ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.10.003
УДК 517.5

Е.С. Афанасьева[1], В.И. Рязанов[1], Р.Р. Салимов[2]

[1] Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Славянск
[2] Институт математики НАН Украины, Киев
E-mail: es.afanasjeva@gmail.com, vl.ryazanov1@gmail.com, ruslan.salimov1@gmail.com

О граничном поведении классов Соболева с критическим показателем

Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В.Я. Гутлянским

Найдены условия на внешнюю дилатацию $K_O(x,f)$ и границы областей в $\mathbb{R}^n, n\geqslant 3,$ при которых гомеоморфизмы f классов Соболева $W^{1,1}_{\text{loc}}$ допускают непрерывное или гомеоморфное продолжение в замыкание областей.

Ключевые слова: *классы Соболева, критический показатель, внешняя дилатация, граничное поведение, непрерывное и гомеоморфное продолжение.*

Предварительные замечания. В работе получены приложения теории так называемых кольцевых и нижних Q-гомеоморфизмов к исследованию граничного поведения гомеоморфизмов с обобщенными производными по Соболеву (см., например, [1]).

Как известно, любой гомеоморфизм f класса $W^{1,1}_{\text{loc}}$ с локально интегрируемой дилатацией $K_O(x,f)$ на плоскости является как кольцевым, так и нижним Q-гомеоморфизмом с $Q=K_O(x,f)$ (см. [2, 3]). Кроме того, в работе [4], в частности, было показано, что гомеоморфизмы f класса $W^{1,p}_{\text{loc}}$ при $p>n-1$ в $\mathbb{R}^n, n\geqslant 3,$ являются так называемыми нижними Q-гомеоморфизмами с функцией $Q(x)$, равной внешней дилатации $K_O(x,f)$ отображения f, и кольцевыми Q_*-гомеоморфизмами с $Q_*(x)=K_O^{n-1}(x,f)$.

Случай с критическим показателем $p=n-1$, который оставался неизученным, рассматривается в данной работе. Это продвижение оказалось возможным, прежде всего, благодаря статье [5].

Соответствующие определения и историю вопроса можно найти в [6].

2. Непрерывное продолжение на границу. Здесь и в дальнейшем мы используем обозначение предельных множеств отображения $f:D\to\overline{\mathbb{R}^n}$ для множеств $X\subset\overline{D}$,

$$C(X,f):=\left\{y\in\overline{\mathbb{R}^n}: y=\lim_{k\to\infty}f(x_k),\, x_k\to x_0\in X,\, x_k\in D\right\}.$$

Заметим, что для произвольного гомеоморфизма $f : D \to D'$ имеет место включение $C(\partial D, f) \subset \partial D'$ (см., например, предложение 13.5 в [1]).

В силу теоремы 1 в [6], а также теоремы 6.1 в [7] (см. лемму 9.4 в [1]) имеем следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть* D *и* D' *— области в* $\mathbb{R}^n, n \geqslant 2,$ $x_0 \in \partial D$. *Предположим, что область* D *локально связна в точке* $x_0 \in \partial D$, *а граница области* D' *сильно достижима. Пусть* $f : D \to D'$ *— гомеоморфизм класса Соболева* $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ *с* $K_O \in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$. *Если выполнено условие*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dr}{\|K_O\|_{n-1}(r)} = \infty,$$

где $0 < \varepsilon_0 < d_0 = \sup\limits_{x \in D} |x - x_0|$ *и*

$$\|K_O\|_{n-1}(r) = \|K_O\|_{n-1}(x_0, r) = \left(\int\limits_{S(x_0, r)} K_O^{n-1}(x, f)\, dA \right)^{\frac{1}{n-1}}, \tag{1}$$

$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$, *то отображение* f *продолжается в точку* x_0 *по непрерывности в* $\overline{\mathbb{R}^n}$.

Здесь и далее K_O определена нулем вне области D.

