УДК 528.06

С.І. АЛЬПЕРТ[*]

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ КОМБІНУВАННЯ ДАНИХ ПРИ КЛАСИФІКУВАННІ СУПУТНИКОВИХ ЗОБРАЖЕНЬ

[*]Науковий Центр аерокосмічних досліджень Землі ІГН НАН України, м. Київ, Україна

Анотація. *Розв'язання різноманітних наукових задач із використанням гіперспектральних космічних зображень, як правило, включає процедуру класифікування. Дана процедура є однією з найбільш важливих процедур у дистанційному зондуванні. При цьому найбільш точні результати надають методи контрольованого класифікування. Важлива інформація отримується з різних спектральних каналів. Процес розв'язку різноманітних наукових, екологічних та практичних задач із використанням гіперспектральних космічних зображень завжди містить процедуру класифікування. В даній статті були розглянуті методи класифікування зображень. Дані методи засновані на теорії свідчень і можуть бути застосовані до гіперспектральних та багатоспектральних зображень. Було зазначено, що комбінування конфліктних частин свідчення є однією з найбільш складних задач. Були розглянуті такі правила комбінування: правило Ягера, правило Інагакі та правило комбінування Жанга. Було показано, що дані правила комбінування можуть працювати з неточною, неповною та невизначеною інформацією. Правило Ягера надає маси перетинів конфліктних множин, що в перетині дають пусту множину, базовій множині. Ненульова маса пустої множини в основному розподіляється серед елементів фрейму розрізнення. Але взаємозв'язок між свідченнями не враховується. Правило комбінування Жанга враховує перетин множин. Дане правило надає міру перетину множин. Дана міра визначається як відношення потужності перетину двох множин до добутку потужностей даних множин. Правило комбінування Інагакі також дає спеціальну формулу для обчислення базових мас. Було зазначено, що правило Інагакі є узанальненням правила Демпстера та правила Ягера. В даній роботі були проаналізовані основні переваги даних методів. Також були розглянуті приклади застосування даних правил комбінування та підрахунку базових мас. Правило комбінування Ягера, правило Інагакі та правило комбінування Жанга можуть бути застосовані при класифікуванні гіперспектральних космічних зображень та при вирішенні тематичних завдань.*

Ключові слова: *класифікування зображень, гіперспектральне космічне зображення, правило комбінування Ягера, правило Інагакі, правило комбінування Жанга.*

Аннотация. *Решение различных научных задач с использованием гиперспектральных космических изображений, как правило, включает процедуру классификации. Данная процедура является одной из наиболее важных процедур в дистанционном зондировании. При этом наиболее точные результаты дают методы контролированной классификации. Важная информация поступает из разных спектральных каналов. Процес решения различных научных, экологических и практических задач с использованием гиперспектральных космических изображений всегда включает процедуру классификации. В данной статье были рассмотрены методы классификации изображений. Данные методы основаны на теории свидетельств и могут применяться к гиперспектральным и многоспектральным изображениям. Также комбинирование конфликтных частей свидетельства является одной из наиболее сложных задач. Были рассмотрены такие правила комбинирования: правило Ягера, правило Инагаки и правило комбинирования Жанга. Было показано, что данные правила комбинирования работают с неточной, неполной и неопределенной информацией. Правило Ягера присваивает массы пересечений конфликтных множеств, что в пересечении дают пустое множество, базовому множеству. Ненулевая масса пустого множества в основном распределяется среди элементов фрейма различия. Но взаимосвязь между свидетельствами не учитывается. Правило комбинирования Жанга учитывает пересечение множеств. Данное правило определяет меру пересечения множеств. Данная мера определяется как отношение мощности пересечения двух множеств к произведению мощностей данных множеств. Правило комбинирования Инагаки дает специальную формулу для вычисления базовых масс. Было отмечено, что правило Инагаки является обобщением правила Демпстера и правила Ягера. В работе были проанализированы*

© Альперт С.І., 2019

основные преимущества данных методов. Были рассмотрены примеры использования данных правил комбинирования и подсчета базовых масс. Правило комбинирования Ягера, правило Инагаки и правило комбинирования Жанга могут применяться при классификации гиперспектральных космических изображений и при решении тематических заданий.
Ключевые слова: *классификация изображений, гиперспектральное космическое изображение, правило комбинирования Ягера, правило Инагаки, правило комбинирования Жанга.*

