УДК 519.2

А. Я. Дороговцев (Киев)

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Conditions are given under which stationary solutions of an abstract linear stochastic differential equation are stable with respect to a coefficient of higher derivative.

Наведено умови стійкості стаціонарних розв'язків абстрактного лінійного стохастичного диференціального рівняння відносно коефіцієнта при старшій похідній.

Пусть $(H, (\cdot\,,\cdot))$ — комплексное сепарабельное гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|$, порожденной скалярным произведением; $\overline{0}$ — нулевой элемент в H; Θ и I — соответственно нулевой и единичный операторы, действующие в H. Ниже для H-значной функции непрерывность и дифференцируемость означают соответственно непрерывность и дифференцируемость относительно нормы в H. Как обычно, $\mathcal{L}(H)$ — множество всех линейных непрерывных операторов, действующих в H.

Все случайные элементы, о которых идет речь ниже, предполагаются заданными на некотором полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$. Рассматриваются только случайные функции, непрерывные с вероятностью 1; все равенства со случайными элементами в этой статье являются равенствами с вероятностью 1. Единственность решения есть единственность с точностью до стохастической эквивалентности. Используемые ниже свойства случайных элементов и другие вероятностные факты содержатся в работах [1, 2].

1. Формулировка основного результата. Пусть w — H-значный винеровский процесс, A — самосопряженный полуограниченный снизу оператор с множеством определения $\mathfrak{D}(A)$. Рассмотрим задачу о существовании стационарного H-значного решения x_ε уравнения

$$\varepsilon x_\varepsilon''(t) + x_\varepsilon'(t) = Ax_\varepsilon(t) + w'(t), \quad t \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

и исследуем поведение решения x_ε этого уравнения при стремлении к 0 положительного действительного параметра ε. Процесс w производной не имеет, смысл формального выражения (1) разъясняется ниже. Предполагается, что „предельное" уравнение

$$x'(t) = Ax(t) + w'(t), \quad t \in \mathbf{R}, \tag{2}$$

имеет единственное стационарное H-значное решение. В статье [3] для стационарного решения x_ε уравнения (1) с гладким стационарным процессом η вместо w' получено асимптотическое разложение для x_ε по натуральным степеням ε и доказано, что в определенном смысле x_ε сходится к стационарному решению x уравнения (2) с входным процессом η вместо w'. В [3] содержатся также дополнительные ссылки. Существование такого асимптотического разложения обеспечивается гладкостью процесса η. Метод из [3] „не работает" для уравнения (1), и в настоящей статье приводится пример изучения задачи для уравнения с негладким входным процессом.

Сначала напомним некоторые определения и факты в нужной для дальнейшего форме, при этом мы не будем касаться известных общих конструкций. Процесс $\{w(t) \mid t \in \mathbf{R}\}$ со значениями в $\mathbf{C}$ называется винеровским с параметром $\lambda > 0$, если $\operatorname{Re} w$ и $\operatorname{Im} w$ — независимые действительные винеровские процессы на $\mathbf{R}$ и $\mathbf{E}|w(t) - w(s)|^2 = \lambda\,|t - s|$, $\{s, t\} \subset \mathbf{R}$. Предположим, что в H фиксирован некоторый ортонормированный базис $\{e_n \mid n \geq 1\}$.

© А. Я. ДОРОГОВЦЕВ, 2004

Определение 1. *Пусть* $\{w_n \mid n \geq 1\}$ — *последовательность независимых в совокупности* **C**-*значных винеровских процессов на* **R** *с параметрами* $\{\lambda_n \mid n \geq 1\}$ *соответственно, причем* $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n < +\infty$, $\mathbf{P}[w_n(0) = 0] = 1$, $n \geq 1$. *Процесс* $w(t) := \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t)e_n$, $t \in \mathbf{R}$, *называется* H-*значным винеровским процессом на* $\mathbf{R}$.

Винеровские процессы и соответствующие им стохастические дифференциальные уравнения хорошо изучены. Ряд для $w(t)$ при каждом $t \in \mathbf{R}$ сходится с вероятностью 1 по норме в H. Процесс w является гауссовским, непрерывным на $\mathbf{R}$, имеет независимые приращения и

$$\mathbf{E}\| w(t) - w(s) \|^2 = |t-s| \operatorname{tr} Q, \quad \{s, t\} \subset \mathbf{R},$$

где $Qz := \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(z, e_n)e_n$, $z \in H$, Q — ядерный оператор. Можно говорить о винеровском процессе w в H с ковариационным оператором Q для элемента $w(1)$.

Если для функции $h\colon [a, b] \to \mathscr{L}(H)$ выполняется неравенство

$$\int_a^b \| h(s) \|^2 ds < +\infty,$$

то интеграл от функции h относительно процесса w определяется равенством

$$\int_a^b h(s)\, dw(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b h(s) e_n dw_n(s),$$

в котором ряд в правой части сходится в среднем квадратичном. При этом

$$\mathbf{E}\int_a^b H(s)\, dw(s) = \overline{0}, \qquad \mathbf{E}\left\| \int_a^b h(s)\, dw(s) \right\|^2 = \int_a^b \operatorname{tr}\left(h(s) Q h^*(s)\right) ds \leq \operatorname{tr} Q \int_a^b \| h(s) \|^2 ds.$$

Эти свойства интеграла и другие используемые далее в статье факты можно найти, например, в [4], или в [5] (§8.4.2).

Пусть P — некоторый проекционный оператор в H. Тогда процесс Pw, определяемый равенством

$$Pw(z) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) P e_n, \qquad t \in \mathbf{R},$$

также является винеровским с ковариационным оператором PQP для элемента $Pw(1)$. В связи с этим фактом возникает вопрос о возможности определения винеровского процесса как процесса, у которого определенные проекции являются винеровскими процессами (обсуждение этого вопроса см. в [6], §7.2).