Следствие 1. *В частности, заключение леммы* 1 *имеет место, если*

$$k_{x_0}(r) = O\left(\left[\log \frac{1}{r} \right]^{n-1} \right)$$

при $r \to 0$, *где* $k_{x_0}(r)$ *— интегральное среднее значение* K_O^{n-1} *по сфере* $S(x_0, r) =$ $= \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$.

Ввиду следствия 3 из [6] получаем также следующие следствия из результатов работы [8] для кольцевых Q-гомеоморфизмов.

Лемма 2. *Пусть* D *и* D' *— ограниченные области в* $\mathbb{R}^n, n \geqslant 2$, D *локально связна в* $x_0 \in \partial D$, *и пусть* $f : D \to D'$ *— гомеоморфизм класса Соболева* $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ *с* $K_O \in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$ *такой, что* $\partial D'$ *сильно достижима хотя бы в одной точке предельного множества* $C(x_0, f)$. *Предположим, что*

$$\int\limits_{A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} K_O^{n-1}(x, f)\, \psi^n(|x - x_0|)\, dm(x) = o(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0))$$

при $\varepsilon \to 0$ и $\varepsilon_0 > 0$, *где* $A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon_0 < |x - x_0| < \varepsilon\}$ *и* $\psi(t)$ *— неотрицательная измеримая функция на* $(0, \infty)$ *такая, что*

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt < \infty$$

для всех $\varepsilon \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$. *Тогда* f *имеет непрерывное продолжение в точку* x_0.

Следуя [9], говорим, что локально интегрируемая функция $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *имеет конечное среднее колебание в точке* $x_0\in\mathbb{R}^n$, сокр. $\varphi\in FMO(x_0)$, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{1}{|B(x_0,\varepsilon)|}\int\limits_{B(x_0,\varepsilon)}|\varphi(x)-\tilde{\varphi}_\varepsilon|\,dm(x)<\infty,$$

где

$$\tilde{\varphi}_\varepsilon=\frac{1}{|B(x_0,\varepsilon)|}\int\limits_{B(x_0,\varepsilon)}\varphi(x)\,dm(x)\ -$$

интегральное среднее значение функции $\varphi(x)$ по шару $B(x_0,\varepsilon)=\{x\in\mathbb{R}^n:|x-x_0|<\varepsilon\}$.

Теорема 1. *Пусть* D *и* D' *— ограниченные области в* $\mathbb{R}^n, n\geqslant 2$, D *локально связна в* $x_0\in\partial D$, $\partial D'$ *сильно достижима и пусть* $f:D\to D'$ *— гомеоморфизм класса Соболева* $W^{1,1}_{\rm loc}$ *с* $K_O\in L^{n-1}_{\rm loc}(D)$. *Если* K_O^{n-1} *имеет конечное среднее колебание в точке* $x_0\in\overline{D}$, *то* f *продолжим в* x_0 *по непрерывности в* $\mathbb{R}^n$.

Следствие 2. *В частности, заключение теоремы* 1 *имеет место, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{1}{|B(x_0,\varepsilon)|}\int\limits_{B(x_0,\varepsilon)}K_O^{n-1}(x,f)\,dm(x)<\infty.$$

Выбирая в лемме 2 функцию $\psi(t)\equiv 1/t$, приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть* D *и* D' *— ограниченные области в* $\mathbb{R}^n, n\geqslant 2$, D *локально связна в* $x_0\in\partial D$, $\partial D'$ *сильно достижима и пусть* $f:D\to D'$ *— гомеоморфизм класса Соболева* $W^{1,1}_{\rm loc}$ *с* $K_O\in L^{n-1}_{\rm loc}(D)$. *Если*

$$\int\limits_{A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)}K_O^{n-1}(x,f)\frac{dm(x)}{|x-x_0|^n}=o\left(\left[\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^n\right)$$

при $\varepsilon\to 0$, *то* f *продолжим в* x_0 *по непрерывности в* $\mathbb{R}^n$.