Abstract. *Solution of different scientific problems using hyperspectral satellite images, generally includes a classification procedure. It is one of the most important procedures used in remote probing. The most accurate results can be provided with the help of controlled classification methods. Important information is obtained from different spectral channels. The process of solution of different scientific, ecological and practical problems using hyperspectral satellite images always includes a procedure of image classification. Image classification methods were considered in the paper. These methods are based on the theory of evidence and they can be applied to hyperspectral and multispectral satellite images. It was noted, that combination of conflicting evidence bodies is one of the most difficult problems.The following combination rules were taken into consideration: Yager's rule, Inagaki's rule and Zhang's combination rule. It was shown, that these combination rules can deal with imprecise, incomplete and vague information. The Yager's rule assigns the masses of intersections of conflicting sets, which create an empty set in the intersection, to the base set. Non-null mass of the empty set is generally distributed among the elements of the frame of discernment. But a correlation among evidences is not taken into account. Zhang's combination rule considers intersection of sets and gives it a certain measure. This measure is defined as the ratio of the power of the intersection of two sets to the product of power of these sets. Inagaki's combination rule also provides a special formula for basic masses calculation. It was stated, that Inagaki's rule subsumes both Dempster's rule and Yager's rule. Main advantages of these methods were analyzed in the work. Some usage examples of the given combination rules and basic masses calculation rules are also considered in the work. Yager's combination rule, Inagaki's rule and Zhang's combination rule can be applied in hyperspectral satellite images classification and in the solution of thematic tasks.*
Keywords: *image classification, hyperspectral satellite image, Yager's combination rule, Inagaki's rule, Zhang's combination rule.*

1. Вступ

Процес розв'язку актуальних наукових та практичних задач із використанням гіперспектральних космічних зображень, як правило, включає в себе досить багато логіко-обчислювальних процедур, найголовнішою з яких є процедура класифікування. Часто вхідна інформація, яка необхідна для проведення класифікування, є неповною, неточною, суперечливою і надходить від різних джерел (спектральних каналів). Тому актуальною задачею залишається розробка ефективних методів комбінування даних, отриманих від різних експертів та джерел [1–3].

Мета даної статті полягає в аналізі та порівнянні таких правил комбінування даних, як правило комбінування Ягера, правило Жанга та правило комбінування Інагакі, яке, у свою чергу, є узагальненням правила комбінування Ягера та правила комбінування Демпстера. Також у статті будуть детально описані числові приклади застосування даних правил комбінування.

У роботі буде показано, що правило Ягера може працювати за наявності суперечливих джерел інформації та досить великого значення коефіцієнта конфліктності.

Також буде наголошено на тому, що правило Жанга, на відміну від інших правил комбінування, враховує міру перетину множин, що, у свою чергу, дає більш точні результати при розв'язанні задач класифікування.

Слід зауважити, що запропоновані методи можуть бути використані при розв'язанні різноманітних природно-ресурсних, сільськогосподарських та тематичних задач.

2. Основні положення

Теорія свідчень є узагальненням теорії ймовірностей. У теорії свідчень основним поняттям є поняття “маси”, яке є узагальненням класичного поняття ймовірності. “Маса” може ефективно описати незнання та відокремити поняття відсутності довіри від недовіри, тобто “маса” є мірою довіри до пов’язаної з нею гіпотези [4–5].

Сукупність вихідних гіпотез відносно стану об’єкта та всі можливі їх сполучення утворюють множину θ, яка називається “основою аналізу” (frame of discernment).

Якщо число базових гіпотез рівно Q, то загальна кількість підмножин у θ складає величину 2^Q (сюди входять пуста множина Ø і сама множина θ).

Нехай A_0 – обмежена множина, а A_i $(i = 1, 2, ...)$ – його підмножини, тоді базова маса (базова ймовірність) визначається через функцію m:

$$\begin{cases} m(\varnothing) = 0, \\ \sum\limits_{A_i \subseteq A_0} m(A_i) = 1, \ (i = 0, 1, 2, ...). \end{cases} \tag{1}$$

Слід зауважити, що будь-яка підмножина A, для якої $m(A) > 0$, називається фокальним елементом (focal set).