Определение 2. *Случайный* H-*значный процесс* $x_\varepsilon := \{x_\varepsilon(t) \mid t \in \mathbf{R}\}$ *называется решением уравнения* (1), *если* $\mathbf{P}[x_\varepsilon(t) \in \mathscr{D}(A)] = 1$, $t \in \mathbf{R}$, *процессы* x_ε, Ax_ε *и* x'_ε *непрерывны с вероятностью* 1, $\mathbf{E}\|x_\varepsilon(t)\|^2 < +\infty$, $\mathbf{E}\|x'_\varepsilon(t)\|^2 < +\infty$ *для* $t \in \mathbf{R}$ *и для любых* $-\infty < s \leq t < +\infty$ *равенство*

$$\varepsilon\left(x'_\varepsilon(t) - x'_\varepsilon(s)\right) + x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(s) = \int_s^t A x_\varepsilon(u)\, du + w(t) - w(s)$$

выполняется с вероятностью 1.

***Замечание* 1.** В определении решения для уравнения (1) процесс x_ε не обязательно должен быть неупреждающим относительно обычно рассматриваемого потока σ-алгебр, порожденных процессом w.

Определение решения для уравнения (2) аналогично.

Основным результатом данной статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть A — самосопряженный полуограниченный снизу с точной нижней гранью $m \in \mathbf{R}$ оператор, для которого число 0 принадлежит резольвентному множеству. Тогда уравнение (2) имеет единственное стационарное решение x и для всех ε, меньших некоторого положительного числа ε_0, уравнение (1) имеет единственное стационарное решение x_ε, и для каждого $\gamma < 1/2$ справедливо соотношение*

$$\forall\, t \in \mathbf{R}: \ \overline{\lim_{\varepsilon \to 0+}} \frac{\mathbf{E}\| x_\varepsilon(t) - x(t) \|}{\varepsilon^\gamma} \le C,$$

число C определяется через оператор A.

Если оператор A ограничен, то имеет место следующий более сильный результат.

Теорема 2. *Пусть A — самосопряженный ограниченный оператор, для которого число 0 принадлежит резольвентному множеству. Тогда уравнение* (2) *имеет единственное стационарное решение x и для всех ε, меньших некоторого положительного числа ε_0, уравнение* (1) *имеет единственное стационарное решение x_ε и справедливо соотношение*

$$\forall\, t \in \mathbf{R}: \ \overline{\lim_{\varepsilon \to 0+}} \frac{\mathbf{E}\| x_\varepsilon(t) - x(t) \|}{\sqrt{\varepsilon}} \le C,$$

число C определяется через оператор A.

***Замечание* 2.** Число ε_0 зависит от оператора A и определяется при доказательстве теорем.

2. Доказательства теорем. ***Доказательство теоремы* 1** представим в виде ряда лемм. Из спектральной теоремы для самосопряженных операторов и условий теоремы на оператор A следует существование проекционных операторов P_+ и P_- таких, что $P_- P_+ = P_+ P_- = \Theta$, $P_- + P_+ = I$, положительный оператор $A_+ := P_+ A$, называемый положительной частью оператора A, действует из $\mathfrak{D}(A_+) = P_+ \mathfrak{D}(A)$ в $H_+ := P_+ H$ и имеет своим спектром лежащую правее 0 часть спектра оператора A, а отрицательный оператор $A_- := P_- A$, называемый отрицательной частью оператора A, действует из $H_- := P_- H$ в H_- и имеет своим спектром лежащую левее 0 часть спектра оператора A. Оператор A_- ограничен. Подпространства H_- и H_+ ортогональны, инвариантны относительно оператора A и

$$A = A_- + A_+, \quad H = H_- + H_+, \quad P_\pm A_\pm = A_\pm P_\pm.$$

Кроме того, для оператора A (и A_-) полуось $(-\infty, m)$ принадлежит резольвентному множеству. Далее предположим, что $m < 0$. Если же $m > 0$, то уравнение (1) совпадает с рассматриваемым ниже уравнением (4). Пусть $(-a_-, a_+)$ — интервал наибольшей длины с $a_- > 0$, $a_+ > 0$, который лежит в резольвентном множестве оператора A. Приведенные выше и другие используемые ниже свойства самосопряженных операторов и функций от них можно найти, например, в [7] (главы 5 и 6). Далее для элемента $z \in H$ положим $z_- := P_- z$, $z_+ := P_+ z$. Пусть также $I_\pm$ и $\Theta_\pm$ — соответственно единичный и нулевой операторы в $H_\pm$.

Положим $w_\pm := P_\pm w$. Из определения 2 легко следует такой вывод.

Лемма 1. *Уравнение* (1) *в H равносильно системе следующих двух уравнений:*

$$\varepsilon x''_{-,\varepsilon}(t) + x'_{-,\varepsilon}(t) = A_- x_{-,\varepsilon}(t) + w'_-(t), \quad t \in \mathbf{R}, \quad \text{в пространстве } H_-, \qquad (3)$$

$$\varepsilon x''_{+,\varepsilon}(t) + x'_{+,\varepsilon}(t) = A_+ x_{+,\varepsilon}(t) + w'_+(t), \quad t \in \mathbf{R}, \quad \textit{в пространстве } H_+. \qquad (4)$$

1. Сначала рассмотрим уравнение (3). Нам понадобится далее пространство H_-^2 — декартово произведение H_- на себя с покоординатными операциями сложения и умножения на комплексное число, а также скалярным произведением

$$\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) := (u_1, v_1) + (u_2, v_2), \qquad \{u_1, u_2, v_1, v_2\} \subset H_-,$$

и соответствующей нормой. H_-^2 — гильбертово пространство. Пусть $\bar{z}_{-,\varepsilon}(t)$ — вектор-столбец с координатами $x'_{-,\varepsilon}(t)$ и $x_{-,\varepsilon}(t)$, $t \in \mathbf{R}$. Легко видеть, что из определения решения следует такое утверждение.

