравнения $\bar{r} = \bar{V}(\sigma)$ кривой $C$, определяемой неявным уравнением $W(\bar{r}) = 0$.

Функция $\bar{V}(\sigma)$ определяется как решение некоторой задачи Коши вида

$$\dot{\bar{V}} = \bar{\Psi}\big(\bar{V}(\sigma)\big), \qquad \bar{V}(0) = \bar{V}_0, \quad \bar{V}_0 \in C, \tag{13}$$

где функция $\bar{\Psi}(\bar{u})$ определяется из условия ортогональности с вектором $\operatorname{grad} W(\bar{u})$.

Последнее условие можно записать в виде $\bar{\Psi}(\bar{u}) = \alpha(\bar{u}) \operatorname{sgrad} W(\bar{u})$, где $\alpha(\bar{u}) \neq 0$ — некоторая достаточно произвольная скалярная функция. Таким образом, задача Коши (13) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\bar{V}} &= \alpha\big(\bar{V}(\sigma)\big) \operatorname{sgrad} W\big(\bar{V}(\sigma)\big), \\ \bar{V}(0) &= \bar{V}_0, \qquad \bar{V}_0 \in C. \end{aligned} \tag{14}$$

В качестве простейшего варианта выбора $\alpha(\bar{u})$ можно выбрать $\alpha(\bar{u}) = 1$. Тогда задача Коши (14) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\bar{V}} &= \operatorname{sgrad} W\big(\bar{V}(\sigma)\big), \\ \bar{V}(0) &= \bar{V}_0, \qquad \bar{V}_0 \in C. \end{aligned}$$

Таким образом, если выполнены условия теоремы, то для получения аналогов формул для первых производных от $f_L$, $f_A$, $f_F$ в соответствующих формулах достаточно заменить $\bar{s}'(\tau)$ на $\operatorname{sgrad} S(\bar{s}(\tau))$ и $\bar{h}'(\sigma)$ на $\operatorname{sgrad} Q\big(\bar{h}(\sigma)\big)$.

Дифференцируя равенство $\dot{\bar{V}}(\sigma) = \operatorname{sgrad} W\big(\bar{V}(\sigma)\big)$ по $\sigma$, получаем $\ddot{\bar{V}}(\sigma) = G\big(W\big(\bar{V}(\sigma)\big)\big)\, \dot{\bar{V}} = G\big(W\big(\bar{V}(\sigma)\big)\big) \operatorname{sgrad}\big(W\big(\bar{V}(\sigma)\big)\big)$.

Таким образом, если выполнены условия теоремы, то для получения аналогов формул для вторых производных от $f_L$, $f_A$, $f_F$ в соответствующих формулах достаточно заменить $\bar{s}''(\tau)$ на $G(S(\bar{s}(\tau))) \operatorname{sgrad} S(\bar{s}(\tau))$ и $\bar{h}''(\sigma)$ на $G\big(Q\big(\bar{h}(\sigma)\big)\big) \operatorname{sgrad} Q\big(\bar{h}(\sigma)\big)$.

Дифференцируя равенство $\ddot{\bar{V}}(\sigma) = G\big(W\big(\bar{V}(\sigma)\big)\big) \operatorname{sgrad}\big(W\big(\bar{V}(\sigma)\big)\big)$ по $\sigma$, имеем

$$\begin{aligned} \dddot{\bar{V}}(\sigma) &= G'_{\bar{r}}\big(W\big(\bar{V}(\sigma)\big)\big) \operatorname{sgrad}\big(W\big(\bar{V}(\sigma)\big)\big) \operatorname{sgrad}\big(W\big(\bar{V}(\sigma)\big)\big) + \\ &\quad + G^2\big(W\big(\bar{V}(\sigma)\big)\big) \operatorname{sgrad}\big(W\big(\bar{V}(\sigma)\big)\big). \end{aligned}$$