Обратная функция Φ^{-1} может быть корректно определена для любой неубывающей функции $\Phi:[0,\infty]\to[0,\infty]$:

$$\Phi^{-1}(\tau)=\inf_{\Phi(t)\geqslant\tau}t. \tag{2}$$

Напомним, что функция $\Phi:[0,\infty]\to[0,\infty]$ называется выпуклой, если

$$\Phi(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2)\leqslant\lambda\Phi(t_1)+(1-\lambda)\Phi(t_2)$$

при всех t_1, $t_2\in[0,\infty]$ и $\lambda\in[0,1]$.

Теорема 3. *Пусть* D *и* D' *— ограниченные области в* $\mathbb{R}^n, n\geqslant 2$, D *локально связна на границе, а* D' *имеет сильно достижимую границу и пусть* $f:D\to D'$ *— гомеоморфизм класса Соболева* $W^{1,1}_{\rm loc}$. *Если*

$$\int\limits_D\Phi(K_O^{n-1}(x,f))\,dm(x)<\infty \tag{3}$$

для неубывающей выпуклой функции $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ *такой, что*

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty \tag{4}$$

при некотором $\delta > \Phi(0)$, *то* f *имеет непрерывное продолжение* $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.

Условие (4) является не только достаточным, но и необходимым для непрерывного продолжения на границу отображений f с интегральными ограничениями вида (3) (см., например, замечание 5.1 в работе [10]).

3. Продолжение на границу обратных отображений. Напомним некоторые определения. Непрерывное отображение γ открытого подмножества Δ действительной оси $\mathbb{R}$ или окружности в $\mathbb{C}$ называется *штриховой линией* (см., например, раздел 6.3 в [1]). Напомним, что любое открытое множество Δ в $\mathbb{R}$ состоит из счетного набора попарно непересекающихся интервалов. Это дает мотивировку для термина "штриховая линия".

Следующая лемма о предельных множествах лежит в основе доказательства теоремы о продолжении на границу обратных гомеоморфизмов с конечным искажением. Эта лемма вытекает из леммы 9.1 в статье [7] (см. лемму 9.5 в [1]), а также теоремы 1 в [6].

Лемма 3. *Пусть* D *и* D' — *области в* $\mathbb{R}^n, n \geqslant 2$, z_1 *и* z_2 — *различные точки* ∂D, $z_1 \neq \infty$, *а* $f : D \to D'$ — *гомеоморфизм класса Соболева* $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ *с* $K_O \in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$. *Предположим, что функция* K_O *является* $(n-1)$ *-интегрируемой на штриховых линиях*

$$D(r) = \{x \in D : |x - z_1| = r\} = D \cap S(z_1, r)$$

для некоторого множества E чисел $r < |z_1 - z_2|$, *имеющего положительную линейную меру. Если* D *локально связна в точках* z_1 *и* z_2, *а* $\partial D'$ *является слабо плоской, то*

$$C(z_1, f) \cap C(z_2, f) = \varnothing .$$

Из леммы 3 непосредственно следует следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* D *и* D' — *области в* $\mathbb{R}^n, n \geqslant 2$, D *локально связна на своей границе, а граница области* D' *является слабо плоской и пусть* $f : D \to D'$ — *гомеоморфизм класса Соболева* $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ *с* $K_O \in L^{n-1}(D)$. *Тогда отображение* f^{-1} *имеет продолжение в замыкание области* $\overline{D'}$ *по непрерывности в* $\overline{\mathbb{R}^n}$.

Кроме того, ввиду теоремы 1 из [6], по теореме 9.2 в [7] (см. также теорему 9.7 в [1]) мы получаем справедливость следующего заключения.

Теорема 5. *Пусть* D *и* D' — *области в* $\mathbb{R}^n, n \geqslant 2$, D *локально связна на своей границе, а граница области* D' *является слабо плоской. Предположим, что* $f : D \to D'$ — *гомеоморфизм класса Соболева* $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ *с* $K_O \in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$ *и, кроме того,*

$$\int_{0}^{\delta(x_0)} \frac{dr}{\|K_O\|_{n-1}(x_0, r)} = \infty \qquad \forall x_0 \in \partial D$$

при некотором

$$\delta(x_0) < d(x_0) = \sup_{x \in D} |x - x_0|,$$

где величина $\|K_O\|_{n-1}(x_0, r)$ *определена в (1). Тогда отображение* f^{-1} *продолжается в замыкание области* D' *по непрерывности в* $\overline{\mathbb{R}^n}$.