Лемма 2. *Уравнение* (3) *в* H_- *равносильно следующему уравнению в* H_-^2:

$$\bar{z}'_{-,\varepsilon}(t) = \begin{pmatrix} -\varepsilon^{-1} I_- & \varepsilon^{-1} A_- \\ I_- & \Theta_- \end{pmatrix} \bar{z}_{-,\varepsilon}(t) + \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} I_- & -\varepsilon^{-1} I_- \\ \Theta_- & I_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w'_-(t) \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}. \qquad (5)$$

Если $\varepsilon < \varepsilon_0 := (-8m)^{-1}$, то самосопряженный и положительный оператор $I_- + 4\varepsilon A_-$ имеет единственный положительный квадратный корень, который обозначим $\sqrt{I_- + 4\varepsilon A_-}$. Далее предполагаем, что $\varepsilon < \varepsilon_0$. При этом операторное уравнение

$$\Lambda^2 + \frac{1}{\varepsilon}\Lambda - \frac{1}{\varepsilon}A_- = \Theta_-$$

имеет в классе $\mathscr{L}(H_-)$ ограниченных операторов два решения

$$\Lambda_1 = -\frac{1}{2\varepsilon}\left(I_- + \sqrt{I_- + 4\varepsilon A_-}\right), \quad \Lambda_2 = -\frac{1}{2\varepsilon}\left(I_- - \sqrt{I_- + 4\varepsilon A_-}\right).$$

Легко проверить, что операторы Λ_1 и Λ_2 отрицательны при любом $\varepsilon < \varepsilon_0$ и имеют точные верхние грани

$$-\frac{1}{2\varepsilon}\left(1 + \sqrt{1 + 4m\varepsilon}\right) < -\frac{1}{\varepsilon}, \quad -\frac{1}{2\varepsilon}\left(1 - \sqrt{1 - 4a_-\varepsilon}\right) < -a_-$$

соответственно. Оператор

$$\Lambda_1 - \Lambda_2 = -\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{I_- + 4\varepsilon A_-}$$

имеет ограниченный обратный. Согласно спектральной теореме все введенные выше функции от оператора A_- коммутируют между собой. Рассмотрим матрицу

$$W := \begin{pmatrix} I_- & \Lambda_2 \\ \Lambda_1^{-1} & I_- \end{pmatrix}, \quad W^{-1} = \begin{pmatrix} \Lambda_1(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} & -\Lambda_1\Lambda_2(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} \\ -(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} & \Lambda_1(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Положим

$$\bar{u}_{-,\varepsilon} := W^{-1}\bar{z}_{-,\varepsilon}, \qquad \bar{z}_{-,\varepsilon} := W\bar{u}_{-,\varepsilon}.$$

Переходя от вектора $\bar{z}_{-,\varepsilon}$ к вектору $\bar{u}_{-,\varepsilon}$ в уравнении (5), получаем следующее утверждение.

Лемма 3. *Уравнение* (5) *в* H^2 *равносильно следующему*:

$$\bar{u}'_{-,\varepsilon}(t) = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \Theta_- \\ \Theta_- & \Lambda_2 \end{pmatrix} \bar{u}_{-,\varepsilon}(t) + \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1}\Lambda_1(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} w'_-(t) \\ -\varepsilon^{-1}(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} w'_-(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}. \qquad (6)$$

Уравнение (6) распадается на два уравнения в H_- относительно компонент u_1 и u_2 вектора $\vec{u}_{-,\varepsilon}$, а именно,

$$u_1'(t) = \Lambda_1 u_1(t) + (\varepsilon^{-1}\Lambda_1(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1})w_-'(t), \quad t \in \mathbf{R},$$
$$u_2'(t) = \Lambda_2 u_2(t) + (-\varepsilon^{-1}(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1})w_-'(t), \quad t \in \mathbf{R}. \tag{7}$$

Теперь к каждому из уравнений (7) можно применить теорему 4.1 из [8] (§4); утверждение о единственности в этой теореме относится ко всем стационарным решениям. В результате получим такое утверждение.

Лемма 4. *Уравнение* (6) *в* H_-^2 *имеет единственное стационарное решение, задаваемое формулой*

$$\vec{u}_{-,\varepsilon}(t) = \begin{pmatrix} -\left(\sqrt{I_- + 4\varepsilon A_-}\right)^{-1}\Lambda_1 \int\limits_{-\infty}^{t} \exp(\Lambda_1(t-s))dw_-(s) \\ \left(\sqrt{I_- + 4\varepsilon A_-}\right)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{t} \exp(\Lambda_2(t-s))dw_-(s) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{8}$$

Интегралы в формуле (8) — стохастические интегралы от непрерывных $\mathcal{L}(H_-)$-значных функций. Аналогично лемме 4 доказывается также следующая лемма.

Лемма 5. *Уравнение*

$$x_-'(t) = A_- x_-(t) + w_-'(t), \quad t \in \mathbf{R},$$

в H_- *имеет единственное стционарное решение, задаваемое формулой*

$$x_-(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \exp(A_-(t-s))dw_-(s), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Из лемм 4 и 2 получаем следующее утверждение о решениях уравнения (3).