Таким образом, если выполнены условия теоремы, то для получения аналогов формул для третьих производных от $f_L$, $f_A$, $f_F$ в соответствующих формулах достаточно заменить $\bar{s}'''(\tau)$ на $G'_{\bar{r}}(S(\bar{s}(\tau))) \operatorname{sgrad} S(\bar{s}(\tau)) \operatorname{sgrad} S(\bar{s}(\tau)) + G^2(S(\bar{s}(\tau))) \operatorname{sgrad} S(\bar{s}(\tau))$ и $\bar{h}'''(\sigma)$ на $G'_{\bar{r}}\big(Q\big(\bar{h}(\sigma)\big)\big) \operatorname{sgrad} Q\big(\bar{h}(\sigma)\big) \operatorname{sgrad} Q\big(\bar{h}(\sigma)\big) + G^2\big(Q\big(\bar{h}(\sigma)\big)\big) \operatorname{sgrad} Q\big(\bar{h}(\sigma)\big)$.

***Замечание.*** Из полученных выше результатов вытекает, что $k$-м производным от функций $f_L$, $f_A$, $f_F$ можно сопоставить соответственно функции $D_{k,L}(\bar{r})$, $\bar{r} \in A(M)$, $D_{k,A}(\bar{r})$, $\bar{r} \in M$, $D_{k,F}(\bar{r})$, $\bar{r} \in A(M)$, $k = 1, 2, 3$, а именно положим

$$\begin{aligned} U_0(\bar{r}) &= \langle \operatorname{grad} Z(\bar{r}), \operatorname{sgrad} Q(\bar{r}) \rangle, \\ V_0(\bar{r}) &= \langle \operatorname{grad} Z(L(\bar{r})), \operatorname{sgrad} S(L(\bar{r})) \rangle, \\ U_1(\bar{r}) &= \langle Z''_{rr}(\bar{r}) \operatorname{sgrad} Q(\bar{r}), \operatorname{sgrad} Q(\bar{r}) \rangle + \langle \operatorname{grad} Z(\bar{r}), G(Q(\bar{r})) \operatorname{sgrad} Q(\bar{r}) \rangle, \\ V_1(\bar{r}) &= \langle Z''_{rr}(L(\bar{r})) \operatorname{sgrad} S(L(\bar{r})), \operatorname{sgrad} S(L(\bar{r})) \rangle + \\ &\quad + \langle \operatorname{grad} Z(L(\bar{r})), \operatorname{sgrad} S(L(\bar{r})) \rangle, \\ U_2(\bar{r}) &= \langle Z'''_{rrr}(\bar{r}) \operatorname{sgrad} Q(\bar{r}) \operatorname{sgrad} Q(\bar{r}), \operatorname{sgrad} Q(\bar{r}) \rangle + \\ &\quad + 2 \langle Z''_{rr}(\bar{r}) \operatorname{sgrad} Q(\bar{r}), G(Q(\bar{r})) \operatorname{sgrad} Q(\bar{r}) \rangle + \end{aligned}$$

$$+ \left\langle \operatorname{grad} Z(\bar{r}), G'_{\bar{r}}(Q(\bar{r}))\operatorname{sgrad} Q(\bar{r})\operatorname{sgrad} Q(\bar{r}) + G^2(Q(\bar{r}))\operatorname{sgrad} Q(\bar{r}) \right\rangle,$$

$$V_2(\bar{r}) = \langle Z'''_{rrr}(L(\bar{r}))\operatorname{sgrad} S(L(\bar{r}))\operatorname{sgrad} S(L(\bar{r})), \operatorname{sgrad} S(L(\bar{r})) \rangle +$$

$$+ \langle \operatorname{grad} Z(L(\bar{r})), \operatorname{sgrad} S(L(\bar{r})) \rangle,$$

$$B_1(\bar{r}) = |A'_r(\bar{r})\operatorname{sgrad} S(\bar{r})|,$$

$$C_1(\bar{r}) = |\operatorname{sgrad} Q(A(\bar{r}))|,$$

$$B_2(\bar{r}) = \langle A''_{rr}(\bar{r})\operatorname{sgrad} S(\bar{r})\operatorname{sgrad} S(\bar{r}), A'_r(\bar{r})\operatorname{sgrad} S(\bar{r}) \rangle +$$

$$+ \langle A'_r(\bar{r}) G(S(\bar{r}))\operatorname{sgrad} S(\bar{r}), A'_r(\bar{r})\operatorname{sgrad} S(\bar{r}) \rangle,$$

