УДК 517.929.7

В. М. Иванченко (Сумы)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ВИХРЕВЫХ ПОЛЕЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ГРАВИТАЦИИ И ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

We propose a system of differential equations in the tensor general-covariant form whose solutions are called gravitation and charged particles. For free fields, we find solutions in the form of the Newton and Coulomb potentials.

For a particle that rotates with the constant rate around another particle with the large mass, we find solutions in the form

$$\omega = k\sqrt{\frac{m_2}{R^3}},$$

for an uncharged particle and in the form

$$\omega = k\sqrt{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{m_1 R^3}},$$

for a charged particle.

Запропоновано систему диференціальних рівнянь у тензорній загальноковаріантній формі, розв'язки якої названо гравітаційними і зарядженими частинками. Для вільних полів розв'язки знайдено у вигляді потенціалів Ньютона і Кулона.

Для частинки, що обертається зі сталою швидкістю навколо іншої частинки великої маси, розв'язок отримано у вигляді

$$\omega = k\sqrt{\frac{m_2}{R^3}},$$

якщо частинка незаряджена, і у вигляді

$$\omega = k\sqrt{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{m_1 R^3}},$$

якщо вона заряджена.

1. Введение. В настоящей работе предлагается система дифференциальных уравнений в общековариантной форме для описания градиентных и вихревых векторных полей, которые интерпретируются как потенциалы незаряженных и заряженных частиц и здесь называются частицами.

Для сферически-симметричных полей решения найдены в виде потенциалов Ньютона и Кулона, а решение задачи движения незаряженной частицы в сферически-симметричном поле другой частицы большой массы (это могут быть такие объекты, как Земля и Солнце), дано в форме третьего закона Кеплера.

Для заряженных частиц сформулированы и приближенно решены те же задачи, а также найдено объяснение закону существования наименьшей порции электричества.

2. Математические определения и уравнения. Уравнения, необходимые для гравитационных и электромагнитных полей, запишем с помощью вторых производных Ли метрического тензора.

Пусть в пространстве Минковского задано потенциальное векторное поле τ^i. Взяв вторую производную Ли вдоль этого поля от метрического тензора g_{ij}, определим симметричную матрицу A_{ij}:

$$A_{ij} = L_{\tau k}\left(L_{\tau k} g_{ij}\right), \tag{1}$$

составим тензор S_{ij} вида

$$S_{ij} = A_{ij} - I\delta_{ij},$$

где I — скалярный инвариант поля τ^i; как будет показано ниже,

$$I = \frac{28}{m}\left(g_{kl}\tau^k\tau^l\right)^{3/2}$$

(m — масса частицы), δ_{ij} — единичный тензор.

Решение уравнения

$$\det\left(S_{ij}\right) = 0 \tag{2}$$

типа потенциала Ньютона

$$\tau = \frac{m}{p}$$

назовем гравитационной частицей.

Движение частицы τ_1 в центрально-симметричном поле частицы τ_2 с массой m_2 описывается уравнением

$$\det\left(A_{ij} - \delta_{ij}I(1+\gamma\tau_2)\right) = 0, \tag{3}$$

где γ — константа.

Уравнение (3) третьего порядка и сильно нелинейно, поэтому только при некоторых упрощающих предположениях удается получить важную формулу для круговых орбит

$$\omega = \frac{(Gm_2)^{1/2}}{R^{3/2}}.$$

3. Решение уравнения (2) для свободной частицы. В соответствии с [1, с. 199] имеем

$$L_\tau^{(1)}g_{ij} = \tau^s\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s} + g_{kj}\frac{\partial\tau^k}{\partial x^i} + g_{ik}\frac{\partial\tau^k}{\partial x^j},$$

$$L_\tau^{(2)}g_{ij} = \tau^s\frac{\partial}{\partial x^s}\left(\tau^k\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) + \tau^s\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^s}\frac{\partial\tau^k}{\partial x^i} + \tau^s\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^s}\frac{\partial\tau^k}{\partial x^j} + \tau^s g_{kj}\frac{\partial^2\tau^k}{\partial x^i\partial x^s} +$$
$$+ \tau^s g_{ik}\frac{\partial^2\tau^k}{\partial x^j\partial x^s} + g_{kj}\frac{\partial\tau^k}{\partial x^p}\frac{\partial\tau^p}{\partial x^i} + 2g_{kp}\frac{\partial\tau^k}{\partial x^i}\frac{\partial\tau^p}{\partial x^j} + g_{ik}\frac{\partial\tau^k}{\partial x^p}\frac{\partial\tau^p}{\partial x^j}.$$

Рассмотрим сферически-симметричное, не зависящее от времени поле в декартовых координатах. Вычисления выполним по формуле (1):

$$A_{11} = 2\tau^1\frac{\partial^2\tau^1}{\partial x^2} + 2\tau^2\frac{\partial^2\tau^2}{\partial x^2} + 4\left(\frac{\partial\tau^1}{\partial x^1}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial\tau^2}{\partial x^1}\right)^2,$$

$$A_{12} = 2\tau^1\frac{\partial^2\tau^2}{\partial x^{1^2}} + 2\tau^2\frac{\partial^2\tau^1}{\partial x^{2^2}} + 4\frac{\partial\tau^1}{\partial x^1}\frac{\partial\tau^1}{\partial x^2} + 4\frac{\partial\tau^2}{\partial x^2}\frac{\partial\tau^2}{\partial x^1}, \tag{4}$$

$$A_{22} = 2\tau^1\frac{\partial^2\tau^1}{\partial x^{2^2}} + 2\tau^2\frac{\partial^2\tau^2}{\partial x^{2^2}} + 4\left(\frac{\partial\tau^1}{\partial x^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial\tau^2}{\partial x^2}\right)^2.$$

Покажем, что потенциал

$$\tau = \frac{m}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}$$

является решением уравнения (2). Имеем

$$\tau^1 = \frac{\partial\tau}{\partial x} = \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{m\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} = -mx\left(x^2+y^2\right)^{-3/2},$$

$$\frac{\partial\tau^1}{\partial x} = \frac{m\cdot 3xx}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}} - \frac{m}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} = m\left(2x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2\right)^{-5/2},$$

$$\frac{\partial^2\tau^1}{\partial x^2} = -\frac{5}{2}\frac{m\left(2x^2-y^2\right)2x}{\left(x^2+y^2\right)^{7/2}} + \frac{m\cdot 4x}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}} = m\left(-6x^3+9xy^2\right)\left(x^2+y^2\right)^{-7/2},$$

$$\tau^2 = -\frac{my}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial\tau^2}{\partial y} = \frac{m\left(2y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2\tau^2}{\partial y^2} = \frac{m\left(-6y^2+9yx^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{7/2}},$$

$$\frac{\partial\tau^1}{\partial y} = \frac{\partial\tau^2}{\partial x} = \frac{3}{2}\frac{m\cdot 2xy}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}} = 3mxy\left(x^2+y^2\right)^{-5/2},$$

$$\frac{\partial^2\tau^1}{\partial y^2} = \frac{-15mxy^2}{\left(x^2+y^2\right)^{7/2}} + \frac{m\cdot 3x}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}} = m\frac{-12xy^2+3x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{7/2}},$$

$$\frac{\partial^2\tau^1}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2\tau^2}{\partial x^2} = m\frac{-15x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^{7/2}} + m\frac{3y}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}} = m\frac{-12x^2y+3y^3}{\left(x^2+y^2\right)^{7/2}}.$$

Подставляя (5) в формулу (4), получаем

$$A_{11} = \frac{2m\left(6x^4-9x^2y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^5} + \frac{2m\left(12x^2y^2-3y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^5} + \frac{4m\left(2x^2+y^2\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)^5} +$$

$$+ \frac{4m\cdot 9x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^5} = m\frac{28x^4-2y^4+26x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^5},$$

$$A_{12} = \frac{2mx\left(12x^2y-3y^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^5} + \frac{2m\left(12x^2y^2-3x^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^5} + \frac{4m\left(2x^2+y^2\right)3xy}{\left(x^2+y^2\right)^5} +$$

$$+ \frac{4m\left(2y^2-x^2\right)3xy}{\left(x^2+y^2\right)^5} = m\frac{30x^3y+30y^3x}{\left(x^2+y^2\right)^5}, \tag{6}$$

$$A_{22} = \frac{2m\left(12x^2y-3x^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^5} + \frac{2m\left(6y^4-9x^2y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^5} + \frac{4m\cdot 9x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^5} +$$

$$+ \frac{4m\left(2y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^5} = m\frac{-2x^4+28y^4+26x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^5},$$

$$I = \frac{28}{m}\left(\tau^{1^2} + \tau^{2^2}\right)^{3/2} = \frac{28}{m}m^3\left[\frac{x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^3}\right]^{3/2} = 28m^2\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)^5}. \tag{7}$$

Подставляя (6) в выражение для S_{ij} и сокращая $m^2\left(x^2+y^2\right)^5$, получаем

$$\det\left(S_{ij}\right) = \det\begin{pmatrix} 30x^4+30x^2y^2 & 30xy\left(x^2+y^2\right) \\ 30xy\left(x^2+y^2\right) & 30y^4+30x^2y^2 \end{pmatrix} = 0,$$

т. е. уравнение (2) выполняется.