3. Правило комбінування Ягера

Розглянемо правило комбінування Ягера, яке так само, як і правило Демпстера, припускає, що $m(\varnothing) = 0,$ але, на відміну від правила комбінування Демпстера, не відносить комбіновані базові маси пустих перетинів фокальних елементів до пустої множини і не проводить процедуру їх нормалізації, а використовує ступені незнання [6–12].

Базова маса за правилом Ягера визначається таким чином:

$$m(A) = \sum_{B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n = A} \prod_{1 \le i \le n} m_i(B_i), \ A \ne \varnothing, \theta, \tag{2}$$

де θ – основа аналізу (базова множина, фрейм розрізнення), сукупність вихідних гіпотез відносно стану об’єкта та всі можливі їх сполучення.

$$m(\theta) = \sum_{B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n = \theta} \prod_{1 \le i \le n} m_i(B_i) + K, \tag{3}$$

де

$$K = \sum_{B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n = \varnothing} \prod_{1 \le i \le n} m_i(B_i). \tag{4}$$

Основна ідея правила комбінування Ягера полягає у наданні маси перетинів конфліктних множин, що в перетині дають пусту множину базовій множині. Тобто ненульова маса пустої множини в основному розподіляється серед елементів базової множини. K означає масу, яка надається базовій множині після процедури комбінування. При цьому правило Ягера використовує інформацію про конфлікт та незнання тільки при обчисленні базових мас множини. Також слід зазначити, що при комбінуванні неконфліктних свідчень, коли $K = 0,$ правило Ягера буде співпадати з правилом Демпстера.

Правило Ягера може працювати з суперечливими джерелами інформації, але воно має певний недолік: дане правило не враховує кореляцію між різними джерелами інформації (спектральними каналами) [13–14].

Приклад

Розглянемо на прикладі застосування методу комбінування Ягера. Нехай маємо два джерела свідчень, тобто два спектральних канали та три гіпотези $\theta = \{B, F, W\}$.

Гіпотеза B означає, що полігон належить до класу "Забудови".

Гіпотеза F означає, що полігон належить до класу "Ліс".

Гіпотеза W означає, що полігон належить до класу "Вода".

У даному прикладі основа аналізу (фрейм розрізнення) включає в себе три елементи $\theta = \{B, F, W\}$. На основі першого джерела свідчень призначені такі базові маси підмножинам θ:

$$m_1(\{B\}) = 0,6;\ m_1(\{W\}) = 0,2;\ m_1(\{B, F\}) = 0,2.$$

На основі другого джерела свідчень призначені такі базові маси підмножинам θ:

$$m_2(\{W\}) = 0,1;\ m_2(\{B, F\}) = 0,5;\ m_1(\{B, W\}) = 0,4.$$

Тепер всі можливі перетини даних фокальних елементів, отриманих із двох незалежних джерел, відобразимо у вигляді табл. 1.

Таблиця 1 – Комбінування за правилом Ягера

Базові маси m_1 та m_2	$m_1(\{B\})$ 0,6	$m_1(\{W\})$ 0,2	$m_1(\{B, F\})$ 0,2
$m_2(\{W\})$ 0, 1	$\varnothing$ 0,06	$\{W\}$ 0,02	$\varnothing$ 0,02
$m_2(\{B, F\})$ 0,5	$\{B\}$ 0,3	$\varnothing$ 0,1	$\{B, F\}$ 0,1
$m_2(\{B, W\})$ 0,4	$\{B\}$ 0,24	$\{W\}$ 0,08	$\{B\}$ 0,08

Тепер за правилом Ягера розрахуємо комбіновані значення мас для перетинів фокальних елементів основи аналізу θ:

$m(\{B\}) = 0,6 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,4 = 0,62$ – базова ймовірність того, що полігон належить класу "Забудови";

$m(\{W\}) = 0,2 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,4 = 0,1$ – базова ймовірність того, що полігон належить класу "Вода";

$m(\{B, F\}) = 0,2 \cdot 0,5 = 0,1$ – базова ймовірність того, що полігон належить до класу "Забудови" або до класу "Ліс";

$$m(\{\varnothing\}) = 0,6 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,1 = 0,18.$$

Звідси, застосовуючи правило Ягера, ми отримуємо результат, де найбільш вірогідним є те, що полігон належить класу "Забудови", оскільки базова ймовірність приналежності саме до цього класу є максимальною.