$$C_2(\bar{r}) = \langle G(Q(A(\bar{r})))\operatorname{sgrad} Q(A(\bar{r})), \operatorname{sgrad} Q(A(\bar{r})) \rangle,$$

$$B_3(\bar{r}) = \langle A'''_{rrr}(\bar{r})\operatorname{sgrad} S(\bar{r})\operatorname{sgrad} S(\bar{r})\operatorname{sgrad} S(\bar{r}), A'_r(\bar{r})\operatorname{sgrad} S(\bar{r}) \rangle +$$

$$+ \langle A''_{rr}(\bar{r})\operatorname{sgrad} S(\bar{r})\operatorname{sgrad} S(\bar{r}), (A''_{rr}(\bar{r})\operatorname{sgrad} S(\bar{r}) + A'_r(\bar{r}) G(S(\bar{r}))\operatorname{sgrad} S(\bar{r})) \rangle,$$

$$C_3(\bar{r}) = \langle G'_{\bar{r}}(Q(A(\bar{r})))\operatorname{sgrad} Q(A(\bar{r}))\operatorname{sgrad} Q(A(\bar{r})), \operatorname{sgrad} Q(A(\bar{r})) \rangle +$$

$$+ \left\langle G^2(Q(A(\bar{r})))\operatorname{sgrad} Q(A(\bar{r})), \operatorname{sgrad} Q(A(\bar{r})) \right\rangle \times$$

$$\times \langle G(Q(A(\bar{r})))\operatorname{sgrad} Q(A(\bar{r})), G(Q(A(\bar{r})))\operatorname{sgrad} Q(A(\bar{r})) \rangle,$$

где

$$G(W(\bar{u})) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial^2 W}{\partial u_1 \partial u_2} & \dfrac{\partial^2 W}{\partial u_1^2} \\ -\dfrac{\partial^2 W}{\partial u_2^2} & \dfrac{\partial^2 W}{\partial u_1 \partial u_2} \end{pmatrix}, \quad \bar{u} = (u_1, u_2),$$

$$D_{1,L}(\bar{r}) = \frac{U_0(\bar{r})}{V_0(\bar{r})}, \quad \bar{r} \in A(M),$$

$$D_{1,A}(\bar{r}) = \operatorname{sign}(\det(A'_r(\bar{r})))\frac{B_1(\bar{r})}{C_1(\bar{r})}, \quad \bar{r} \in M,$$

$$D_{1,F}(\bar{r}) = D_{1,L}(\bar{r})\, D_{1,A}(L(\bar{r})), \quad \bar{r} \in A(M),$$

$$D_{2,L}(\bar{r}) = \frac{U_1(\bar{r})V_0^2(\bar{r}) - V_1(\bar{r})U_0^2(\bar{r})}{V_0^3(\bar{r})}, \quad \bar{r} \in A(M),$$

$$D_{2,A}(\bar{r}) = \operatorname{sign}(\det(A'_r(\bar{r})))\frac{B_2(\bar{r})}{C_1(\bar{r})B_1(\bar{r})} - \frac{B_1^2(\bar{r})C_2(\bar{r})}{C_1^4(\bar{r})}, \quad \bar{r} \in M,$$

$$D_{2,F}(\bar{r}) = D_{L,2}(\bar{r})D_{A,1}(L(\bar{r})) + \left(D_{L,1}(\bar{r})\right)^2 D_{A,2}(L(\bar{r})), \quad \bar{r} \in A(M),$$

$$D_{3,L}(\bar{r}) = \frac{U_2(\bar{r})V_0^3(\bar{r}) - V_0^2(\bar{r})V_1(\bar{r})U_0(\bar{r})U_1(\bar{r}) - V_2(\bar{r})V_0(\bar{r})U_0^3(\bar{r})}{V_0^5(\bar{r})} -$$

$$- \frac{2U_1(\bar{r})U_0(\bar{r})V_1(\bar{r})V_0(\bar{r}) + 3V_1^2(\bar{r})U_0^3(\bar{r})}{V_0^5(\bar{r})}, \quad \bar{r} \in A(M),$$

