ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.11.003
УДК 517.927

О.М. Атласюк, В.А. Михайлець

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: hatlasiuk@gmail.com, mikhailets@imath.kiev.ua

Про розв'язність неоднорідних крайових задач у просторах Соболєва

Представлено членом-кореспондентом НАН України А.Н. Кочубеєм

Досліджено найбільш широкий клас нетерових одновимірних крайових задач у просторах Соболєва. Крайові умови в них можуть містити похідні розв'язку більш високого порядку, ніж у системі диференціальних рівнянь. Встановлено, що кожній із таких крайових задач відповідає деяка прямокутна числова характеристична матриця, вимірність ядра і коядра якої збігаються відповідно з вимірністю ядра і коядра крайової задачі. Знайдено умови збіжності послідовності характеристичних матриць.

Ключові слова: *неоднорідна крайова задача, простір Соболєва, нетерів оператор, індекс оператора.*

Постановка задачі. Нехай задано скінченний інтервал $(a,b)\subset\mathbb{R}$ та параметри

$$\{m, n+1, r, l\}\subset\mathbb{N},\quad 1\leqslant p\leqslant\infty .$$

Позначимо через $W_p^n := W_p^n([a,b];C)$ комплексний простір Соболєва і покладемо $W_p^0 := L_p$. Аналогічно позначимо простори Соболєва вектор-функцій $(W_p^n)^m := W_p^n([a,b];\mathbb{C}^m)$ і матриць-функцій $(W_p^n)^{m\times m} := W_p^n([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$, елементи яких належать функціональному простору W_p^n. Норми у цих просторах позначимо через $\|\cdot\|_{n,p}$; вони є сумами відповідних норм у W_p^n всіх елементів векторно- або матричнозначної функції. З контексту завжди зрозуміло, про норму в якому саме просторі (скалярних функцій, вектор-функцій чи матриць-функцій) йде мова. Якщо $m=1$, то всі ці простори збігаються. Як відомо, простори W_p^n є банаховими; вони сепарабельні тоді і лише тоді, коли $p<\infty$.

Розглянемо на інтервалі (a,b) лінійну крайову задачу для системи m диференціальних рівнянь порядку r

$$(Ly)(t) := y^{(r)}(t)+\sum_{j=1}^{r}A_{r-j}(t)y^{(r-j)}(t)=f(t)\,,\quad t\in(a,b)\,, \tag{1}$$

$$By=c\,, \tag{2}$$

де матриці-функції $A_{r-j}(\cdot)$ належать простору $(W_p^n)^{m\times m}$, вектор-функція $f(\cdot)$ — простору $(W_p^n)^m$, вектор c — простору $\mathbb{C}^l$, а B є лінійним неперервним оператором

$$B:(W_p^{n+r})^m \to \mathbb{C}^l. \tag{3}$$

Крайова умова (2) задає l скалярних крайових умов для системи m диференціальних рівнянь порядку r. Вектори і вектор-функції вважаємо записаними у вигляді стовпців. Під розв'язком крайової задачі (1), (2) розуміємо вектор-функцію $y\in(W_p^{n+r})^m$, яка задовольняє рівняння (1) при $n\geqslant 1$ скрізь, а при $n=0$ майже скрізь на (a,b), та рівність (2), яка задає l скалярних умов. Розв'язки рівняння (1) заповнюють простір $(W_p^{n+r})^m$, коли його права частина $f(\cdot)$ пробігає простір $(W_p^n)^m$. Тому крайова умова (2) є найбільш загальною для цього рівняння. Вона охоплює як усі відомі типи класичних крайових умов: задачі Коші, дво- та багатоточкові, інтегральні та мішані задачі, так і ряд некласичних задач. Останні можуть містити похідні шуканих вектор-функцій порядку k, де $1\leqslant k\leqslant n+r$.

Із відомих результатів функціонального аналізу [1] випливає, що кожний з операторів B в (3) при $1\leqslant p<\infty$ допускає однозначне аналітичне зображення

$$By=\sum_{s=0}^{n+r-1}\alpha_s y^{(s)}(a)+\int_a^b \Phi(t)y^{(n+r)}(t)dt,\quad y(\cdot)\in(W_p^{n+r})^m, \tag{4}$$

де матриці α_s належать простору $\mathbb{C}^{l\times m}$, а матриця-функція $\Phi(\cdot)$ — простору $L_{p'}([a,b];\mathbb{C}^{l\times m})$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$. У випадку $p=\infty$ формула (4) також задає деякий оператор $B\in L((W_\infty^{n+r});\mathbb{C}^l)$, але існують й інші оператори цього класу, що визначаються інтегралами за скінченно-адитивними мірами [2].

Основна мета даної роботи полягає у встановленні нетеровості крайової задачі (1), (2), знаходженні її індексу, вимірності ядра та коядра оператора задачі в термінах властивостей спеціальної прямокутної числової матриці.