4. Задача движения частицы в центрально-симметричном поле. Пусть частица τ_1 движется вокруг неподвижной частицы τ_2 с постоянной угловой скоростью ω. Вращение Земли вокруг Солнца вполне соответствует поставленной задаче.

Все физические величины в формулах выражены в секундах, скорость света $c = 1$, гравитационная постоянная $G = 1$ [2, с. 161, 356].

Благодаря общековариантной форме уравнений (2) и (3), можно использовать любые координаты, в том числе и криволинейные, допустимые в указываемой области. Такие координаты, максимально упрощающие вычисления, мы и будем применять.

Зададим ортонормированную систему координат $\left(t, x^1, x^2\right)$ с началом в центре τ_2. В этих координатах вращение представляется как движение по спирали. Перейдем к цилиндрическим координатам (t, ρ, φ). Пусть в этих координатах

$$\tau_1(\rho, \varphi, t) = \tau_1(\rho, \varphi_0 + \omega t),$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \end{pmatrix}.$$

Перейдем к системе координат (t', ρ', φ') по формулам

$$\varphi' = \varphi - \omega t,$$
$$\rho' = \rho,$$
$$t' = t$$

с матрицей Якоби

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \omega & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В новой системе координат метрический тензор $g_{i'j'}$ имеет вид

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} g_{kl} \frac{\partial x^l}{\partial x^{i'}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \omega \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \omega & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1+\omega^2\rho^2 & 0 & \omega\rho^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \omega\rho^2 & 0 & \rho^2 \end{pmatrix},$$

а поле τ_1 не зависит от времени. Мы еще дважды поменяем координаты, чтобы перейти к системе координат с началом в центре частицы τ_1 и с некоторыми свойствами полярной и декартовой систем координат.

Заметим, что потенциал частицы τ_1, расположенной в начале координат, имеет вид

$$\tau_1 = \frac{m_1}{\rho},$$

и

$$\tau_1 = \left[(\rho - \varphi)^2 - \rho R \cos\varphi\right]^{-1/2},$$

когда центр τ_1 смещен на R [3, с. 371].

Будем искать решение в малой области D около сингулярной точки O_1 — центра частицы τ_1. Для малых φ имеем

$$\tau_1 = \left[(\rho - \varphi)^2 + R^2\varphi^2\right]^{-1/2}.$$

Перейдем к новым координатам

$$t' = t,$$
$$h = \varphi' = R\varphi,$$
$$r = \rho' = \pm(\rho - R)$$

с матрицей Якоби

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R \end{pmatrix}.$$

Метрический тензор имеет вид

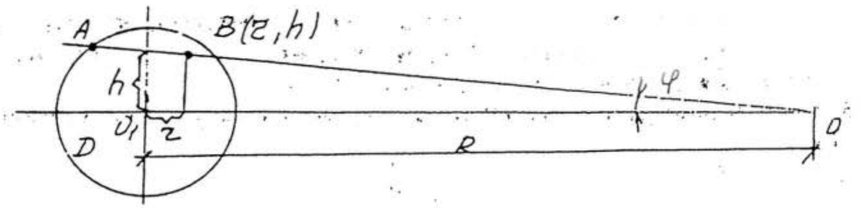
$$g_{i'j'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1+\omega^2\rho^2 & 0 & \omega\rho^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \omega\rho^2 & 0 & \rho^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1+\omega^2\rho^2 & 0 & \omega\rho^2/R \\ 0 & 1 & 0 \\ \omega\rho^2/R & 0 & \rho^2/R^2 \end{pmatrix}.$$

Чтобы псевдоримановый вид метрики не нарушался, в указанной области необходимо выполнение условия $-1+\omega^2\rho^2 < 0$, т. е. $\omega^2 < \dfrac{1}{\rho^2}$. В малой области $\rho = R$, поэтому

$$g_{i'j'} = \begin{pmatrix} -1+\omega^2 R^2 & 0 & \omega R \\ 0 & 1 & 0 \\ \omega R & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Связь новых координат (r, h) с полярными (ρ, φ) видна из рисунка.



Точка B с координатами (r, h), перемещаясь по прямой OA, будет иметь неизменную координату h, что объединяет координаты (r, h) с (ρ, φ). Но при возрастании R, т. е. при удалении области D от O, координаты (r, h) стремятся к декартовым и в пределе такими и становятся для области D.

Окончательно необходимая система координат будет иметь вид

$$x = \nu r, \quad r = \frac{x}{\nu},$$

$$y = \mu h, \quad h = \frac{y}{\mu}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1/\mu \end{pmatrix}.$$

После вычисления в координатах (t, x, y)

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -1+\omega^2 R^2 & 0 & \omega R/\mu \\ 0 & 1/\nu^2 & 0 \\ \omega R/\mu & 0 & 1/\mu^2 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

В координатах (8) вычислим элементы матрицы A_{ij}. Из выражения (9) видно, что

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0.$$

Учитывая, что поле потенциальное и не зависит от t, имеем

$$A_{01} = \frac{\omega R}{\mu}\left(\tau^1 \frac{\partial^2 \tau^2}{\partial x^2} + \tau^2 \frac{\partial^2 \tau^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \tau^2}{\partial x}\frac{\partial \tau^1}{\partial x} + \frac{\partial \tau^2}{\partial y}\frac{\partial \tau^2}{\partial x}\right),$$

$$A_{02} = \frac{\omega R}{\mu}\left(\tau^1 \frac{\partial^2 \tau^2}{\partial y \partial x} + \tau^2 \frac{\partial^2 \tau^2}{\partial y^2} + \frac{\partial \tau^2}{\partial x}\frac{\partial \tau^1}{\partial y} + \frac{\partial \tau^2}{\partial y}\frac{\partial \tau^2}{\partial y}\right),$$

$$A_{11} = \tau^1 \frac{1}{\nu^2}\frac{\partial^2 \tau^1}{\partial x^2} + \tau^2 \frac{1}{\nu^2}\frac{\partial^2 \tau^1}{\partial x \partial y} + \tau^1 \frac{1}{\nu^2}\frac{\partial^2 \tau^1}{\partial x^2} + \tau^2 \frac{1}{\nu^2}\frac{\partial^2 \tau^1}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\nu^2}\left(\frac{\partial \tau^1}{\partial x}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{\nu^2}\frac{\partial \tau^1}{\partial y}\frac{\partial \tau^2}{\partial x} + \frac{2}{\nu^2}\left(\frac{\partial \tau^1}{\partial x}\right)^2 + \frac{2}{\mu^2}\left(\frac{\partial \tau^2}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{\nu^2}\left(\frac{\partial \tau^1}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{\nu^2}\frac{\partial \tau^1}{\partial y}\frac{\partial \tau^2}{\partial x} =$$

$$= \frac{2}{\nu^2}\tau^1 \frac{\partial^2 \tau^1}{\partial x^2} + \frac{2}{\nu^2}\tau^2 \frac{\partial^2 \tau^1}{\partial x \partial y} + \frac{4}{\nu^2}\left(\frac{\partial \tau^1}{\partial x}\right)^2 + \frac{2}{\nu^2}\frac{\partial \tau^1}{\partial y}\frac{\partial \tau^2}{\partial x} + \frac{2}{\mu^2}\left(\frac{\partial \tau^2}{\partial x}\right)^2,$$