4. Гомеоморфное продолжение на границу. Комбинируя результаты предыдущих двух разделов, получаем следующие теоремы.

Теорема 6. *Пусть* D *и* D' *— ограниченные области в* $\mathbb{R}^n, n \geqslant 2$, D *локально связна на своей границе, а область* D' *имеет слабо плоскую границу. Предположим, что* $f : D \to D'$ *— гомеоморфизм класса Соболева* $W^{1,1}_{\text{loc}}$ *с* $K_O \in L^{n-1}_{\text{loc}}(D)$. *Предположим, что*

$$\int_0^{\delta(x_0)} \frac{dr}{\|K_O\|_{n-1}(x_0, r)} = \infty \qquad \forall x_0 \in \partial D, \tag{5}$$

где величина $\|K_O\|_{n-1}(x_0, r)$ *определена в* (1) *при некотором*

$$\delta(x_0) < d(x_0) = \sup_{x \in D} |x - x_0|.$$

Тогда отображение f *имеет гомеоморфное продолжение* $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D}'$.

Следствие 3. *В частности, заключение теоремы 6 верно, если*

$$k_{x_0}(r) = O\left(\left[\log \frac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$$

при $r \to 0$, *где* $k_{x_0}(r)$ *— интегральное среднее значение* K_O^{n-1} *по сфере* $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$.

В качестве следствия из теоремы 6 мы получаем обобщение хорошо известной теоремы Геринга—Мартио о гомеоморфном продолжении на границу квазиконформных отображений между *QED*-областями (см. [11]).

Следствие 4. *Пусть* D *и* D' *— ограниченные области со слабо плоскими границами в* $\mathbb{R}^n, n \geqslant 2$, *отображение* $f : D \to D'$ *— гомеоморфизм класса Соболева* $W^{1,1}_{\text{loc}}$ *с* $K_O \in L^{n-1}_{\text{loc}}(D)$. *Если условие (5) выполнено в каждой точке* $x_0 \in \partial D$, *то* f *имеет гомеоморфное продолжение* $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D}'$.

Лемма 4. *Пусть* D *и* D' *— ограниченные области со слабо плоскими границами в* $\mathbb{R}^n, n \geqslant 2$, *и пусть* $f : D \to D'$ *— гомеоморфизм класса Соболева* $W^{1,1}_{\text{loc}}$ *с* $K_O \in L^{n-1}_{\text{loc}}(D)$. *Предположим, что*

$$\int_{A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} K_O^{n-1}(x, f)\, \psi^n(|x - x_0|)\, dm(x) = o(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)) \qquad \forall x_0 \in \partial D$$

при $\varepsilon \to 0$ *и некотором* $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) > 0$, *где* $\psi(t)$ *— неотрицательная измеримая функция на* $(0, \infty)$ *такая, что*

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0)) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt < \infty \qquad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Тогда f *имеет гомеоморфное продолжение* $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D}'$.

Выбирая в лемме 4 функцию $\psi(t) \equiv 1/t$, приходим к следующей теореме.

Теорема 7. *Пусть* D *и* D' *— ограниченные области со слабо плоскими границами в* $\mathbb{R}^n, n \geqslant 2,$ *и пусть* $f : D \to D'$ *— гомеоморфизм класса Соболева* $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ *с* $K_O \in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$. *Предположим, что*

$$\int\limits_{A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} K_O^{n-1}(x, f) \frac{dm(x)}{|x - x_0|^n} = o\left(\left[\log \frac{1}{\varepsilon} \right]^n \right)$$

при $\varepsilon \to 0$, *тогда* f *имеет гомеоморфное продолжение* $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D}'$.