$$D_{3,A}(\bar{r}) =$$

$$= \operatorname{sign}(\det(A'_r(\bar{r})))\left(\frac{B_3(\bar{r})C_1^2(\bar{r})B_1^2(\bar{r}) - \left(C_2(\bar{r})B_1^2(\bar{r}) + C_1^2(\bar{r})B_2(\bar{r})\right)B_2(\bar{r})}{C_1^3(\bar{r})B_1^3(\bar{r})}\right) -$$

$$-\frac{\left(2B_1^3(\bar r)C_2(\bar r)+C_1^2(\bar r)B_2(\bar r)C_2(\bar r)+B_1^3(\bar r)\operatorname{sign}\left(\det\left(A'_r(\bar r)\right)\right)\right)B_1(\bar r)C_3(\bar r)}{B_1(\bar r)C_1^7(\bar r)}-$$

$$-\frac{4B_1^2(\bar r)C_2^2(\bar r)}{C_1^6(\bar r)},\qquad \bar r\in M,$$

$$D_{3,F}(\bar r) = D_{3,L}(\bar r)D_{1,A}(L(\bar r)) + 3D_{1,L}(\bar r)D_{2,L}(\bar r)D_{1,A}(L(\bar r)) +$$

$$+ D_{3,A}(L(\bar r))\left(D_{1,L}(\bar r)\right)^3,\qquad \bar r\in A(M).$$

Из теорем 1, 2 и известных теорем анализа можно получить описание всех основных свойств функции последования для рассматриваемой разрывной динамической системы.

**Теорема 3.** *Пусть дана двумерная разрывная динамическая система* (1) *такая, что* $A^*(\bar r)\in C^1(U(M))$, *где* $U(M)$ — *некоторая окрестность* $M$; $Z(\bar r) = C$ — *общий интеграл системы дифференциальных уравнений* (2); $Z(\bar r)\in C^1(V(A(M))\cup U(M))$, *где* $V(A(M))$ — *некоторая окрестность* $A(M)$; $S(\bar r)=0$ — *неявное уравнение начального множества скачков*; $Q(\bar r)=0$ — *неявное уравнение конечного множества скачков*; $S(\bar r)\in C^1(U(M))$, $Q(\bar r)\in C^1(V(A(M)))$.

*Отображение* $F$ *можно поднять до отображения прямой в прямую. Тогда*:

1) *если в точке* $\bar r_0\in A(M)$ *выполняются условия*

$$\left|A'_r(L(\bar r_0))\operatorname{sgrad}S(L(\bar r_0))\right|\neq 0,\qquad \left|\operatorname{sgrad}Q(F(\bar r_0))\right|\neq 0,$$
$$\left\langle \operatorname{grad}Z(L(\bar r_0)),\operatorname{sgrad}S(L(\bar r_0))\right\rangle\neq 0$$

*и*

$$\operatorname{sign}\left(\det A'_r(L(\bar r_0))\right)\frac{\left\langle \operatorname{grad}Z(\bar r_0),\operatorname{sgrad}Q(\bar r_0)\right\rangle}{\left\langle \operatorname{grad}Z(L(\bar r_0)),\operatorname{sgrad}S(L(\bar r_0))\right\rangle}>0,$$

*то* $F$ — *диффеоморфизм, не меняющий ориентацию в некоторой окрестности точки* $\bar r_0$;

2) *если в точке* $\bar r_0\in A(M)$ *выполняются условия*

$$\left|A'_r(L(\bar r_0))\operatorname{sgrad}S(L(\bar r_0))\right|\neq 0,\qquad \left|\operatorname{sgrad}Q(F(\bar r_0))\right|\neq 0,$$
$$\left\langle \operatorname{grad}Z(L(\bar r_0)),\operatorname{sgrad}S(L(\bar r_0))\right\rangle\neq 0$$

*и*

$$\operatorname{sign}\left(\det A'_r(L(\bar r_0))\right)\frac{\left\langle \operatorname{grad}Z(\bar r_0),\operatorname{sgrad}Q(\bar r_0)\right\rangle}{\left\langle \operatorname{grad}Z(L(\bar r_0)),\operatorname{sgrad}S(L(\bar r_0))\right\rangle}<0,$$