$$A_{12} = \tau^1 \frac{1}{\mu^2}\frac{\partial^2\tau^2}{\partial x^2} + \frac{\tau^2}{\mu^2}\frac{\partial^2\tau^2}{\partial x\partial y} + \frac{\tau^1}{\nu^2}\frac{\partial^2\tau^1}{\partial y\partial x} + \frac{\tau^2}{\nu^2}\frac{\partial^2\tau^1}{\partial y^2} + \frac{1}{\mu^2}\frac{\partial\tau^2}{\partial x}\frac{\partial\tau^1}{\partial x} + \frac{1}{\mu^2}\frac{\partial\tau^2}{\partial y}\frac{\partial\tau^2}{\partial x} +$$

$$+ \frac{2}{\nu^2}\frac{\partial\tau^1}{\partial x}\frac{\partial\tau^1}{\partial y} + \frac{2}{\mu^2}\frac{\partial\tau^2}{\partial x}\frac{\partial\tau^2}{\partial y} + \frac{1}{\nu^2}\frac{\partial\tau^1}{\partial x}\frac{\partial\tau^1}{\partial y} + \frac{1}{\nu^2}\frac{\partial\tau^1}{\partial y}\frac{\partial\tau^1}{\partial y} =$$

$$= \frac{2}{\mu^2}\tau^1\frac{\partial^2\tau^1}{\partial x\partial y} + \frac{2}{\mu^2}\tau^2\frac{\partial^2\tau^2}{\partial x\partial y} + \left(\frac{3}{\nu^2}+\frac{1}{\mu^2}\right)\frac{\partial\tau^1}{\partial x}\frac{\partial\tau^1}{\partial y} + \left(\frac{3}{\mu^2}+\frac{1}{\nu^2}\right)\frac{\partial\tau^2}{\partial x}\frac{\partial\tau^2}{\partial y},$$

$$A_{22} = \frac{2}{\mu^2}\tau^1\frac{\partial^2\tau^2}{\partial x\partial y} + \frac{2}{\mu^2}\tau^2\frac{\partial^2\tau^2}{\partial y^2} +$$

$$+ \frac{2}{\mu^2}\frac{\partial\tau^2}{\partial x}\frac{\partial\tau^1}{\partial y} + \frac{2}{\mu^2}\left(\frac{\partial\tau^2}{\partial y}\right)^2 + \frac{2}{\nu^2}\left(\frac{\partial\tau^1}{\partial y}\right)^2 + \frac{2}{\mu^2}\left(\frac{\partial\tau^2}{\partial y}\right)^2 =$$

$$= \frac{2}{\mu^2}\tau^1\frac{\partial^2\tau^1}{\partial y^2} + \frac{2}{\mu^2}\tau^2\frac{\partial^2\tau^2}{\partial y^2} + \left(\frac{2}{\mu^2}+\frac{2}{\nu^2}\right)\left(\frac{\partial\tau^1}{\partial y}\right)^2 + \frac{4}{\mu^2}\left(\frac{\partial\tau^1}{\partial y}\right)^2,$$

$$A_{00} = 0.$$

Решение уравнения (3) будем искать в виде $\tau^1 = m_1 u^{-1/2}$, где $u = \nu^2 x^2 + \mu^2 y^2$.

Вычислим производные:

по x:

$$\tau^1 = \frac{\partial\tau}{\partial x} = -m_1 u^{-3/2}\nu^2 x,$$

$$\frac{\partial\tau^1}{\partial x} = m_1\cdot 3u^{-5/2}\nu^4 x^2 - mu^{-3/2}\nu^2 = m_1\left(2\nu^4 x^2 - \mu^2\nu^2 y^2\right)u^{-5/2},$$

$$\frac{\partial^2\tau^1}{\partial x^2} = -15m_1\nu^6 x^3 u^{-7/2} + 9m_1\nu^4 x u^{-5/2} = m_1\left(-6\nu^6 x^3 + 9\nu^4\mu^2 x y^2\right)u^{-7/2},$$

по y:

$$\tau^2 = \frac{\partial\tau}{\partial y} = -m_1\mu^2 y u^{-3/2},$$

$$\frac{\partial\tau^2}{\partial y} = 3m_1\mu^4\nu^2 u^{-7/2} - m_1\mu^2 u^{-3/2} = m_1\left(2\mu^4 y^2 - \mu^2\nu^2 x^2\right)u^{-5/2},$$

$$\frac{\partial^2\tau^2}{\partial y^2} = (-15)m_1\mu^6 y^3 u^{-7/2} - m_1\cdot 9\mu^4 y u^{-5/2} = m_1\left(-6\mu^6 y^3 + 3\mu^4\nu^2 x^2 y\right)u^{-7/2},$$

смешанные:

$$\frac{\partial\tau^1}{\partial y} = \frac{\partial\tau^2}{\partial x} = 3m_1\mu^2\nu^2 x y u^{-5/2},$$

$$\frac{\partial^2\tau^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\tau^2}{\partial x\partial y} = -15m_1\mu^4\nu^2 x y^2 u^{-7/2} + 3m_1\nu^2\mu^2 x u^{-5/2} =$$

$$= m_1\left(-12\mu^4\nu^2 x y^2 + 3\mu^2\nu^4 x^3\right)u^{-7/2},$$

$$\frac{\partial^2\tau^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\tau^1}{\partial x\partial y} = -15m_1\mu^2\nu^4x^2yu^{-7/2} + 3m_1\mu^2\nu^2yu^{-5/2} =$$

$$= m_1\left(-12\mu^2\nu^4x^2y+3\mu^4\nu^2y^3\right)u^{-7/2}.$$

Инвариант взаимодействующих частиц с учетом масс m_1 и m_2 имеет вид

$$I = \frac{28}{m_1}\left(g_{11}\tau_1^{1^2}+g_{22}\tau_1^{2^2}\right)^{3/2}\left(1+\gamma\frac{m_2}{R}\right) =$$

$$= \frac{28}{m_1}\left(\frac{m_1^2}{\nu^2}\frac{\nu^4x^2}{u^3}+\frac{m_1^2}{\mu^2}\frac{\mu^4y^2}{u^3}\right)^{3/2}\left(1+\gamma\frac{m_2}{R}\right) =$$

$$= 28m_1^2\left(\nu^2x^2+\mu^2y^2\right)^2u^{-5}\left(1+\gamma\frac{m_2}{R}\right). \tag{10}$$

Заметим, что значение потенциала

$$\tau_2 = \frac{m_2}{R}$$

берется в сингулярной точке поля τ_1^i, т. е. в начале координат $\{x, y\}$, так как ввиду малости области D он постоянен.

Инвариант (10), как и инвариант (7), не содержит радикала; в этом и состоит основная цель замены координат.

5. Вычисление элементов матрицы A_{ij}. Все элементы матрицы A_{ij} и инвариант I в качестве множителя содержат m^2u^{-5}, после сокращения на который (что можно сделать ввиду равенства нулю в формуле (2)) за элементами матрицы и инвариантом мы оставим прежние обозначения. Имеем

$$A_{01} = \frac{\omega R}{\mu}\Big[\nu^2x\left(12\mu^2\nu^4x^2y-3\mu^4\nu^2y^3\right)+\mu^2y\left(12\mu^4\nu^2xy^2-3\mu^2\nu^4x^3\right) +$$

$$+ 3\mu^2\nu^2xy\left(2\nu^4x^2-\mu^2\nu^2y^2\right)+2\left(\mu^4y^2-\mu^2\nu^2x^2\right)\cdot 3\mu^2\nu^2xy\Big] =$$

$$= \frac{\omega R}{\mu}\left[x^3y\left(18\mu^2\nu^6-6\mu^4\nu^4\right)+xy^3\left(18\mu^6\nu^2-6\mu^4\nu^4\right)\right],$$

$$A_{02} = \frac{\omega R}{\mu}\Big[\nu^2x\left(12\mu^4\nu^2xy^2-3\mu^2\nu^4x^3\right)-\mu^2y\left(6\mu^6y^3-9\mu^4\nu^2x^2y\right) +\left(3\mu^2\nu^2xy\right)^2 +$$