Основні результати. Запишемо неоднорідну крайову задачу (1), (2) у вигляді лінійного операторного рівняння

$$(L,B)y=(f,c),$$

де (L,B) — лінійний оператор у парі банахових просторів

$$(L,B):(W_p^{n+r})^m\to(W_p^n)^m\times\mathbb{C}^l. \tag{5}$$

Нагадаємо, що лінійний неперервний оператор $T:X\to Y$, де X і Y — банахові простори, називають нетеровим, якщо його ядро $\ker T$ і коядро $Y/T(X)$ є скінченновимірними лінійними просторами. Якщо цей оператор нетерів, то його область значень $T(X)$ замкнена в Y, а індекс

$$\operatorname{ind} T:=\dim\ \ker T-\dim(Y/T(X))$$

є скінченним (див., наприклад, [3, лема 19.1.1]).

Теорема 1. *Лінійний оператор* (5) *є обмеженим і нетеровим з індексом* $mr-l$.

Для кожного номера $k\in\{1,\ldots,r\}$ розглянемо сім'ю матричних задач Коші

$$Y_k^{(r)}(t)+\sum_{j=1}^{r}A_{r-j}(t)Y_k^{(r-j)}(t)=O_m\,,\ \ t\in(a,b)\,, \tag{6}$$

з початковими умовами

$$Y_k^{(j-1)}(a)=\delta_{k,j}I_m\,,\quad j\in\{1,\ldots,r\}\,. \tag{7}$$

Тут $Y_k(t)$ — шукана $(m\times m)$-матриця-функція; $\delta_{k,j}$ — символ Кронекера; O_m — нульова, I_m — одинична $(m\times m)$-матриці. Єдиний розв'язок $Y_k(\cdot)$ кожної з задач Коші (6), (7) належить простору $(W_p^{n+r})^{m\times m}$. Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння (1) можна однозначно записати у вигляді

$$y(\cdot)=\sum_{k=0}^{r-1}Y_k(\cdot)g_k\,,$$

де вектори-стовпці $g_k\in\mathbb{C}^m$.

Позначимо через $[BY_k(\cdot)]$ числову матрицю розмірності $(m\times l)$, у якої j-й стовпчик є результатом дії оператора B з (3) на j-й стовпчик матриці-функції $Y_k(\cdot)$.

Означення. Блочну числову матрицю

$$M(L,B):=([BY_0(\cdot)]\ldots[BY_{r-1}(\cdot)])\in\mathbb{C}^{mr\times l}\,, \tag{8}$$

що складається з r прямокутних блоків-стовпців $[BY_k(\cdot)]\in\mathbb{C}^{m\times l}$, будемо називати характеристичною матрицею неоднорідної крайової задачі (1), (2).

Теорема 2. *Вимірності ядра та коядра оператора* (5) *дорівнюють відповідно вимірності ядра та коядра характеристичної матриці* (8)*:*

$$\dim\ker(L,B)=\dim\ \ker(M(L,B))\,,$$

$$\dim\operatorname{coker}(L,B)=\dim\ \operatorname{coker}(M(L,B))\,.$$

Із теореми 2 випливає критерій оборотності оператора (L,B), тобто умови, за якої задача (1), (2) має єдиний розв'язок і він неперервно залежить від правих частин диференціального рівняння та крайової умови.

Наслідок 1. *Оператор* (5) *є оборотним тоді і тільки тоді, коли* $l=mr$ *і квадратна матриця* $M(L,B)$ *є невиродженою.*

У випадку $r=1$ теорему 1 і наслідок 1 доведено в роботі $[4]$. У випадку $r\in\mathbb{N}$, $p<\infty$, наслідок 1 встановлений у [5]. Результат теореми 2 є новим і для систем диференціальних рівнянь першого порядку.

Застосування. Розглянемо поряд із задачею (1), (2) послідовність неоднорідних крайових задач

$$L(k)y(t,k):=y^{(r)}(t,k)+\sum_{j=1}^{r}A_{r-j}(t,k)y^{(r-j)}(t,k)=f(t,k),\quad t\in(a,b), \tag{9}$$

$$B(k)y(\cdot,k)=c(k)\,,\ k\in\mathbb{N},$$

де матриці-функції $A_{r-j}(\cdot,k)$, вектор-функція $f(\cdot,k)$, вектор $c(k)$ та лінійний неперервний оператор $B(k)$ задовольняють наведені вище умови для задачі (1), (2).

Пов'яжемо з крайовими задачами (9), (10) послідовність лінійних неперервних операторів

$$(L(k), B(k)) : (W_p^{n+r})^m \to (W_p^n)^m \times \mathbb{C}^l$$

та послідовність характеристичних матриць

$$M(L(k), B(k)) := ([B(k)Y_0(\cdot, k)] \ldots [B(k)Y_{r-1}(\cdot, k)]) \subset \mathbb{C}^{mr \times l},$$

залежних від параметра $k \in \mathbb{N}$.