4. Правило комбінування Жанга

Правило комбінування Жанга враховує ступінь перетину підмножин, які визначені на основі різних груп свідчень і дає оцінку ступеня їх перетину [15–17]:

$$r(X_1, X_2) = \frac{|X|}{|X_1||X_2|} = \frac{|X_1 \cap X_2|}{|X_1||X_2|}, \tag{5}$$

де $X_1 \cap X_2 = X$, $|X|$ – потужність фокального елемента X.

Значення комбінованої базової маси результуючої підмножини визначається таким чином:

$$m(X) = k \cdot \sum_{\substack{X_1, X_2 \in 2^\Omega \\ X_1 \cap X_2 = X}} \left[r\left(X_1, X_2\right) m_1(X_1) m_2(X_2) \right] = k \cdot \sum_{\substack{X_1, X_2 \in 2^\Omega \\ X_1 \cap X_2 = X}} \left[\frac{|X|}{|X_1||X_2|} m_1(X_1) m_2(X_2) \right], \qquad (6)$$

де k – константа нормалізації.

Слід зазначити, що існують інші способи обчислення значення ступеня перетину підмножин, наприклад:

$$r\left(X_1, X_2\right) = \frac{|X_1 \cap X_2|}{|X_1 \cup X_2|}. \qquad (7)$$

Зауважимо, що у випадку, коли $|X| = |X_1||X_2|$, правило комбінування Жанга відповідає правилу комбінування Демпстера.

Приклад

Нехай основа аналізу включає в себе п'ять елементів $\theta = \{F, B, G, D, E\}$.

Гіпотеза F означає, що полігон належить до класу “Поля”.

Гіпотеза B означає, що полігон належить до класу “Забудови”.

Гіпотеза G означає, що полігон належить до класу “Зелені насадження”.

Гіпотеза D означає, що полігон належить до класу “Листяний ліс”.

Гіпотеза E означає, що полігон належить до класу “Хвойний ліс”.

Тоді на основі першого джерела свідчень надані такі базові маси підмножинам θ:

$$m_1\left(\{F\}\right) = 0{,}1; \; m_1(\{G, D\}) = 0{,}25; \; m_1(\{G\}) = 0{,}25; \; m_1(\{F, B\}) = 0{,}4.$$

На основі другого джерела свідчень надані такі базові маси підмножинам θ:

$$m_2(\{G, D\}) = 0{,}2; \; m_2(\{F, B\}) = 0{,}3; \; m_2(\{B, D\}) = 0{,}1; \; m_2(\{F, G\}) = 0{,}1; \; m_2(\{F, E\}) = 0{,}3.$$

Тоді всі можливі перетини фокальних елементів із двох незалежних джерел відобразимо у вигляді табл. 2.

Таблиця 2 – Дані, отримані з двох джерел, та їх перетини

Базові маси m_1 та m_2	$m_1(\{F\})$	$m_1(\{F, B\})$	$m_1(\{G\})$	$m_1(\{G, D\})$
$m_2(\{F, B\})$	$\{F\}$	$\{F, B\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
$m_2(\{F, G\})$	$\{F\}$	$\{F\}$	$\{G\}$	$\{G\}$
$m_2(\{F, E\})$	$\{F\}$	$\{F\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
$m_2(\{B, D\})$	$\varnothing$	$\{B\}$	$\varnothing$	$\{D\}$
$m_2(\{G, D\})$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{G\}$	$\{G, D\}$

Розраховуємо комбіновані значення базових мас для перетинів фокальних елементів основи аналізу θ за правилом комбінування Жанга.

Спочатку оцінимо потужності (кількості елементів) вихідних підмножин:

$$|\{F\}| = 1;$$
$$|\{F,B\}| = 2;$$
$$|\{F,G\}| = 2;$$
$$|\{F,E\}| = 2;$$
$$|\{B,D\}| = 2;$$
$$|G| = 1;$$
$$|\{G,D\}| = 2.$$