$$+ \left(2\mu^4y^2-\mu^2\nu^2x^2\right)^2\Big] = \frac{\omega R}{\mu}\Big[x^2y^2\left(21\mu^4\nu^4-13\mu^6\nu^2\right) +$$

$$+ x^4\left(\mu^4\nu^4-3\mu^2\nu^6\right) + y^4\cdot 10\mu^8\Big],$$

$$A_{11} = \frac{-2}{\nu^2}\nu^2x\left(-6\nu^6x^3+9\nu^4\mu^2xy^2\right)-\frac{2}{\nu^2}\mu^2y\left(3\mu^4\nu^2y^3-12\mu^2\nu^4x^2y\right) +$$

$$+ \frac{4}{\nu^2}\left(12\nu^4x^2-\mu^2\nu^2y^2\right)^2+\frac{2}{\mu^2}\left(3\mu^2\nu^2xy\right)^2+\frac{2}{\mu^2}\left(3\mu^2\nu^2xy\right)^2 =$$

$$= 28\nu^6x^4+y^4\left(-6\mu^6+4\mu^4\nu^2\right)+x^2y^2\left(42\mu^4\nu^2-16\mu^2\nu^4\right), \tag{11}$$

$$A_{12} = \frac{2\nu^2x}{\mu^2}\left(12\mu^2\nu^4x^2y-3\mu^4\nu^2y^3\right)+\frac{2\mu^2y}{\mu^2}\left(-9\mu^2\nu^4x^3+12\mu^4\nu^2xy^2\right) +$$

$$+\ \frac{3\mu^2+\nu^2}{\mu^2\nu^2}\left(2\nu^4x^2-\mu^2\nu^2y^2\right)\cdot 3\mu^2\nu^2xy\ +$$

$$+\ \frac{3\nu^2+\mu^2}{\nu^2\mu^2}\left(2\mu^4\nu^2y^2-\mu^2\nu^2x^2\right)\cdot 3\mu^2\nu^2xy\ =$$

$$=\ x^3y\left(26\nu^6-3\mu^2\nu^4-\mu^4\nu^2\right)+y^3x\left(12\mu^6-7\mu^2\nu^4+27\mu^4\nu^2\right),$$

$$A_{22}\ =\ \frac{2}{\mu^2}\nu^2x\left(12\mu^4\nu^2xy^2-3\mu^2\nu^4x^3\right)+\frac{2}{\mu^2}\left(6\mu^6y^3-9\mu^4\nu^2x^2y\right)\mu^2y\ +$$

$$+\ \frac{2\mu^2+2\nu^2}{\nu^2\mu^2}9\left(\mu^2\nu^2xy\right)^2+\frac{4}{\mu^2}\left(2\mu^4y^2-\mu^2\nu^2x^2\right)^2\ =$$

$$=\ x^2y^2\left(42\mu^2\nu^4-16\mu^4\nu^2\right)+x^4\left(4\mu^2\nu^4-6\nu^6\right)+28\mu^6y^4.$$

Обозначим

$$1+\gamma\frac{m_2}{R}\ =\ \delta.$$

Инвариант I после сокращения на $m_1^2u^{-5}$ примет вид

$$I\ =\ 28\left(\nu^2x^2+\mu^2y^2\right)^2\delta. \qquad (12)$$

Прежде чем вычислять S_{ij} в выражениях (11) и в инварианте (12), выполним подстановку

$$y\ =\ tx, \qquad 0\ \le\ t\ \le\ \infty.$$

Тогда матрица

$$S_{ij}\ =\ A_{ij}\ -\ \delta_{ij}I$$

будет везде содержать x в четвертой степени, и поэтому при вычислении $\det(S_{ij})$ он сократится. Теперь можем записать элементы S_{ij} без общего множителя, оставив прежние обозначения:

$$S_{00}\ =\ -28\mu^2\nu^4\delta\ -\ 56\mu^4\nu^2\delta t^2\ -\ 28\mu^6\delta t^4,$$

$$S_{01}\ =\ \omega R\left[\left(18\mu^2\nu^6-6\mu^4\nu^4\right)t+\left(18\mu^6\nu^2-6\mu^4\nu^4\right)t^3\right],$$

$$S_{02}\ =\ \omega R\left[\left(\mu^4\nu^4-3\mu^2\nu^6\right)+\left(21\mu^4\nu^4-13\mu^6\nu^2\right)t^2+10\mu^8t^4\right],$$

$$S_{11}\ =\ 28\nu^4\left(\nu^2-\delta\right)+\left[14\mu^2\nu^2\left(3\mu^2-4\delta\right)-16\mu^2\nu^4\right]t^2\ +\ 2\mu^4\left(2\nu^2-3\mu^2-14\delta\right)t^4,$$

$$S_{12}\ =\ 3\left(10\nu^6+\mu^2\nu^4-\mu^4\nu^2\right)t\ +\ 3\left(2\mu^6-3\mu^2\nu^4+11\mu^4\nu^2\right)t^3,$$

$$S_{22}\ =\ 2\nu^4\left(2\mu^2-3\nu^2-14\delta\right)\ +\ \left[14\mu^2\nu^2\left(3\nu^2-4\delta\right)-16\mu^4\nu^2\right]t^2+28\mu^4\left(\mu^2-\delta\right)t^4.$$

Для наглядности запишем матрицу S_{ij} в виде

$$S_{ij}\ =\ \begin{pmatrix} S_{00}^0+S_{00}^2t^2+S_{00}^4t^4 & S_{01}^1t^1+S_{01}^3t^3 & S_{02}^0+S_{02}^2t^2+S_{02}^4t^4 \\ S_{10}^1t+S_{10}^3t^3 & S_{11}^0+S_{11}^2t^2+S_{11}^4t^4 & S_{12}^1t+S_{12}^3t^3 \\ S_{20}^0+S_{20}^2t^2+S_{20}^4t^4 & S_{21}^1t+S_{21}^3t^3 & S_{22}^0+S_{22}^2t^2+S_{22}^4t^4 \end{pmatrix}. \qquad (13)$$

Здесь

$$
\begin{gathered}
S_{00} = -28\nu^4\mu^2\delta, \quad S_{00}^2 = -56\mu^4\nu^2\delta, \quad S_{00}^4 = -28\mu^6\delta, \\
S_{01}^1 = \omega R\left(18\mu^2\nu^6 - 6\mu^4\nu^4\right), \quad S_{01}^3 = \omega R\left(18\mu^6\nu^2 - 6\mu^4\nu^4\right), \\
S_{02}^0 = \omega R\left(\mu^4\nu^4 - 3\mu^2\nu^6\right), \quad S_{02}^2 = \omega R\left(21\nu^4\mu^4 - 13\mu^6\nu^2\right), \quad S_{02}^4 = 10\mu^8, \\
S_{11}^0 = 28\nu^4\left(\nu^2 - \delta\right), \quad S_{11}^2 = 14\mu^2\nu^2\left(3\mu^2 - 4\delta\right) - 16\mu^2\nu^4, \qquad (14) \\
S_{11}^4 = 2\mu^4\left(2\nu^2 - 3\mu^2 - 14\delta\right), \\
S_{12}^1 = 3\left(10\nu^6 + \mu^2\nu^4 - \mu^4\nu^2\right), \quad S_{12}^3 = 3\left(2\mu^6 - 3\mu^2\nu^4 + 11\mu^4\nu^2\right), \\
S_{22}^0 = 2\nu^4\left(2\mu^2 - 3\nu^2 - 14\delta\right), \quad S_{22}^2 = 14\mu^2\nu^2\left(3\nu^2 - 4\delta\right) - 16\mu^4\nu^2, \\
S_{22}^4 = 28\mu^4\left(\mu^2 - \delta\right).
\end{gathered}
$$

Раскрывая определитель в уравнении (2), получаем многочлен по t, равный нулю:

$$a_0 + a_2t^2 + a_4t^4 + a_6t^6 + a_8t^8 + a_{10}t^{10} + a_{12}t^{12} = 0. \qquad (15)$$