Сформулюємо достатню умову збіжності характеристичних матриць $M(L(k), B(k))$ до матриці $M(L, B)$.

Теорема 3. *Якщо послідовність операторів $(L(k), B(k))$ сильно збігається до оператора (L, B) при $k \to \infty$, то послідовність характеристичних матриць $M(L(k), B(k))$ збігається до матриці $M(L, B)$.*

Наслідок 2. *В умовах теореми 3 починаючи з достатньо великих k справджуються нерівності*

$$\dim \ker(L(k), B(k)) \leqslant \dim \ker(L, B),$$

$$\dim \operatorname{coker}(L(k), B(k)) \leqslant \dim \operatorname{coker}(L, B).$$

Зокрема:

а) якщо $l = mr$ і оператор (L, B) є оборотним, то оператори $(L(k), B(k))$ також є оборотними для великих k;

б) якщо крайова задача (1), (2) при будь-яких значеннях правих частин має розв'язок, то крайові задачі (9), (10) також мають розв'язок для великих k;

в) якщо існує не більш як один розв'язок деякої крайової задачі (1), (2), то задачі (9), (10) не можуть мати різні розв'язки для кожного досить великого k.

Зауважимо, що з умови

$$\|(B(k) - B)y\| \to 0, \quad y(\cdot) \in (W_p^{n+r})^m, \quad k \to \infty$$

не випливає збіжність цих операторів у рівномірній операторній топології.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Ioffe A.D., Tihomirov V.M. Theory of extremal problems. Berlin: Wissenschaften, 1979. 399 p.
2. Dunford N., Schwartz J.T. Linear operators. I. General theory. New York, London: Interscience Publishers, 1958. xiv+858 p.
3. Hörmander L. The analysis of linear partial differential operators. III: Pseudo-differential operators. Berlin: Springer, 1985. viii+525 p.
4. Atlasiuk O.M., Mikhailets V.A. Fredholm one-dimensional boundary-value problems in Sobolev spaces. *Ukr. Math. J.* 2019. **70**, № 10. P. 1526-1537. https://doi.org/10.1007/s11253-019-01588-w
5. Gnyp E.V., Kodlyuk T.I., Mikhailets V.A. Fredholm boundary-value problems with parameter in Sobolev space. *Ukr. Math. J.* 2015. **67**, № 5. P. 658-667. https://doi.org/10.1007/s11253-015-1105-1

Надійшло до редакції 19.07.2019

REFERENCES

1. Ioffe, A. D. & Tihomirov, V. M. (1979). Theory of extremal problems. Berlin: Wissenschaften.
2. Dunford, N. & Schwartz, J. T. (1958). Linear operators. I. General theory. New York, London: Interscience Publishers.
3. Hörmander, L. (1985). The analysis of linear partial differential operators. III: Pseudo-differential operators. Berlin: Springer.
4. Atlasiuk, O. M. & Mikhailets, V. A. (2019). Fredholm one-dimensional boundary-value problems in Sobolev spaces. Ukr. Math. J., 70, No.10, pp. 1526-1537. https://doi.org/10.1007/s11253-019-01588-w
5. Gnyp, E.V., Kodlyuk, T.I. & Mikhailets, V.A. (2015). Fredholm boundary-value problems with parameter in Sobolev space. Ukr. Math. J., 67, No. 5, pp. 658-667. https://doi.org/10.1007/s11253-015-1105-1

Received 19.07.2019

Е.Н. Атласюк, В.А. Михайлец

Институт математики НАН Украины, Киев
E-mail: hatlasiuk@gmail.com, mikhailets@imath.kiev.ua

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

Исследуется наиболее широкий класс нетеровых одномерных краевых задач в пространствах Соболева. Краевые условия в них могут содержать производные решения более высокого порядка, чем порядок системы дифференциальных уравнений. Показано, что каждой из таких краевых задач отвечает некоторая прямоугольная числовая характеристическая матрица, размерность ядра и коядра которой совпадают соответственно с размерностью ядра и коядра краевой задачи. Найдены условия сходимости последовательности характеристических матриц.

Ключевые слова: *неоднородная краевая задача, пространство Соболева, нетеров оператор, индекс оператора.*

O.M. Atlasiuk, V.A. Mikhailets

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: hatlasiuk@gmail.com, mikhailets@imath.kiev.ua

ON THE SOLVABILITY OF INHOMOGENEOUS
BOUNDARY-VALUE PROBLEMS IN SOBOLEV SPACES

We investigate the most general class of Fredholm one-dimensional boundary-value problems in the Sobolev spaces. Boundary conditions of these problems may contain derivatives of higher order than the order of the system of differential equations. It is established that each of these boundary-value problems corresponds to a certain rectangular numerical characteristic matrix with kernel and cokernel having the same dimension as the kernel and cokernel of the boundary-value problem. The conditions for the sequence of characteristic matrices to converge are found.

Keywords: *inhomogeneous boundary-value problem, Sobolev space, Fredholm operator, index of operator.*