*то* $F$ — *диффеоморфизм, меняющий ориентацию в некоторой окрестности точки* $\bar r_0$;

3) *множество точек разрыва отображения* $F$ *представляет собой множество точек, в которых имеется касание четного порядка траекторий системы* (2) *с начальным множеством скачков (при условии, что* $A(\bar r_0)$ *не является точкой, в которой имеется касание четного порядка траекторий системы* (2) *с конечным множеством скачков)*;

*достаточным условием для того, чтобы точка* $\bar r_0$ *была точкой разрыва* $F$, *является выполнение условий* $\left\langle \operatorname{grad}Z(L(\bar r_0)),\operatorname{sgrad}S(L(\bar r_0))\right\rangle = 0$ *при условиях* $\left\langle \operatorname{grad}Z(\bar r_0),\operatorname{sgrad}Q(\bar r_0)\right\rangle\neq 0$, $D_{2,F}(\bar r_0)\neq 0$;

4) *множество точек* $\bar r_0$, *где нарушается взаимная однозначность отображения* $F$, *представляет собой множество точек, в которых имеется касание*

*четного порядка траекторий системы* (2) *с конечным множеством скачков (при условии, что* $L(\bar{r}_0)$ *не является точкой, в которой имеется касание четного порядка траекторий системы* (2) *с начальным множеством скачков*);

*достаточным условием для того, чтобы точка* $\bar{r}_0$ *была точкой, где нарушается взаимная однозначность отображения* $F$, *является выполнение соотношений* $\langle \operatorname{grad} Z(\bar{r}), \operatorname{sgrad} Q(\bar{r}) \rangle = 0$, $\langle \operatorname{grad} Z(L(\bar{r}_0)), \operatorname{sgrad} S(L(\bar{r}_0)) \rangle \neq 0$ *и условия* $D_{2,F}(\bar{r}_0) \neq 0$.

***Доказательство.*** 1. Из формул для производных $f_F'(\sigma)$ (теорема 1), теоремы 2 и замечания следует, что выполнение условий п. 1 теоремы эквивалентно условию $f_F'(\sigma_0) > 0$, где $\sigma_0$ соответствует точке $r_0$.

Таким образом, $f_F$ — диффеоморфизм, не меняющий ориентацию в некоторой окрестности точки $\sigma_0$ и, следовательно, $F$ — диффеоморфизм, не меняющий ориентацию в некоторой окрестности точки $\bar{r}_0$.

2. Из формул для производных $f_F'(\sigma)$ (теорема 1), теоремы 2 и замечания следует, что выполнение условий п. 2 теоремы эквивалентно условию $f_F'(\sigma_0) < < 0$, где $\sigma_0$ соответствует точке $r_0$.

Таким образом, $f_F$ — диффеоморфизм, меняющий ориентацию в некоторой окрестности точки $\sigma_0$ и, следовательно, $F$ — диффеоморфизм, меняющий ориентацию в некоторой окрестности точки $\bar{r}_0$.

Доказательство пп. 3 и 4 непосредственно следует из геометрических соображений, формул для $f_F'(\sigma)$, теоремы 2 и известных теорем анализа.

Опираясь на формулы для $D_{1,F}(\bar{r})$, легко получить следующий критерий устойчивости $n$-импульсных циклов разрывной динамической системы (1).

**Теорема 4.** *Пусть дана двумерная разрывная динамическая система* (1) *такая, что отображение* $F$ *можно поднять до отображения прямой в прямую;* $A^*(\bar{r}) \in C^k(U(M))$, *где* $U(M)$ *— некоторая окрестность* $M$; $Z(\bar{r}) = C$ *— общий интеграл системы дифференциальных уравнений* (2); $Z(\bar{r}) \in \in C^k(V(A(M)) \cup U(M))$, *где* $V(A(M))$ *— некоторая окрестность* $A(M)$; $S(\bar{r}) = 0$ *— неявное уравнение начального множества скачков;* $Q(\bar{r}) = 0$ *— неявное уравнение конечного множества скачков;* $S(\bar{r}) \in C^1(U(M))$, $Q(\bar{r}) \in \in C^1(V(A(M))$.