Тепер розраховуємо потужності всіх непустих перетинів фокальних підмножин:

$$|\{F\}| = 1;$$
$$|\{F,B\}| = 2;$$
$$|\{G\}| = 1;$$
$$|\{D\}| = 1;$$
$$|\{B\}| = 1;$$
$$|\{G,D\}| = 2.$$

Знаходимо значення ступенів перетину відповідних підмножин:

$$r(\{F\},\{F,B\}) = \frac{|\{F\}\cap\{F,B\}|}{|\{F\}||\{F,B\}|} = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2};$$
$$r(\{F,B\},\{F,B\}) = \frac{2}{2\cdot 2} = \frac{1}{2};$$
$$r(\{F\},\{F,E\}) = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2};$$
$$r(\{F,B\},\{F,G\}) = \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{4};$$
$$r(\{F,B\},\{B,D\}) = \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{4};$$
$$r(\{G\},\{G,D\}) = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2};$$
$$r(\{G,D\},\{B,D\}) = \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{4};$$
$$r(\{F\},\{F,G\}) = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2};$$
$$r(\{F,B\},\{F,E\}) = \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{4};$$
$$r(\{G\},\{F,G\}) = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2};$$
$$r(\{G,D\},\{F,G\}) = \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{4};$$
$$r(\{G,D\},\{G,D\}) = \frac{2}{2\cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

Розраховуємо проміжні базові маси за правилом комбінування Жанга:

$$m\left(\{F\}\right)=\frac{1}{2}\cdot 0,1\cdot 0,3+\frac{1}{2}\cdot 0,1\cdot 0,1+\frac{1}{4}\cdot 0,4\cdot 0,1+\frac{1}{2}\cdot 0,1\cdot 0,3+\frac{1}{4}\cdot 0,4\cdot 0,3=0,075;$$

$$m\left(\{B\}\right)=\frac{1}{4}\cdot 0,4\cdot 0,1=0,01;$$

$$m\left(G\right)=\frac{1}{2}\cdot 0,25\cdot 0,1+\frac{1}{4}\cdot 0,25\cdot 0,1+\frac{1}{2}\cdot 0,25\cdot 0,2=0,04375;$$

$$m\left(\{D\}\right)=\frac{1}{4}\cdot 0,25\cdot 0,1=0,00625;$$

$$m\left(\{F,B\}\right)=\frac{1}{2}\cdot 0,4\cdot 0,3=0,06;$$

$$m\left(\{G,D\}\right)=\frac{1}{2}\cdot 0,25\cdot 0,2=0,025.$$

Тепер розраховуємо суму усіх отриманих на попередньому кроці результуючих базових мас:

$$m\left(\{F\}\right)+m\left(\{B\}\right)+m\left(G\right)+m\left(\{D\}\right)+m\left(\{F,B\}\right)+m\left(\{G,D\}\right)=$$
$$=0,075+0,01+0,04375+0,00625+0,06+0,025=0,22.$$

Покладемо, що константа нормалізації K знаходиться таким чином: $K=\dfrac{1}{0,22}=4,5455.$

Тобто для знаходження константи нормалізації одиницю поділимо на суму усіх отриманих результуючих базових мас.

Для розрахунку остаточних базових мас треба проміжні базові маси, отримані на попередньому кроці, помножити на константу нормалізації K.

Звідси маємо:

$$m^*\left(\{F\}\right)=0,075\cdot 4,5455=0,3409;$$
$$m^*\left(\{B\}\right)=0,01\cdot 4,5455=0,0455;$$
$$m^*\left(G\right)=0,04375\cdot 4,5455=0,1989;$$
$$m^*\left(\{D\}\right)=0,00625\cdot 4,5455=0,0284;$$
$$m^*\left(\{F,B\}\right)=0,06\cdot 4,5455=0,2727;$$
$$m^*\left(\{G,D\}\right)=0,025\cdot 4,5455=0,1136.$$

5. Правило комбінування Інагакі

Правило комбінування Інагакі для будь-якої непустої підмножини $X=X_1\cap X_2$ має вигляд

$$m_k(X)=\left[1+kq(\varnothing)\right]\cdot q(X),\quad X\neq\Omega,\ \varnothing, \tag{8}$$

де
$$q(X)=\sum_{\substack{X_1,X_2\in 2^\Omega\\ X_1\cap X_2=X}} m_1(X_1)m_2(X_2); \tag{9}$$

$q(\varnothing)$ – базова маса ймовірності по всіх пустих перетинах фокальних елементів;

k – параметр для нормалізації, який задовольняє такій умові:

$$0 \le k \le \frac{1}{1-q(\varnothing)-q(\Omega)}. \tag{10}$$

Якщо $X=\Omega,$ то тоді маємо

$$m_k(\Omega)=\left[1+kq(\varnothing)\right]q(\Omega)+\left[1+kq(\varnothing)-\mathrm{k}\right]q(\varnothing), \tag{11}$$

де $q(\Omega)$ – функція базових мас імовірності по всіх непустих перетинах фокальних елементів.