Лемма 6. *Уравнение* (3) *в* H_- *имеет единственное стационарное решение, задаваемое формулой*

$$\vec{x}_{-,\varepsilon} = -\left(\sqrt{I_- + 4\varepsilon A_-}\right)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{t} \exp(\Lambda_1(t-s))dw_-(s) +$$

$$+ \left(\sqrt{I_- + 4\varepsilon A_-}\right)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{t} \exp(\Lambda_2(t-s))dw_-(s), \quad t \in \mathbf{R}.$$

2. Перейдем к рассмотрению уравнения (4). Это уравнение отличается от уравнения (3) тем, что оператор A_+ не является, вообще говоря, ограниченным. Пусть $\vec{z}'_{+,\varepsilon}(t)$ — вектор-столбец с координатами $x'_{+,\varepsilon}(t)$ и $x_{+,\varepsilon}(t)$, $t \in \mathbf{R}$. Пространство H_+^2 определим аналогично H_-^2. Как и в ч. 1, получим следующий аналог леммы 2.

Лемма 7. *Уравнение* (4) *в* H_+ *равносильно следующему уравнению в* H_+^2:

$$\vec{z}'_{+,\varepsilon}(t) = \begin{pmatrix} -\varepsilon^{-1}I_+ & \varepsilon^{-1}A_+ \\ I_+ & \Theta_+ \end{pmatrix}\vec{z}_{+,\varepsilon}(t) + \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1}I_+ & -\varepsilon^{-1}I_+ \\ \Theta_+ & I_+ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_+'(t) \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{9}$$

Положительный при любом $\varepsilon > 0$ оператор $I_+ + 4\varepsilon A_+$ имеет единственный положительный квадратный корень $\sqrt{I_+ + 4\varepsilon A_+}$, а операторное уравнение

$$\tilde{\Lambda}^2 + \frac{1}{\varepsilon}\tilde{\Lambda} - \frac{1}{\varepsilon}A_+ = \Theta_+$$

имеет два решения

$$\tilde{\Lambda}_1 = -\frac{1}{2\varepsilon}\left(I_+ + \sqrt{I_+ + 4\varepsilon A_+}\right), \qquad \tilde{\Lambda}_2 = -\frac{1}{2\varepsilon}\left(I_+ - \sqrt{I_+ + 4\varepsilon A_+}\right).$$

Введенные операторы определены на $\mathfrak{D}(A_+)$ и коммутируют на этом множестве.

При этом оператор $\tilde{\Lambda}_1$ отрицателен и имеет точную верхнюю грань

$$-\frac{1}{2\varepsilon}\left(1 + \sqrt{1 + 4a_+\varepsilon}\right) < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Оператор $\tilde{\Lambda}_1$ является инфинитезимальным генератором аналитической полугруппы $\{P(t) \mid t \geq 0\}$ ограниченных линейных операторов в H_+; имеет место оценка

$$\|P(t)\| \leq C_1 e^{-t/\varepsilon}, \quad t \geq 0,$$

с некоторым числом C_1.

Оператор $\tilde{\Lambda}_2$ положителен и имеет точную нижнюю грань

$$c := \frac{1}{2\varepsilon}\left(\sqrt{1 + 4a_+\varepsilon} - 1\right), \qquad c > \frac{a_+}{2}, \quad \varepsilon < \frac{2}{a_+},$$

а оператор $-\tilde{\Lambda}_2$ является инфинитезимальным генератором аналитической полугруппы $\{T(t) \mid t > 0\}$ ограниченных линейных операторов в H_+. При этом для любого $v \in H_+$ имеем $(T(t)v) \in \mathfrak{D}(A_+)$, $t > 0$. Справедлива также следующая оценка:

$$\|T(t)\| \leq C_2 e^{-ct}, \qquad \left\|\tilde{\Lambda}_2^{\alpha} T(t)\right\| \leq C_2 \frac{1}{t^{\alpha}} e^{-ct}, \quad t > 0, \tag{10}$$

где $\alpha > 0$ и C_2 — некоторая постоянная. Кроме того, для любого $v \in H_+$ функция $\{y(t) := T(t)v \mid t \geq 0\}$ является решением задачи

$$y'(t) = -\tilde{\Lambda}_2 y(t), \quad t > 0,$$
$$y(0) = v.$$

Оператор

$$\tilde{\Lambda}_1 - \tilde{\Lambda}_2 = -\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{I_+ + 4\varepsilon A_+}$$

имеет ограниченный обратный. Относительно использованных фактов из теории полугрупп см., например, [9] (гл. 1).

Введем матрицы

$$\tilde{W} = \begin{pmatrix} I_+ & \tilde{\Lambda}_2 \\ \tilde{\Lambda}_1^{-1} & I_+ \end{pmatrix}, \qquad \tilde{W}^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_1(\tilde{\Lambda}_1 - \tilde{\Lambda}_2)^{-1} & -\tilde{\Lambda}_1\tilde{\Lambda}_2(\tilde{\Lambda}_1 - \tilde{\Lambda}_2)^{-1} \\ -(\tilde{\Lambda}_1 - \tilde{\Lambda}_2)^{-1} & \tilde{\Lambda}_1(\tilde{\Lambda}_1 - \tilde{\Lambda}_2)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Положим

$$\bar{u}_{+,\varepsilon} := \tilde{W}^{-1}\bar{z}_{+,\varepsilon}, \qquad \bar{z}_{+,\varepsilon} := \tilde{W}\bar{u}_{+,\varepsilon}.$$

Аналогично лемме 3 получаем такое утверждение.