Для выполнения (15) при любых значениях t необходимо равенство нулю всех коэффициентов уравнения (15), являющихся функциями параметров μ, ν, R, ω. Не вдаваясь в анализ этого вопроса, заменим (15) уравнением

$$a_0 + a_6t^6 + a_{12}t^{12} = 0. \qquad (16)$$

Вычислим коэффициенты уравнения (16), используя (13) и раскрывая определитель по элементам первой строки:

$$a_0 = S_{00}^0 S_{11}^0 S_{22}^0,$$

здесь принимаем $S_{11}^0 = 0$. Далее (17)

$$a_{12} = S_{11}^4\left[S_{00}^4 S_{22}^4 - \left(S_{02}^4\right)^2\right], \qquad (18)$$

$$
\begin{gathered}
a_6 = S_{00}^0\left[S_{11}^2 S_{22}^4 - \left(S_{12}^3\right)^2 + S_{11}^4 S_{22}^2\right] + S_{00}^2\left[S_{11}^2 S_{22}^2 - S_{21}^1 S_{12}^3 - S_{21}^3 S_{12}^1 + S_{11}^4 S_{22}^0\right] + \\
+ S_{00}^4\left[S_{11}^2 S_{22}^0 - \left(S_{21}^1\right)^2\right] - S_{01}^1\left[S_{00}^1 S_{22}^4 + S_{10}^3 S_{22}^2 - S_{20}^2 S_{12}^3 - S_{20}^4 S_{12}^1\right] - \\
- S_{01}^3\left[S_{10}^1 S_{22}^2 + S_{10}^3 S_{22}^0 - S_{20}^0 S_{12}^3 - S_{20}^2 S_{12}^1\right] + \\
+ S_{22}^0\left[S_{10}^3 S_{21}^3 - S_{11}^2 S_{20}^4 - S_{20}^2 S_{11}^4\right] + S_{02}^2\left[S_{10}^1 S_{21}^3 - S_{20}^2 S_{11}^2 - S_{20}^0 S_{11}^4 + S_{10}^3 S_{21}^1\right] + \\
+ S_{12}^4\left[S_{10}^1 S_{21}^1 - S_{20}^0 S_{11}^2\right]. \qquad (19)
\end{gathered}
$$

Условие $S_{11}^0 = 0$ в (17) означает выполнение равенства (2) на оси Ox. Из (14) имеем

$$S_{11}^0 = 28\nu^4\left(\nu^2 - \delta\right),$$

откуда

$$\nu^2 = \delta. \qquad (20)$$

В (18) принимаем

$$S_{00}^4 S_{22}^4 - \left(S_{02}^4\right)^2 = 0. \qquad (21)$$

Условие (21) означает выполнение равенства (2) на оси Oy. Из (14) с учетом (20) имеем

$$-28\mu^6\nu^2 \cdot 28\mu^4\left(\mu^2-\nu^2\right) - \left(10\frac{\omega R}{\mu}\mu^8\right)^2 = 0,$$

откуда

$$\omega^2 R^2 = 2{,}8^2\frac{\nu^2}{\mu^4}\left(\nu^2-\mu^2\right). \tag{22}$$

Запишем a_6, подставив вместо S_{ij}^k их выражения из (14) и заменив $\omega^2 R^2$ правой частью (22), а также приведем к общему знаменателю μ^4. В результате получим многочлен от неизвестной μ. Не выписывая явно этот многочлен, выполним предварительно следующие подстановки:

$$\nu^2 = 1+\lambda, \quad \lambda = \gamma\frac{m_2}{R},$$
$$\mu^2 = 1+u. \tag{23}$$

После подстановки (23) выражение

$$a_6 \overset{\mathrm{df}}{=} f(u,\lambda)$$

будет многочленом относительно неизвестной u и параметра λ. Этот многочлен содержит члены вида $u^1\lambda^0$, $u^0\lambda^1$ с показателями (1, 0) и (0, 1) и не содержит свободного члена. Будем искать решение уравнения

$$f(u,\lambda) = 0 \tag{24}$$

в виде

$$u = u_\varepsilon\lambda^\varepsilon + o(\lambda), \tag{25}$$

где показатель ε и коэффициент u_ε подлежат определению. В [4] (§2) изложен метод диаграмм Ньютона, которым мы воспользуемся. Согласно этому методу левая ветвь диаграммы определяется показателями (1, 0) и (0, 1) и наклонена к оси абсцисс под углом 45°, а ε определяется равенством

$$\varepsilon = \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$$

Поэтому в (24) нас интересуют только члены степеней (1, 0) и (0, 1). Далее, нас удовлетворит коэффициент $u_\varepsilon \neq 1$.

Действительно, подставляя (23) в (22), с учетом (25) получаем

$$\omega^2 R^2 = 2{,}8^2\frac{1+\lambda}{(1+u_1\lambda)^2}(1+\lambda-1-u_1\lambda) = 2{,}8^2\frac{1+\lambda}{(1+u_1\lambda)^2}\lambda(1-u_1). \tag{26}$$

Если $u_1 \neq 1$, то можно ограничиться решением вида (25), отбрасывая бесконечно малые величины $o(\lambda)$. При этом, учитывая, что

$$\lambda = \gamma\frac{m_2}{R},$$

получаем выражение для угловой скорости частицы

$$\omega^2 = \frac{Gm_2}{R^3}, \tag{27}$$

где G — аналог гравитационной постоянной.

Итак, убедимся в том, что $u_1 \neq 1$. Вычислим (19), ограничиваясь только линейными членами по u и λ, выполняя замены (23) и по приближенной формуле, а также учитывая линейную часть

$$(1+z)^{\alpha} = 1 + \alpha z.$$

Представим $f(u, \lambda)$ в виде

$$f(u,\lambda) = P_1 + P_2 + \ldots + P_8,$$

где P_n — слагаемые в (19) по порядку их следования. Вычислим их с указанной точностью:

$$P_1 = (-28)(1+3u)(1+3\lambda)\{[42(1+2u)(1+\lambda) - 72(1+u)(1+2\lambda)] \times$$
$$\times\ 28(1+2u)(1-\lambda) - 9[2(1+3u) - 3(1+u)(1+2\lambda) + 11(1+2u)(1+\lambda)]^2 -$$
$$- [21(1+\lambda)(1+2u) + 6(1+3u)][14(1+u)(1+2\lambda) + 16(1+2u)(1+\lambda)]\}. \tag{28}$$

Пусть

$$\lambda = u = p. \tag{29}$$

Подставляя (29) в (28), получаем

$$P_1 \simeq (-28)(1+6p)\{[42(1+3p) - 72(1+3p)]28(1+2p)(p-p) -$$
$$- 9[2(1+3p) - 3(1+3p) + 11(1+3p)]^2 +$$
$$+ [24(1+3p) + 6(1+3p)][14(1+3p) + 16(1+3p)]\} =$$
$$= (-28)(1+6p)\left\{-900(1+3p)^2 + 30\cdot 30(1+3p)^2\right\} = 0,$$

$$P_2 = (-56)(1+3u)(1+2\lambda)\{[42(1+2u)(1+\lambda) - 72(1+u)(1+2\lambda)] \times$$
$$\times\ [-14(1+u)(1+2\lambda) - 16(1+2u)(1+\lambda)] - 9[10(1+3\lambda) + (1+u)\ \times$$
$$\times\ (1+2\lambda) - (1+2u)(1+\lambda)][2(1+3u) - 3(1+u)(1+2\lambda) + 11(1+2u)\ \times$$
$$\times\ (1+\lambda) - 9[2(1+3u) - 3(1+u)(1+2\lambda) + 11(1+2u)(1+\lambda)] \times$$
$$\times\ [10(1+3\lambda) + (1+u)(1+2\lambda) - (1+2u)(1+\lambda)] + [-24(1+\lambda)(1+2u) - 6(1+3u)] \times$$
$$\times\ (1+2\lambda)[4(1+u) - 34(1+\lambda)]\} \simeq$$
$$\simeq (-56)\left\{9(-10-30p)^2 - 9(10+30p)^2 - 9(10+30p)^2 + 9(10+30p)^2\right\} = 0,$$

$$P_3 \simeq (-28)(1+5u)(1+\lambda)\Big\{[42(1+2u)(1+\lambda) - 72(1+u)(1+2\lambda)] \times$$
$$\times\ [4(1+2\lambda)(1+u) - 34(1+3\lambda)] - 9[10(1+3\lambda) + (1+u)(1+2\lambda) -$$
$$- (1+2u)(1+\lambda)]^2\Big\} \simeq$$
$$\simeq (-28)\left\{-30(1+3p)(-30)(1+3p) - 9[10(1+3p)]^2\right\} = 0,$$

$$P_4 \simeq (-2{,}8)(\lambda - u)\{\ldots\},$$
$$P_5 \simeq (-2{,}8)12(\lambda - u)\{\ldots\},$$
$$P_6 \simeq 2{,}8(\lambda - u)(-2)\{\ldots\},$$
$$P_7 \simeq 2{,}8(\lambda - u)\{\ldots\},$$
$$P_8 \simeq 2{,}8(\lambda - 2u)10\{12\cdot 30 - 2\cdot 30\}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} P_3 &= 0, \\ P_4 &= 0, \\ P_5 &= 0, \\ P_6 &= 0, \\ P_7 &= 0, \\ P_8 &\neq 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Таким образом, при $\lambda = u$ равенство

$$f(u, \lambda) = f(p, p) = 0$$

невозможно ввиду (30).