Слід зазначити, що в залежності від значення коефіцієнта k можуть враховуватися чи не враховуватися конфлікти на множині гіпотез. При $k=0$ правило комбінування Інагакі співпадає з правилом комбінування Ягера. При $k=\frac{1}{1-q(\varnothing)}$ правило Інагакі співпадає з правилом комбінування Демпстера [18–19].

Приклад

Нехай основа аналізу включає в себе такі елементи: $\theta=\{F,B,G\}$.

Гіпотеза F означає, що полігон належить до класу “Ліс”.

Гіпотеза B означає, що полігон належить до класу “Забудови”.

Гіпотеза G означає, що полігон належить до класу “Зелені насадження”.

Тоді на основі першого джерела свідчень надані такі базові маси підмножинам θ:

$$m_1(\{F\})=0,2,\ m_1(\{G\})=0,5,\ m_1(\{F,B\})=0,3.$$

На основі другого джерела свідчень надані такі базові маси підмножинам θ:

$$m_2(\{G\})=0,1,\ m_2(\{F,B\})=0,6,\ \ m_2(\{F,G\})=0,3.$$

Тоді всі можливі перетини фокальних елементів із двох незалежних джерел відобразимо у вигляді табл. 3.

Таблиця 3 – Дані, отримані із двох джерел, та їх перетини

Базові маси m_1 та m_2	$m_1(\{F\})$ 0,2	$m_1(\{G\})$ 0,5	$m_1(\{F,B\})$ 0,3
$m_2(\{G\})$ 0,1	$\varnothing$ 0,02	$\{G\}$ 0,05	$\varnothing$ 0,03
$m_2(\{F,B\})$ 0,6	$\{F\}$ 0,12	$\varnothing$ 0,3	$\{F,B\}$ 0,18
$m_2(\{F,G\})$ 0,3	$\{F\}$ 0,06	$\{G\}$ 0,15	$\{F\}$ 0,09

Розрахуємо комбіновані значення базових мас для перетинів фокальних елементів основи аналізу θ за правилом Інагакі при таких значеннях нормалізуючої константи:

$$k:\ 0;\ 1;\ 1,5385;\ 2.$$

Спочатку комбінуємо базові маси:

$m(\{F\})=0,2\cdot 0,6+0,2\cdot 0,3+0,3\cdot 0,3=0,27$ – базова ймовірність того, що полігон належить класу “Ліс”;

$m(\{G\})=0,5\cdot 0,1+0,5\cdot 0,3=0,2$ – базова ймовірність того, що полігон належить класу “Зелені насадження”;

$m(\{F,B\}) = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18$ – базова ймовірність того, що полігон належить до класу "Ліс" або до класу "Забудови";

$m(\{\varnothing\}) = q(\{\varnothing\}) = 0,2 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,1 = 0,35$ – сума базових мас для пустих перетинів фокальних елементів.

Тепер застосуємо правило Інагакі:

1) $k = 0$:

$$m^1(\{F\}) = [1 + 0 \cdot 0,35] \cdot 0,27 = 0,27;$$
$$m^1(\{G\}) = [1 + 0 \cdot 0,35] \cdot 0,2 = 0,2;$$
$$m^1(\{F,B\}) = [1 + 0 \cdot 0,35] \cdot 0,18 = 0,18.$$

У даному випадку отримані результати співпадають з результатами комбінування за правилом Ягера.

2) $k = 1$:

$$m^2(\{F\}) = [1 + 1 \cdot 0,35] \cdot 0,27 = 0,3645;$$
$$m^2(\{G\}) = [1 + 1 \cdot 0,35] \cdot 0,2 = 0,27;$$
$$m^2(\{F,B\}) = [1 + 1 \cdot 0,35] \cdot 0,18 = 0,243.$$

Як ми бачимо, сума отриманих комбінованих мас буде $m^2(\{F\}) + m^2(\{G\}) + m^2(\{F,B\}) = 0,8775 < 1$, оскільки взяте значення нормалізуючої константи $k = 1 < \dfrac{1}{1-q(\varnothing)} = \dfrac{1}{1-0,35} = 1,5385$.