Лемма 8. *Уравнение* (9) *в* H_+^2 *равносильно уравнению*

$$\bar{u}'_{+,\varepsilon}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_1 & \Theta_+ \\ \Theta_+ & \tilde{\Lambda}_2 \end{pmatrix} \bar{u}_{+,\varepsilon}(t) + \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1}\tilde{\Lambda}_1(\tilde{\Lambda}_1 - \tilde{\Lambda}_2)^{-1} w'_+(t) \\ -\varepsilon^{-1}(\tilde{\Lambda}_1 - \tilde{\Lambda}_2)^{-1} w'_+(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R},$$

которое распадается на два уравнения в H_+ *относительно компонент* $\tilde{u}_1$ *и* $\tilde{u}_2$ *вектора* $\bar{u}_{+,\varepsilon}$, *а именно,*

$$\tilde{u}'_1(t) = \tilde{\Lambda}_1 \tilde{u}_1(t) + (\varepsilon^{-1}\tilde{\Lambda}_1(\tilde{\Lambda}_1 - \tilde{\Lambda}_2)^{-1}) w'_+(t), \quad t \in \mathbf{R}, \tag{11}$$

$$\tilde{u}'_2(t) = \tilde{\Lambda}_2 \tilde{u}_2(t) + (-\varepsilon^{-1}(\tilde{\Lambda}_1 - \tilde{\Lambda}_2)^{-1}) w'_+(t), \quad t \in \mathbf{R}. \tag{12}$$

В следующих двух леммах приводятся стационарные решения уравнений (11) и (12).

Лемма 9. *Уравнение* (11) *в* H_+ *имеет единственное стационарное решение*

$$\tilde{u}_1(t) = -\left(\sqrt{I_+ + 4\varepsilon A_+}\right)^{-1} \tilde{\Lambda}_1 \int_{-\infty}^{t} P(t-s)\, dw_+(s), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Лемма 10. *Уравнение* (12) *в* H_+ *имеет единственное стационарное решение*

$$\tilde{u}_2(t) = -\left(\sqrt{I_+ + 4\varepsilon A_+}\right)^{-1} \int_{t}^{+\infty} T(s-t)\, dw_+(s), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Доказательства лемм 9 и 10 аналогичны, поэтому рассмотрим только доказательство второй из них.

Доказательство. Из оценки (10) следует существование последнего стохастического интеграла для каждого $t \in \mathbf{R}$, а случайная функция $\tilde{u}_2$ непрерывна на $\mathbf{R}$ (см., например, [5] (§ 8.4.2) или [4]). Положим $\Lambda := -\left(\sqrt{I_+ + 4\varepsilon A_+}\right)^{-1} = -\varepsilon^{-1}(\tilde{\Lambda}_1 - \tilde{\Lambda}_2)^{-1}$, тогда

$$\Lambda \in \mathcal{L}(H_+), \qquad (\tilde{\Lambda}_2 \Lambda) \in \mathcal{L}(H_+), \qquad \tilde{\Lambda}_2 \Lambda = \Lambda \tilde{\Lambda}_2 \quad \text{на} \quad \mathcal{D}(A_+).$$

Кроме того, $\mathbf{P}[\tilde{u}_2(t) \in \mathcal{D}(A_+)] = 1$, $t \in \mathbf{R}$, и

$$\tilde{\Lambda}_2 \tilde{u}_2(t) = \tilde{\Lambda}_2 \Lambda \int_{t}^{+\infty} T(s-t)\, dw_+(s) = \int_{t}^{+\infty} (\tilde{\Lambda}_2 \Lambda T(s-t))\, dw_+(s) =$$

$$= \int_{t}^{+\infty} (\Lambda \tilde{\Lambda}_2 T(s-t))\, dw_+(s) = \int_{t}^{+\infty} (\Lambda T'(s-t))\, dw_+(s).$$

С помощью последнего равенства для любых $s < t$ получаем

$$\tilde{u}_2(t) - \tilde{u}_2(s) - \int_{s}^{t} \tilde{\Lambda}_2 \tilde{u}_2(p)\, dp =$$

$$= \Lambda \int_{u}^{+\infty} T(p-u)\, dw_+(p) \Bigg|_{u=s}^{u=t} + \int_{s}^{t} \left(\int_{p}^{+\infty} (\Lambda T'(q-p))\, dw_+(q) \right) dp =$$

$$= \Lambda \int_{u}^{+\infty} T(p-u)\, dw_+(p) \Bigg|_{u=s}^{u=t} + \int_{s}^{t} \left(\int_{s}^{q} (\Lambda T'(q-p))\, dp \right) dw_+(q) +$$

$$+ \int_{t}^{+\infty} \left(\int_{s}^{t} (\Lambda T'(q-p))\, dp \right) dw_+(q) = \Lambda \int_{u}^{+\infty} T(p-u)\, dw_+(p) \Bigg|_{u=s}^{u=t} -$$

$$- \int_{s}^{t} (\Lambda - \Lambda T(q-s))\,dw_+(q) - \int_{t}^{+\infty} (\Lambda T(q-t) - \Lambda T(q-s))\,dw_+(q) =$$

$$= \Lambda\big(w_+(t) - w_+(s)\big).$$

Следовательно, $\tilde{u}_2$ — решение уравнения (12). Единственность доказывается так же, как в [5] (§ 8.4.4, теорема 7).

Леммы $8-10$ приводят к следующему заключению.

Лемма 11. *Уравнение* (4) *в* H_+ *имеет единственное стационарное решение*

$$\bar{x}_{+,\varepsilon} = -\left(\sqrt{I_+ + 4\varepsilon A_+}\right)^{-1} \int_{-\infty}^{t} T(t-s)\,dw_+(s) -$$

$$- \left(\sqrt{I_+ + 4\varepsilon A_+}\right)^{-1} \int_{t}^{+\infty} T(s-t)\,dw_+(s), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Таким образом, согласно леммам 1, 6 и 11 уравнение (1) в H имеет при $\varepsilon < \varepsilon_0$ единственное стационарное решение $x_\varepsilon := x_{-,\varepsilon} + x_{+,\varepsilon}$, где $x_{-,\varepsilon}$ и $x_{+,\varepsilon}$ определены в леммах 6 и 11 соответственно.