Теперь можно утверждать, что формула (27) выполняется независимо от значения коэффициента u_1 в (25), если мы отбросим бесконечно малые более высокого порядка по λ. Продолжая вычисления, получаем

$$\begin{aligned} P_1 &= 28 \cdot 66 \cdot 30(u - \lambda), \\ P_2 &= 28 \cdot 30(768u + 912\lambda), \\ P_3 &= 28 \cdot 30(16u - 195\lambda), \\ P_4 &= 28 \cdot 36 \cdot 30(\lambda - u), \\ P_5 &= 28 \cdot 36 \cdot 30(\lambda - u), \\ P_6 &= 28 \cdot 6 \cdot 30(u - \lambda), \\ P_7 &= 28 \cdot 24 \cdot 30(\lambda - u), \\ P_8 &= 28 \cdot 10 \cdot 30(\lambda - 2u). \end{aligned} \tag{31}$$

Подставим вместо u в (31) выражение $u = u_1\lambda$ и найдем u_1 из уравнения

$$\sum_{n=1} P_n = 0. \tag{32}$$

Из (32) получаем

$$751\lambda + 740u_1\lambda = 0,$$

откуда

$$u_1 = -1{,}019. \tag{33}$$

Подставляя (33) в (26), имеем

$$\omega^2 R^2 = 2{,}8^2 \cdot 2{,}015 \frac{1+\lambda}{(1-1{,}019\lambda)^2} \gamma \frac{m_2}{R}. \tag{34}$$

Значение γ выберем так, чтобы $G \to 1$ при $R \to \infty$. Тогда

$$2{,}8^2 \cdot 2{,}019\gamma = 1,$$

откуда $\gamma = 0{,}063$. С учетом γ формула (34) примет вид

$$\omega^2 R^2 = k^2 \frac{m_2}{R},$$

где

$$k^2 = \frac{1+\lambda}{(1-1{,}019\lambda)^2}. \tag{35}$$

Коэффициент k отличает классическую формулу от полученной нами. Вычислим значение k для околосолнечной орбиты Земли.

Масса Солнца [2, с. 356]

$$m_2 = 4{,}920 \cdot 10^{-6} \text{ с.}$$

Средний радиус орбиты Земли

$$R = 4{,}986 \cdot 10^2 \text{ с.}$$

Тогда

$$\lambda = \gamma \frac{m_2}{R} = 0{,}063 \frac{4{,}920 \cdot 10^{-6}}{4{,}986 \cdot 10^2} = 6{,}21 \cdot 10^{-8},$$

$$k = \frac{\left(1+6{,}21 \cdot 10^{-8}\right)^{1/2}}{\left(1-1{,}019 \cdot 6{,}21 \cdot 10^{-8}\right)} = 1+9{,}4 \cdot 10^{-8}.$$

Если период вращения вокруг Солнца $T = 0{,}32 \cdot 10^8$ с, то вычисленное отклонение составляет 3 секунды.

6. Уравнение для незаряженной частицы. Особенно простой вид имеет уравнение (2) для незаряженной частицы в цилиндрических координатах, когда частица покоится в начале сферической системы пространственных координат (ρ, φ). Тогда

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \end{pmatrix},$$

$$\tau = \tau(\rho) = \frac{m}{\rho},$$

$$\tau^0 = 0, \tag{36}$$

$$\tau^1 = -\frac{m}{\rho^2},$$

$$\tau^2 = 0,$$

и уравнение (2) сводится к обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению

$$2\tau^1 \frac{d^2\tau^1}{d\rho} + 4\left(\frac{d\tau^1}{d\rho}\right)^2 = \frac{28}{m_1}\left(\tau^1\right)^3 \tag{37}$$

с решением (36).

7. Поля заряженных частиц. Будем строить теорию заряженных частиц, используя следующие очевидные предположения (назовем их аксиомами).

I. Не существует заряженной частицы без массы, т. е. при подстановке в уравнение нулевого значения массы оно превращается в нулевое тождество.

II. Лишая частицу заряда, т. е. подставляя в уравнение нулевое значение заряда, получаем уравнение (2) для гравитационной частицы.

III. Для любой элементарной заряженной частицы существует решение только при одной и той же величине электрического заряда, которая называется наименьшей порцией электричества.

Построим уравнения, удовлетворяющие этим аксиомам, с удовлетворительным значением для угловой скорости вращения частицы в центрально-симметричных полях.

Для определения поля заряженной частицы вначале возьмем вихревое векторное поле

$$\overline{\eta}(t, \rho, \varphi) = (\eta^0, 0, 0),$$

имеющее в рассматриваемой системе координат одну компоненту $\eta^0 = \eta^0(\rho)$, которая зависит только от одной координаты ρ. Вычислим A_{ij} для этого поля в цилиндрических координатах. В малой области D получим

$$A_{00} = 0, \quad A_{01} = 0, \quad A_{02} = 0,$$

$$A_{12} = 0, \quad A_{22} = 0,$$

$$A_{11} = -2\left(\frac{d\eta^0}{d\rho}\right)^2.$$

Выберем инвариант в виде

$$P(\eta) = -\frac{2}{\varepsilon^2}\left(g_{kl}\eta^k\eta^l\right)^2, \tag{38}$$

где ε — константа.

Из (38) имеем

$$P(\eta) = -\frac{2}{\varepsilon^2}\left(\eta^0\right)^4. \tag{39}$$

Тогда из уравнения (2) получаем

$$-2\left(\frac{d\eta^0}{d\rho}\right) = -\frac{2}{\varepsilon^2}\eta^{0^4}. \tag{40}$$

Будем искать решение уравнения (40) в форме потенциала Кулона

$$\eta^0 = \pm\frac{q}{\rho}, \tag{41}$$

где q — величина электрического заряда.

Подставляя (41) в (40), убеждаемся, что решение существует только при значении $q \mp \pm \varepsilon$, которое и называется наименьшей порцией электричества.

Вектор $\overline{\eta}$ назовем (четырехмерным) потенциалом электромагнитного поля. Согласно формуле из [5, с. 313] существует кососимметричный тензор

$$F_{ij} = \frac{d\eta^i}{dx^j} - \frac{d\eta^j}{dx^i},$$

который полностью определяет электрическую E и магнитную H компоненты поля.

Используя равенство из [6, с. 305], имеем

$$E_1 = -F_{01} = \frac{d\eta^0}{d\rho} = -\frac{1}{\rho^2},$$

$$E_2 = -F_{02} = 0.$$

Пусть имеем градиентное τ^i и вихревое η^i поля. Свободную заряженную частицу определим уравнением

$$\det\left(L_{\tau}^{(2)} g_{ij} - \frac{28}{m_1} I\delta_{ij} + 2\tau\left(L_{\eta}^{(2)} g_{ij} - \frac{1}{\varepsilon^2} P\delta_{ij}\right)\right) = 0, \tag{42}$$

где все входящие величины определены выше.