Теорема 8. *Пусть* D *и* D' *— ограниченные области со слабо плоскими границами в* $\mathbb{R}^n, n \geqslant 2,$ *и пусть* $f : D \to D'$ *— гомеоморфизм класса Соболева* $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ *с* $K_O \in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$. *Если* $K_O^{n-1}(x, f) \leqslant Q(x)$ *п. в., где* $Q \in FMO(\partial D)$, *то* f *имеет гомеоморфное продолжение* $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D}'$.

Следствие 5. *В частности, заключение теоремы* 8 *имеет место, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{1}{|B(x_0, \varepsilon)|} \int\limits_{B(x_0, \varepsilon)} K_O^{n-1}(x, f)\, dm(x) < \infty \qquad \forall x_0 \in \partial D.$$

Теорема 9. *Пусть* D *и* D' *— ограниченные области со слабо плоскими границами в* $\mathbb{R}^n, n \geqslant 2,$ *и пусть* $f : D \to D'$ *— гомеоморфизм класса Соболева* $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$. Если

$$\int\limits_{D} \Phi\, (K_O^{n-1}(x, f))\, dm(x) < \infty$$

для неубывающей выпуклой функции $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ *такой, что*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau [\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty$$

при некотором $\delta > \Phi(0)$, *то* f *имеет гомеоморфное продолжение* $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D}'$.

Детальные доказательства приведенных результатов можно найти в [12]. Полученные результаты могут быть применены, в частности, в теории уравнений Бельтрами (см., например, [13]).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Moduli in modern mapping theory. New York: Springer, 2009. 367 p.
2. Kovtonyuk D., Petkov I., Ryazanov V. On the boundary behaviour of solutions to the Beltrami equations. *Complex Var. Elliptic Equ.* 2013. **58**, № 5. P. 647—663.
3. Ковтонюк Д.А., Петков И.В., Рязанов В.И., Салимов Р.Р. Граничное поведение и задача Дирихле для уравнений Бельтрами. *Алгебра и анализ*. 2013. **25**, № 4. С. 101—124.

4. Kovtonyuk D., Ryazanov V., Salimov R., Sevost'yanov E. On mappings in the Orlicz—Sobolev classes. *Ann. Univ. Buchar.* (*Math. Ser.*). 2012. **3 (LXI)**. P. 67—78.
5. Tengvall V. Differentiability in the Sobolev space $W^{1,n-1}$. *Calc. Var. Part. Differ. Equat.* 2014. **51**, № 1—2. P. 381—399.
6. Афанасьева Е.С., Рязанов В.И., Салимов Р.Р. К теории классов Соболева с критическим показателем. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2019. № 8. С. 3—8. https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.08.003
7. Ковтонюк Д.А., Рязанов В.И. К теории нижних Q-гомеоморфизмов. *Укр. мат. вісн.* 2008. **5**, № 2. С. 159—184.
8. Ломако Т.В. О распространении некоторых обобщений квазиконформных отображений на границу. *Укр. мат. журн.* 2009. **61**, № 10. С. 1329—1337.
9. Рязанов В.И., Салимов Р.Р. Слабо плоские пространства и границы в теории отображений. *Укр. мат. вісн.* 2007. **4**, № 2. С. 199—234.
10. Kovtonyuk D., Ryazanov V. On the boundary behavior of generalized quasi-isometries. *J. Anal. Math.* 2011. **115**. P. 103—119.
11. Gehring F.W., Martio O. Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings. *J. Anal. Math.* 1985. **45**. P. 181—206.
12. Афанасьева Е.С., Рязанов В.И., Салимов Р.Р. К теории отображений класса Соболева с критическим показателем. *Укр. мат. вісн.* 2018. **15**, № 2. С. 154—176.
13. Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. The Beltrami equation: a geometric approach. *Developments of Mathematics*. Vol. 26. New York etc.: Springer, 2012. 302 p.