Перейдем к уравнению

$$x_+'(t) = A_+ x_+(t) + w_+'(t), \quad t \in \mathbf{R}, \tag{13}$$

в пространстве H_+. Оператор $-A_+$ является инфинитезимальным генератором аналитической полугруппы $\{S(t) \mid t \geq 0\}$ ограниченных линейных операторов в H_+. При этом для любого $v \in H_+$ $(S(t)v) \in \mathfrak{D}(A_+)$, $t > 0$, и имеет место оценка

$$\|S(t)\| \leq C_3 e^{-a_+ t}, \qquad \left\|A_+^{\alpha} S(t)\right\| \leq C_3 \frac{1}{t^{\alpha}} e^{-a_+ t}, \quad t > 0, \tag{14}$$

где $\alpha > 0$ и C_3 — некоторая постоянная.

Лемма 12. *Уравнение* (13) *в* H_+ *имеет единственное стационарное решение*

$$x_+(t) = - \int_{t}^{+\infty} S(p-t)\,dw_+(p), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Доказательство. В силу оценки (14) стохастический интеграл для x_+ определен и представляет собой непрерывную на $\mathbf{R}$ случайную функцию. Поскольку оператор A_+ имеет ограниченный обратный $A_+^{-1}\colon H_+ \to \mathfrak{D}(A_+)$, справедливо следующее равенство:

$$\dot{x}_+(t) = - \int_{t}^{+\infty} (A_+^{-1} A_+) S(p-t)\,dw_+(p) = A_+^{-1} \int_{t}^{+\infty} (-A_+ S(p-t))\,dw_+(p) =$$

$$= A_+^{-1} \int_{t}^{+\infty} S'(p-t)\,dw_+(p), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Используя это равенство, как и при доказательстве леммы 10, для любых $s < t$ получаем равенство

$$x_+(t) - x_+(s) - \int_{s}^{t} A_+ x_+(p)\,dp = w_+(t) - w_+(s).$$

Из лемм 5 и 12 следует, что уравнение (2) имеет при $\varepsilon < \varepsilon_0$ единственное стационарное решение $x := x_- + x_+$, где x_- и x_+ определены в леммах 5 и 12 соответственно.

Перейдем к заключительной части доказательства теоремы 1. Оценим величину $\mathbf{E}\|x_\varepsilon(0) - x(0)\|^2$. Используя леммы 5, 6, 11 и 12, сначала имеем

$$\mathbf{E}\|x_\varepsilon(0) - x(0)\|^2 \leq r_1 + r_2 + r_3 + r_4,$$

где

$$r_1 := 4\left\|\left(\sqrt{I_- + 4\varepsilon A_-}\right)^{-1}\right\|^2 \left\|\int_{-\infty}^{0} e^{-\Lambda_1 s} dw_-(s)\right\|^2,$$

$$r_2 := 4\left\|\int_{-\infty}^{0}\left[\left(\sqrt{I_- + 4\varepsilon A_-}\right)^{-1} e^{-\Lambda_2 s} - e^{-A_- s}\right] dw_-(s)\right\|^2,$$

$$r_3 := 4\left\|\left(\sqrt{I_+ + 4\varepsilon A_+}\right)^{-1}\right\|^2 \left\|\int_{-\infty}^{0} P(-s)\, dw_+(s)\right\|^2,$$

$$r_4 := 4\left\|\int_{0}^{+\infty}\left[\left(\sqrt{I_+ + 4\varepsilon A_+}\right)^{-1} T(s) - S(s)\right] dw_+(s)\right\|^2.$$

Для оценки величин r_k, $k = 1, 2, 3, 4$, нужна дополнительная подготовка. Напомним, что $\varepsilon < \varepsilon_0$. Заметим сначала, что

$$\left\|\left(\sqrt{I_- + 4\varepsilon A_-}\right)^{-1}\right\|^2 \leq 2, \qquad \left\|\left(\sqrt{I_+ + 4\varepsilon A_+}\right)^{-1}\right\|^2 \leq 1. \tag{15}$$

Кроме того, выполняется неравенство

$$\|\Lambda_2 - A_-\| \leq 2m^2\varepsilon. \tag{16}$$

Легко проверить справедливость формулы

$$\int_0^s e^{A_-(s-p)}(\Lambda_2 - A_-)e^{\Lambda_2 p}\, dp = e^{\Lambda_2 s} - e^{A_- s}, \quad s \geq 0, \tag{17}$$

из которой, учитывая неравенства

$$\left\|e^{A_- t}\right\| \leq C_4 e^{-a_- t}, \qquad \left\|e^{\Lambda_2 t}\right\| \leq C_4 e^{-a_- t}, \quad t \geq 0,$$

с некоторым числом C_4, получаем

$$\left\|e^{\Lambda_2 s} - e^{A_- s}\right\| \leq \int_0^s e^{-a_-(s-p)}\|\Lambda_2 - A_-\| e^{-a_- p}\, dp \leq 2C_4^2 m^2 s e^{-a_- s}\varepsilon, \quad s \geq 0. \tag{18}$$

Поскольку оператор $\tilde{\Lambda}_2 - A_+$ ограничен относительно A_+ (см., например, [9], гл. 9, § 4), имеет место аналог формулы (17) и для полугрупп с неограниченными генераторами

$$T(t) - S(t) = \int_0^t S(t-s)(\tilde{\Lambda}_2 - A_+)T(s)\, ds, \quad t \geq 0, \tag{19}$$

который также можно найти в [9] (гл. 9, формула (2.22)).