Для частицы, расположенной в начале цилиндрической системы координат, уравнение (42) превратится в обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение

$$2\tau^1 \frac{d^2\tau^1}{d\rho^2} + 4\left(\frac{d\tau^1}{d\rho}\right)^2 - \frac{28}{m}\left(\tau^1\right)^3 + 2\tau\left[\left(\frac{d\eta^0}{d\rho}\right)^2 - \frac{1}{\varepsilon^2}\eta^{0^4}\right] = 0 \tag{43}$$

с решением

$$\overline{a}(\rho) = \left(\eta^0, \tau^1, 0\right) = \left(\pm\frac{\varepsilon}{\rho}, \frac{-m}{\rho^2}, 0\right).$$

Итак, мы убедились, что все три аксиомы удовлетворены.

Движение заряженной частицы в центрально-симметричном поле другой заряженной частицы описывается тем же уравнением (42), но с другими инвариантами, содержащими инвариантные множители.

Вычислим элементы матрицы

$$B_{ij} = L_{\eta}^{(2)} g_{ij} \tag{44}$$

в той же системе координат с метрическим тензором (9):

$$B_{00} = 0,$$

$$B_{01} = g_{00}\frac{\partial\eta^0}{\partial x^1}\frac{\partial\eta^1}{\partial x^1} + g_{00}\frac{\partial\eta^0}{\partial x^2}\frac{\partial\eta^1}{\partial x^1},$$

$$B_{02} = g_{00}\frac{\partial\eta^0}{\partial x^1}\frac{\partial\eta^1}{\partial x^2} + g_{00}\frac{\partial\eta^0}{\partial x^2}\frac{\partial\eta^2}{\partial x^2},$$

$$B_{11} = 2g_{00}\frac{\partial\eta^0}{\partial x^1}\frac{\partial\eta^0}{\partial x^1} + 2g_{02}\frac{\partial\eta^0}{\partial x^1}\frac{\partial\eta^2}{\partial x^1},$$

$$B_{12} = \eta^1 g_{02}\frac{\partial^2\eta^0}{\partial x^1\partial x^1} + \eta^2 g_{02}\frac{\partial^2\eta^2}{\partial x^1\partial x^2} + g_{02}\frac{\partial\eta^0}{\partial x^1}\frac{\partial\eta^1}{\partial x^1} + g_{02}\frac{\partial\eta^0}{\partial x^2}\frac{\partial\eta^2}{\partial x^1} +$$

$$+ 2g_{00}\frac{\partial\eta^0}{\partial x^1}\frac{\partial\eta^0}{\partial x^2} + 2g_{02}\frac{\partial\eta^0}{\partial x^1}\frac{\partial\eta^2}{\partial x^2},$$

$$B_{22} = 2\eta^1 g_{02}\frac{\partial^2\eta^0}{\partial x^2\partial x^1} + 2\eta^2 g_{02}\frac{\partial\eta^0}{\partial x^2\partial x^2} + g_{02}\frac{\partial\eta^0}{\partial x^1}\frac{\partial\eta^1}{\partial x^2} + g_{02}\frac{\partial\eta^0}{\partial x^2}\frac{\partial\eta^2}{\partial x^2} +$$

$$+ 2g_{00}\frac{\partial\eta^0}{\partial x^2}\frac{\partial\eta^0}{\partial x^2} + 2g_{02}\frac{\partial\eta^0}{\partial x^2}\frac{\partial\eta^2}{\partial x^2} + g_{20}\frac{\partial\eta^0}{\partial x^1}\frac{\partial\eta^1}{\partial x^2} + g_{20}\frac{\partial\eta^0}{\partial x^2}\frac{\partial\eta^2}{\partial x^2}.$$

Конкретизируем задачу рассмотрением вращения электрона вокруг протона. В рассматриваемой системе координат электрон неподвижен, не равна нулю только компонента η^0, поэтому элементы матрицы B_{ij} имеют вид

$$
\begin{aligned}
B_{11} &= 2g_{00}\left(\frac{\partial\eta^0}{\partial x}\right)^2, \\
B_{12} &= 2g_{00}\frac{\partial\eta^0}{\partial x}\frac{\partial\eta^0}{\partial y}, \\
B_{22} &= 2g_{00}\left(\frac{\partial\eta^0}{\partial y}\right)^2; \\
B_{00} &= B_{01} = B_{02} = 0.
\end{aligned}
\tag{45}
$$

Будем искать решение η^0 в виде

$$\eta^0(x, y) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\nu^2x^2+\mu^2y^2}}. \tag{46}$$

В (46) мы воспользовались предположением, которое можно обобщить так:
в системе координат, в которой заряд покоится, выполняется соотношение

$$\eta^0 = \tau\frac{\varepsilon}{m}; \tag{47}$$

в инерциальной системе координат соотношение (47) очевидно, а в рассматриваемом случае оно обеспечивает существование только одной сингулярной точки в области D.

Вычислим производные от η^0:

$$\frac{\partial\eta^0}{\partial x} = -\varepsilon\nu^2xu^{-3/2}, \qquad \frac{\partial\eta^0}{\partial y} = -\varepsilon\mu^2yu^{-3/2},$$

$$\frac{\partial^2\eta^0}{\partial x^2} = \varepsilon\left(2\nu^4x^2-\mu^2\nu^2y^2\right)u^{-5/2}, \qquad \frac{\partial^2\eta^0}{\partial y^2} = \varepsilon\left(2\mu^4y^2-\nu^2\mu^2x^2\right)u^{-5/2}.$$

Элементы матрицы B_{ij} таковы:

$$
\begin{aligned}
B_{11} &= 2\left(\omega^2R^2-1\right)\varepsilon^2\nu^4x^2u^{-3}, \\
B_{12} &= 2\left(\omega^2R^2-1\right)\varepsilon^2\nu^2\mu^2xyu^{-3}, \\
B_{22} &= 2\left(\omega^2R^2-1\right)\varepsilon^2\mu^4y^2u^{-3}.
\end{aligned}
$$

Инвариант P без учета взаимодействия имеет вид

$$P = \varepsilon^2\left(\omega^2R^2-1\right)^2u^{-2}.$$

Вводя множитель M, уравнение (42) с учетом взаимодействия запишем в виде

$$S_{ij} = A_{ij} - \frac{28}{m_1}IM\delta_{ij} + 2\tau_1\left(B_{ij}+PM^2\delta_{ij}\right), \tag{48}$$

причем уравнение движения таково:

$$\det\left(S_{ij}\right) = \det\left(Sg_{ij}+Sc_{ij}\right) = 0, \tag{49}$$

где Sg_{ij} — гравитационная часть S_{ij}, Sc_{ij} — зарядовая часть S_{ij}, а множитель

$$M = 1+\gamma\frac{m_2}{R} + k_0\frac{\varepsilon_1}{m_1}\left(-g_{kl}\eta^k\eta^l\right)^{1/2}. \tag{50}$$

В (50) k_0 — константа электрического взаимодействия

$$\left(-g_{kl}\eta^k\eta^l\right)^{1/2} = \left(1-\omega^2R^2\right)\frac{\varepsilon_2}{R}. \tag{51}$$

Вычислим $Sc_{ij} = \tau_1\left(B_{ij} + PM^2\delta_{ij}\right)$:

$$Sc_{00} = -2m_1\varepsilon^2\left(\omega^2R^2-1\right)^2u^{-3},$$

$$Sc_{11} = 2m_1\varepsilon^2\left(\omega^2R^2-1\right)\left[\nu^4x^2-\left(1-\omega^2R^2\right)M^2\left(\nu^2x^2+\mu^2y^2\right)\right]u^{-4},$$

$$Sc_{12} = 2m_1\varepsilon^2\left(\omega^2R^2-1\right)\nu^2\mu^2xyu^{-4},$$

$$Sc_{22} = 2m_1\varepsilon^2\left(\omega^2R^2-1\right)\left[\mu^4y^2-\left(1-\omega^2R^2\right)\left(\nu^2x^2+\mu^2y^2\right)M^2\right]u^{-4}.$$