*Пусть система* (1) *имеет* $n$-*импульсный цикл* $C_n$, $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$ *— начальные точки скачка цикла* $C_n$, $\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n\}$ *— конечные точки скачка цикла* $C_n$.

*Положим*

$$\mu(C_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{|A_r'(\bar{y}_i) \operatorname{sgrad} Q(\bar{y}_i)|}{|\operatorname{sgrad} S(\bar{x}_i)|} \left| \frac{\langle \operatorname{grad} Z(\bar{y}_i), \operatorname{sgrad} Q(\bar{y}_i) \rangle}{\langle \operatorname{grad} Z(\bar{x}_i), \operatorname{sgrad} S(\bar{x}_i) \rangle} \right|.$$

*Тогда цикл* $C_n$ *устойчив, если* $\mu(C_n) < 1$, *неустойчив, если* $\mu(C_n) > 1$, *и полуустойчив, если* $\mu(C_n) = 1$.

***Доказательство.*** Из теории одномерных гладких точечных отображений [7] известно, что если $C_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — $n$-кратный цикл гладкого отображения $f$ и

$$\mu(C_n) = \left| \prod_{i=1}^{n} f'(a_i) \right|, \tag{15}$$

то цикл $C_n$ устойчив, если $\mu(C_n) < 1$, неустойчив, если $\mu(C_n) > 1$, и полуустойчив, если $\mu(C_n) = 1$.

Таким образом, доказательство теоремы 4 следует из формулы (15) и формулы для $D_{1,F}(\bar{r})$.

Опираясь на методы исследования точечных отображений прямой в прямую с помощью шварцианов [7], можно получить оценки для числа стоков системы (1).

**Теорема 5.** *Пусть дана двумерная разрывная динамическая система* (1) *такая, что* $A^*(\bar{r}) \in C^3(U(M))$, *где* $U(M)$ — *некоторая окрестность* $M$; $Z(\bar{r}) \in C^3(V(A(M)) \cup U(M))$, *где* $V(A(M))$ — *некоторая окрестность* $A(M)$, $Z(\bar{r}) = C$ — *общий интеграл системы дифференциальных уравнений* (2); $D_{F,1}(\bar{r}) \neq 0$ *в* $V(A(M))$; *существует* $\Omega \in V(A(M))$, *связное и инвариантное относительно отображения* $F$; $J \neq \varnothing$ — *множество, где нарушается взаимная однозначность отображения* $F$ *(оно определяется из п.* 4 *теоремы* 3*),* $J \in \Omega$, $m < \infty$ — *мощность* $J$,

$$Sw(r) = \frac{D_{F,3}(\bar{r})}{D_{F,1}(\bar{r})} - \frac{3}{2}\left(\frac{D_{F,2}(\bar{r})}{D_{F,1}(\bar{r})}\right)^2 < 0 \quad \text{в} \quad \Omega.$$

*Тогда число минимальных притягивающих множеств рассматриваемой двумерной разрывной динамической системы в области* $D$ *не более* $m+1$.

***Доказательство.*** Из условий доказываемой теоремы, теорем 1, 2 и замечания следует, что шварциан отображения $f_F$ в области параметров $\sigma$ соответствующей области $\Omega$ отрицателен.

Таким образом, доказательство теоремы непосредственно следует из теоремы о числе стоков для одномерных унимодальных отображений [7].

1. *Перестюк Н. А., Самойленко А. М.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 288 с.
2. *Аматова Г. М.* Исследование автономных систем методом точечных отображений: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Минск, 1985. – 14 с.
3. *Аматов М. А.* Качественные исследования дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями: Автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук. – Минск, 1977. – 15 с.
4. *Аматов М. А.* Об устойчивости движения импульсных систем // Дифференц. уравнения (Рязань). – 1977. – Вып. 9. – С. 21 – 28.
5. *Беленький Я. Е., Левицкий С. Е., Халин В. А., Шульгин С. Г.* Управление релаксационными генераторами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 280 с.
6. *Гаушус Э. В., Максимов С. Н.* Исследование импульсных систем управления методами точечных преобразований // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. – 1971. – 2. – С. 175 – 185.
7. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 280 с.
8. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. – М.: Мир, 1975. – 304 с.

Получено 10.02.2003