Докажем далее, что для любого $\alpha \in (1/2, 1)$ справедлива оценка

$$\left\| A_+^{-\alpha}(\tilde{\Lambda}_2 - A_+)\tilde{\Lambda}_2^{-2(1-\alpha)} \right\| \le \varepsilon^{1-\alpha}, \quad \varepsilon > 0. \tag{20}$$

Действительно,

$$\left\| A_+^{-\alpha}(\tilde{\Lambda}_2 - A_+)\tilde{\Lambda}_2^{-2(1-\alpha)} \right\| = \left\| A_+^{-\alpha}(\varepsilon\tilde{\Lambda}_2^2)\tilde{\Lambda}_2^{-2(1-\alpha)} \right\| = \varepsilon \left\| A_+^{-\alpha}\tilde{\Lambda}_2^{2\alpha} \right\| =$$

$$= \varepsilon \left\| A_+^{-\alpha}\left(\frac{1}{2\varepsilon}\left(\sqrt{I_+ + 4\varepsilon A_+} - I_+\right)\right)^{2\alpha} \right\| = \frac{\varepsilon^{1-2\alpha}}{2^{2\alpha}}\left\| \left(\sqrt{A_+^{-1} + 4\varepsilon I_+} - A_+^{-1/2}\right)^{2\alpha} \right\| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon^{1-2\alpha}}{2^{2\alpha}}\left\| \left(\sqrt{A_+^{-1} + 4\varepsilon I_+} + A_+^{-1/2}\right)^{-2\alpha}(4\varepsilon)^{2\alpha} \right\| \le \varepsilon^{1-\alpha}, \quad \varepsilon > 0. \tag{21}$$

С помощью оценки (21), формулы (19) и оценок (14), (10) для $\varepsilon < 2/a_+$ и $\alpha \in (1/2, 1)$ получаем

$$\| T(t) - S(t) \| = \left\| \int_0^t A_+^{\alpha} S(t-s)\left(A_+^{-\alpha}(\tilde{\Lambda}_2 - A_+)\tilde{\Lambda}_2^{-2(1-\alpha)}\right)\tilde{\Lambda}_2^{2(1-\alpha)}T(s)\,ds \right\| \le$$

$$\le \int_0^t \frac{C_3}{(t-s)^{\alpha}} e^{-a_+(t-s)}\varepsilon^{1-\alpha}\frac{C_2}{s^{2(1-\alpha)}}e^{-cs}\,ds \le$$

$$\le C_2 C_3 e^{-a_+ t}\varepsilon^{1-\alpha}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}s^{-2(1-\alpha)}e^{(a_+ - c)s}\,ds \le$$

$$\le C_2 C_3 \frac{e^{-a_+ t/2}}{t^{1-\alpha}}\mathrm{B}(1-\alpha, 2\alpha - 1)\varepsilon^{1-\alpha}, \quad t > 0, \tag{22}$$

где B — бета-функция Эйлера.

Для любого $\beta \in (0, 1/2)$ также имеем

$$\left\| \left(\left(\sqrt{I_+ + 4\varepsilon A_+}\right)^{-1} - I_+\right)A_+^{-\beta} \right\|^2 \le (4\beta)^{4\beta}(1-2\beta)^{2-4\beta}\varepsilon^{2\beta}, \quad \varepsilon < \frac{1}{4a_+}\left(\frac{1-2\beta}{2\beta}\right)^2. \tag{23}$$

Предположим теперь, что

$$\varepsilon < \min\left(\varepsilon_0, \frac{2}{a_+}, \frac{1}{4a_+}\left(\frac{1-2\beta}{2\beta}\right)^2\right).$$

Поскольку

$$\left\| e^{\Lambda_1 t} \right\| \le C_5 e^{-t/\varepsilon}, \quad t \ge 0,$$

с некоторым числом C_5, с помощью (15) для величины r_1 находим

$$r_1 \le 8C_5^2 \operatorname{tr} Q \int_0^{+\infty} e^{-2t/\varepsilon}dt = 4C_5^2 \operatorname{tr} Q\varepsilon. \tag{24}$$

Чтобы оценить r_2, воспользуемся формулой (18):

$$r_2 \le 8\operatorname{tr} Q \int_0^{+\infty} \left\| \left(\sqrt{I_- + 4\varepsilon A_-}\right)^{-1} - I_- \right\|^2 \left\| e^{\Lambda_2 t} \right\|^2 dt + 8\operatorname{tr} Q \int_0^{+\infty} \left\| e^{\Lambda_2 t} - e^{A_- t} \right\|^2 dt \le$$

$$\le 8C_4^2 \operatorname{tr} Q m^2\left(\frac{8}{a_-} + C_4^2\frac{m^2}{a_-^3}\right)\varepsilon^2. \tag{25}$$

Из (15) следует также

$$r_3 \le 4C_1^2 \operatorname{tr} Q \int_0^{+\infty} e^{-2t/\varepsilon} dt = 2C_1^2 \operatorname{tr} Q\varepsilon. \tag{26}$$

Наконец, для r_4 с помощью (15), (22) и (23) имеем

$$r_4 \le 8\operatorname{tr} Q \int_0^{+\infty} \left\| \left(\sqrt{I_+ + 4\varepsilon A_+}\right)^{-1} (T(s) - S(s)) \right\|^2 ds +$$

$$+ \int_0^{+\infty} \left\| \left(\left(\sqrt{I_+ + 4\varepsilon A_+}\right)^{-1} - I_+\right) S(s) \right\|^2 ds \le 8\operatorname{tr} Q \int_0^{+\infty} \| T(t) - S(t) \|^2 dt +$$

$$+ 8\operatorname{tr} Q \int_0^{+\infty} \left\| \left(\left(\sqrt{I_+ + 4\varepsilon A_+}\right)^{-1} - I_+\right) A_+^{-\beta} \right\|^2 \left\| A_+^{\beta} S(t) \right\|^2 dt \le C_6 \varepsilon^{2(1-\alpha)} + C_7 \varepsilon^{2\beta}, \tag{27}$$