Приведем уравнение (49) к общему знаменателю u^{-5}, выполним подстановку $y=tx$, сократим на $m_2u^{-5}x^4$ и вычислим окончательно элементы матрицы Sc_{ij}:

$$Sc_{00} = 2\frac{\varepsilon^2}{m_1}\left(\omega^2R^2-1\right)^2\left(\nu^4+2\nu^2\mu^2t^2+\mu^4t^4\right),$$

$$Sc_{11} = 2\frac{\varepsilon^2}{m_1}\left(\omega^2R^2-1\right)\left[\nu^6+\mu^2\nu^4t^2-\left(1-\omega^2R^2\right)\left(\nu^4+2\nu^2\mu^2t^2+\mu^4t^4\right)M^2\right],$$

$$Sc_{12} = 2\frac{\varepsilon^2}{m_1}\left(\omega^2R^2-1\right)\nu^2\mu^2\left(\nu^2t+\mu^2t^3\right), \tag{52}$$

$$Sc_{22} = 2\frac{\varepsilon^2}{m_1}\left(\omega^2R^2-1\right)\left[\nu^2\mu^4t^2+\mu^4t^4-\left(1-\omega^2R^2\right)\left(\nu^4+2\nu^2\mu^2t^2+\mu^4t^4\right)M^2\right].$$

Мы видим, что в уравнение (49) электричество входит в виде добавочных слагаемых, и эти добавки очень малы для рассматриваемой задачи, за исключением добавки в инварианте взаимодействия. Действительно, если [2, с. 161]

$$m_1 = 2{,}255\cdot10^{-66}\text{ с},$$

$$\varepsilon = 4{,}605\cdot10^{-45}\text{ с},$$

$$1\text{ см} = 3{,}336\cdot10^{-11}\text{ с},$$

$$1\text{ г} = 2{,}476\cdot10^{-39}\text{ с},$$

то

$$\frac{\varepsilon^2}{m_1} \simeq 0{,}94\cdot10^{-23}\text{ с} = \frac{21{,}2}{2{,}255}\cdot10^{-24}\text{ с} = 0{,}94\cdot10^{-23}\text{ с}.$$

В первом приближении добавками (52) можем пренебречь. В результате, проведя все вычисления, выполненные выше для гравитации, согласно (26) и (35) получим формулу для угловой скорости вращения электрона в поле протона:

$$\omega^2R^2 = \frac{1+\lambda}{(1-1{,}019\cdot\lambda)^2}\lambda_0, \tag{53}$$

где

$$\lambda_0 = \frac{m_2}{R} + k_0\left(1-\omega^2R^2\right)\frac{\varepsilon_1}{m_1}\frac{\varepsilon_2}{R},$$

$$v^2 = \frac{m_2}{R} \lim_{R\to\infty} \frac{1+0,063\dfrac{m_2}{R}}{\left(1-1,019\cdot 0,063\dfrac{m_2}{R}\right)^2} = \frac{m_2}{R},$$

и формула для скорости совпадает с классической.

В (52) $k_0 < 0$ и решение существует, если $\varepsilon_1\varepsilon_2 < 0$, что соответствует притяжению разноименных зарядов.

8. Заключение. Можно утверждать, что даже в плоском пространстве метрический тензор определяет и гравитацию, и электромагнетизм.

Если решения уравнения (49) существуют, то с высокой точностью выполняются законы динамики гравитации и электромагнетизма. Поэтому доказательство существования решений в малой окрестности сингулярной точки является приоритетной задачей, и ее решение возможно с помощью современных технологий и современными методами.

1. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. – М.: Наука, 1979. – 760 с.
2. *Синг Дж.* Общая теория относительности. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 432 с.
3. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
4. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 527 с.
5. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. – М.: Наука, 1967. – 664 с.
6. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1975. – 480 с.

Получено 21.03.2002,
после доработки — 26.06.2002

УДК 517.5

Т. О. Кононович (Полтав. пед. ун-т)

ОЦІНКА НАЙКРАЩОГО НАБЛИЖЕННЯ СУМОВНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ ЧЕРЕЗ КОЕФІЦІЄНТИ ФУР'Є

In terms of Fourier coefficients, we obtain upper bounds of the best approximation of periodic summable functions of two variables in the metric L. We consider functions representable by trigonometric series with coefficients that satisfy the two-dimensional analog of the Boas – Telyakovsky conditions.

Отримано виражену через коефіцієнти Фур'є оцінку зверху найкращого наближення в метриці L періодичних сумовних функцій двох змінних. Розглянуто функції, які можна зобразити тригонометричними рядами з коефіцієнтами, що задовольняють двовимірний аналог умов Боаса – Теляковського.

Нехай L — простір сумовних функцій двох змінних, 2π-періодичних за кожною змінною, з нормою

$$\|f(x_1, x_2)\|_L = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x_1, x_2)|\,dx_1\,dx_2.$$

Позначимо через $T_{n_1n_2}$ множину тригонометричних поліномів вигляду

$$t_{n_1n_2}(x_1, x_2) = \sum_{l_1=0}^{n_1}\sum_{l_2=0}^{n_2} 2^{-\gamma}(A_{l_1l_2}\cos l_1x_1\cos l_2x_2 + B_{l_1l_2}\cos l_1x_1\sin l_2x_2 +$$
$$+ C_{l_1l_2}\sin l_1x_1\cos l_2x_2 + D_{l_1l_2}\sin l_1x_1\sin l_2x_2),$$

де $A_{l_1l_2}$, $B_{l_1l_2}$, $C_{l_1l_2}$, $D_{l_1l_2}$ — довільні дійсні числа, γ — кількість рівних нулю координат вектора (l_1, l_2), $n_1, n_2 = 0, 1, \ldots$. Нехай $E_{n_1n_2}(f)$ — величина найкращого наближення функції $f \in L$ тригонометричними поліномами $t_{n_1n_2} \in T_{n_1n_2}$:

$$E_{n_1n_2}(f) \overset{\text{df}}{=} \inf_{t_{n_1n_2}\in T_{n_1n_2}} \left\|f(x_1, x_2) - t_{n_1n_2}(x_1, x_2)\right\|_L.$$

Нехай також $N_0 = N \cup \{0\}$, $Z_+^2 = N_0 \times N_0$, $Q_{m_1m_2} = \left\{(l_1, l_2) \in Z_+^2\colon\ (l_1 \le m_1) \wedge \wedge\ (l_2 \le m_2)\right\}$, де $m_1, m_2 \in N_0$.

Для довільної послідовності дійсних чисел $\{a_{l_1l_2}\}$, $(l_1, l_2) \in Z_+^2$, покладемо

$$\Delta^1 a_{l_1l_2} = a_{l_1l_2} - a_{l_1+1\,l_2}, \quad \Delta^2 a_{l_1l_2} = a_{l_1l_2} - a_{l_1\,l_2+1},$$

$$\Delta^{12} a_{l_1l_2} = \Delta^2(\Delta^1 a_{l_1l_2}) = \Delta^1(\Delta^2 a_{l_1l_2}) = a_{l_1l_2} - a_{l_1+1\,l_2} - a_{l_1\,l_2+1} + a_{l_1+1\,l_2+1},$$

$$\nabla^1_{k_1} a_{l_1l_2} = a_{l_1-k_1\,l_2} - a_{l_1+k_1\,l_2}, \quad \nabla^2_{k_2} a_{l_1l_2} = a_{l_1\,l_2-k_2} - a_{l_1\,l_2+k_2},$$

$$\nabla^{12}_{k_1k_2} a_{l_1l_2} = \nabla^2_{k_2}(\nabla^1_{k_1} a_{l_1l_2}) = \nabla^1_{k_1}(\nabla^2_{k_2} a_{l_1l_2}), \quad 0 \le k_i \le l_i,$$

$$\sigma_{12}(a) := \sum_{k_1=1}^{[l_1/2]}\sum_{k_2=1}^{[l_2/2]} \frac{1}{k_1k_2}\nabla^{12}_{k_1k_2}(\Delta^{12} a_{l_1l_2}), \qquad \sigma_i(a) := \sum_{k_i=1}^{[l_i/2]} \frac{1}{k_i}\nabla^i_{k_i}(\Delta^{12} a_{l_1l_2}),$$

$$\delta_i(a) := \sum_{k_i=1}^{[l_i/2]} \frac{1}{k_i}\nabla^i_{k_i}(\Delta^i a_{l_1l_2}), \quad i = 1, 2.$$