Поступило в редакцию 05.07.2019

REFERENCES

1. Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U. & Yakubov, E. (2009). Moduli in modern mapping theory. New York: Springer.
2. Kovtonyuk, D., Petkov, I. & Ryazanov, V. (2013). On the boundary behaviour of solutions to the Beltrami equations. Complex Var. Elliptic Equ., 58, No. 5, pp. 647-663.
3. Kovtonyuk, D. A., Petkov, I. V., Ryazanov, V. I. & Salimov, R. R. (2013). Boundary behavior and the Dirichlet problem for the Beltrami equations. Algebra i analiz, 25, No. 4, pp. 101-124 (in Russian).
4. Kovtonyuk, D., Ryazanov, V., Salimov, R. & Sevost'yanov, E. (2012). On mappings in the Orlicz—Sobolev classes. Ann. Univ. Buchar. (Math. Ser.), 3 (LXI), pp. 67-78.
5. Tengvall, V. (2014). Differentiability in the Sobolev space $W^{1,n-1}$. Calc. Var. Part. Differ. Equat., 51, No. 1-2, pp. 381-399.
6. Afanas'eva, O. S., Ryazanov, V. I. & Salimov, R. R. (2019). Toward the theory of the Sobolev classes with critical exponent. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 8, pp. 3-8. https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.08.003
7. Kovtonyuk, D. A. & Ryazanov, V. I. (2008). On the theory of lower Q-homeomorphisms. Ukr. mat. visnyk, 5, No. 2, pp. 159-184 (in Russian).
8. Lomako, T. V. (2009). On the extension of some generalizations of quasiconformal mappings to the boundary. Ukr. mat. zhurn., 61, No. 10, pp. 1329-1337 (in Russian).
9. Ryazanov, V. I. & Salimov, R. R. (2007). Weakly flat spaces and boundaries in the theory of mappings. Ukr. mat. visnyk, 4, No. 2,pp. 199-234 (in Russian).
10. Kovtonyuk, D. & Ryazanov, V. (2011). On the boundary behavior of generalized quasi-isometries. J. Anal. Math., 115, pp. 103-119.
11. Gehring, F. W. & Martio, O. (1985). Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings. J. Anal. Math., 45, pp. 181-206.
12. Afanas'eva, E. S., Ryazanov, V. I. & Salimov, R. R. (2018). On the theory of mappings of the Sobolev class with a critical exponent. Ukr. mat. visnyk, 15, No. 2, pp. 154-176 (in Russian).
13. Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Srebro, U. & Yakubov, E. (2012). The Beltrami equation: a geometric approach. Developments of Mathematics, Vol. 26. New York etc.: Springer.

Received 05.07.2019

О.С. Афанасьєва[1],
В.І. Рязанов[1], *Р.Р. Салімов*[2]

[1] Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ
[2] Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: es.afanasjeva@gmail.com, vl.ryazanov1@gmail.com, ruslan.salimov1@gmail.com

ПРО ГРАНИЧНУ ПОВЕДІНКУ В КЛАСАХ СОБОЛЄВА
ІЗ КРИТИЧНИМ ПОКАЗНИКОМ

Знайдено умови на зовнішню дилатацію $K_O(x, f)$ та межі областей $\mathbb{R}^n, n \geqslant 3,$ при яких гомеоморфізми f класів Соболєва $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ допускають неперервне або гомеоморфне продовження в замикання областей.
Ключові слова: *класи Соболєва, критичний показник, зовнішня дилатація, гранична поведінка, неперервне і гомеоморфне провдовження.*

O.S. Afanas'eva[1],
V.I. Ryazanov[1], *R.R. Salimov*[2]

[1] Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Slov'yansk
[2] Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: es.afanasjeva@gmail.com, vl.ryazanov1@gmail.com, ruslan.salimov1@gmail.com

BOUNDARY BEHAVIOR OF THE SOBOLEV CLASSES
WITH CRITICAL EXPONENT

The conditions for outer dilation $K_O(x, f)$ and the boundaries of domains under which the homeomorphisms of the Sobolev classes $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ admit a continuous or homeomorphic extension to the boundary are founded.
Keywords: *Sobolev's classes, critical exponent, outer dilation, boundary behavior.*