где

$$C_6 := 8C_2^2 C_5^2 \operatorname{tr} Q a_+^{-1} \mathrm{B}^2 (1-\alpha,\ 2\alpha - 1),$$

$$C_7 := 8C_3^2 \operatorname{tr} Q a_+^{2\beta-1} (4\beta)^{4\beta} (1-2\beta)^{2-4\beta} \Gamma(1-2\beta)$$

и Γ — гамма-функция Эйлера. Положим теперь $\beta = \gamma$ и $\alpha = 1 - \beta$, тогда из неравенств (24) – (27) следует утверждение теоремы 1 с числом $C = C_6 + C_7$.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству первой части доказательства теоремы 1, которая относится к пространству H_-, и поэтому не приводится.

3. Пример. Предположим, что $H = \mathbf{L}_2([0, \pi])$,

$$\mathfrak{D}(A) = \{ f \in \mathbf{L}_2([0,\pi]) \mid (Af) \in \mathbf{L}_2([0,\pi]),\ f(0) = f(\pi) \}$$

— множество определения оператора $A = -\dfrac{d^2}{ds^2}$. Тогда A — самосопряженный положительный оператор с дискретным спектром $\sigma(A) = \{1^2, 2^2, \ldots, n^2, \ldots\}$ и собственными функциями $\left\{ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \sin ns,\ s \in [0, \pi],\ n \ge 1 \right\}$.

Пусть $\{\xi_n \mid n \ge 1\}$ — последовательность независимых в совокупности действительных винеровских процессов на $\mathbf{R}$ с параметрами $\{\lambda_n \mid n \ge 1\}$ таких, что

$$\mathbf{P}[\xi_n(0) = 0] = 1, \quad n \ge 1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < +\infty.$$

Винеровский процесс w в H

$$w(t, s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t) \sin ns, \qquad t \in \mathbf{R}, \quad s \in [0, \pi],$$

является случайной функцией, заданной в полосе $\mathbf{R} \times [0, \pi]$.

Рассмотрим следующие две задачи:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 x_\varepsilon(t,s)}{\partial t^2} + \frac{\partial x_\varepsilon(t,s)}{\partial t} + \frac{\partial^2 x_\varepsilon(t,s)}{\partial s^2} = \frac{\partial w(t,s)}{\partial t}, \qquad t \in \mathbf{R}, \quad s \in [0, \pi], \tag{28}$$

$$\mathbf{P}[x_\varepsilon(t, 0) = x_\varepsilon(t, \pi) = 0] = 1, \quad t \in \mathbf{R},$$

и

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} + \frac{\partial^2 x(t,s)}{\partial s^2} = \frac{\partial w(t,s)}{\partial t}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad s \in [0,\pi], \tag{29}$$

$$\mathbf{P}[x_\varepsilon(t,0) = x_\varepsilon(t,\pi) = 0] = 1, \quad t \in \mathbf{R},$$

относительно случайных функций x_ε и x соответственно, определенных в полосе $\mathbf{R}\times[0,\pi]$.

Заданная в полосе $\mathbf{R}\times[0,\pi]$ случайная функция x стационарна по времени, если для любого $n\geq 1$, любых точек $\{(t_1,s_1),\ldots,(t_n,s_n)\}$ и любого $h\in\mathbf{R}$ распределения двух наборов случайных величин

$$\{x(t_1,s_1),\ldots,x(t_n,s_n)\}, \qquad \{x(t_1+h,s_1),\ldots,x(t_n+h,s_n)\}$$

совпадают.

Согласно теореме 1 задача (28) для всех достаточно малых ε и задача (29) имеют единственные стационарные по времени решения x_ε и x соответственно, и для любого $\gamma < 1/2$ при каждом $t\in\mathbf{R}$ выполняется неравенство

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0+}}\left(\varepsilon^{-\gamma}\,\mathbf{E}\left(\int_0^\pi (x_\varepsilon(t,s)-x(t,s))^2\,ds\right)^{1/2}\right) \leq C$$

с некоторым числом C.

1. *Ширяев А. Н.* Вероятность. – М.: Наука, 1989. – 640 с.
2. *Круглов В. М.* Дополнительные главы теории вероятностей. – М.: Высш. шк., 1984. – 264 с.
3. *Дороговцев А. Я.* Устойчивость стационарных решений // Докл. РАН. – 1999. – **369**, № 3. – С. 309 – 310.
4. *Curtain R. F., Falb P. L.* Stohastic differential equation in Hilbert space // J. Different. Equat. – 1971. – **10**, № 3. – P. 412 – 430.
5. *Дороговцев А. Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. – Киев: Выща шк., 1992. – 319 с.
6. *Богачев В. И.* Гауссовские меры. – М.: Наука, 1997. – 352 с.
7. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1980. – 264 с.
8. *Dorogovtsev A. Ya.* Stationary and periodic solutions of stochastic difference and differential equations in Banach space // New Trends in Probability and Statistic / Eds V. V. Sasonov and T. Shervashidze (Proc. Bakuriani Colloq. in Honor of Yu. V. Prohorov. Vol. 1). – Vilnius: Mokslas, 1991. – P. 375 – 390.
9. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.
10. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.

Получено 11.03.2003