3) $k = \dfrac{1}{1-q(\varnothing)} = \dfrac{1}{1-0,35} = 1,5385$:

$$m^3(\{F\}) = [1 + 1,5385 \cdot 0,35] \cdot 0,27 = 0,4154;$$
$$m^3(\{G\}) = [1 + 1,5385 \cdot 0,35] \cdot 0,2 = 0,3077;$$
$$m^3(\{F,B\}) = [1 + 1,5385 \cdot 0,35] \cdot 0,18 = 0,2769.$$

Отримані результати співпадають з результатами комбінування за правилом Демпстера, яке задається таким чином:

$$m(A_k) = \frac{\sum\limits_{A_{1i} \cap A_{2j} = A_k} m_1(A_{1i}) m_2(A_{2j})}{1-C},$$

де $C = q(\varnothing) = \sum\limits_{A_{1i} \cap A_{2j} = \varnothing} m_1(A_{1i}) m_2(A_{2j})$ – коефіцієнт конфліктності;

$C \in [0,1]$.

Тобто, якщо значення $k = \dfrac{1}{1-q(\varnothing)}$ підставимо у формулу (8) для обчислення комбінованих базових мас за правилом Інагакі, то отримуємо формулу для знаходження комбінованих базових мас за правилом Демпстера:

$$m_k(X) = [1 + kq(\varnothing)] \cdot q(X) = \left[1 + \frac{1}{1 - q(\varnothing)} \cdot q(\varnothing)\right] \cdot q(X) = \left[\frac{1 - q(\varnothing) + q(\varnothing)}{1 - q(\varnothing)}\right] \cdot q(X) =$$

$$= \left[\frac{1}{1 - q(\varnothing)}\right] \cdot q(X) = \left[\frac{1}{1 - C}\right] \cdot q(X), \quad X \neq \Omega,\ \varnothing.$$

Тобто у даному випадку формула для обчислення комбінованих мас за правилом Інагакі співпадає з формулою для обчислення комбінованих мас за правилом Демпстера.

4) $k = 2$:

$$m^4\left(\{F\}\right) = [1 + 2 \cdot 0,35] \cdot 0,27 = 0,459;$$

$$m^4\left(\{G\}\right) = [1 + 2 \cdot 0,35] \cdot 0,2 = 0,34;$$

$$m^4\left(\{F, B\}\right) = [1 + 2 \cdot 0,35] \cdot 0,18 = 0,306.$$

Як ми бачимо, сума отриманих комбінованих мас буде $m^2\left(\{F\}\right) + m^2\left(\{G\}\right) + m^2\left(\{F, B\}\right) = 1,105 > 1,$ оскільки взяте значення нормалізуючої константи $k = 2$ більше, ніж $k = \frac{1}{1 - q(\varnothing)} = \frac{1}{1 - 0,35} = 1,5385.$

6. Висновки

У даній статті було показано, що при розв'язанні задач класифікування часто використовуються дані, отримані з різних джерел, тому важливою залишається процедура об'єднання інформації, отриманої з різних спектральних каналів. У роботі були розглянуті такі правила комбінування: правило комбінування Ягера, правило Жанга та правило комбінування Інагакі [20–21].

Було показано, що правило Ягера, на відміну від інших правил комбінування, полягає у наданні маси перетинів конфліктних множин, що в перетині дають пусту множину, базовій множині. Тобто при застосуванні даного правила ненульова маса пустої множини розподіляється серед елементів базової множини (фрейму розрізнення). Також при комбінуванні неконфліктних свідчень, при нульовому значенні коефіцієнта конфліктності, правило Ягера буде співпадати з правилом Демпстера. Описане правило Ягера може працювати з суперечливими джерелами інформації, але воно не враховує асоціативний зв'язок між свідченнями, отриманими з різних джерел.

Було наголошено на тому, що правило Жанга враховує міру перетину множин, яка визначається як відношення потужності перетину двох множин до добутку потужностей даних множин. Також були описані умови, за яких правило комбінування Інагакі збігається з правилом комбінування Ягера та правилом комбінування даних Демпстера. Наводилася формула розрахунку комбінованих мас за даним правилом. Зазначалося, що правило Інагакі є певним узагальненням правил комбінування Ягера та Демпстера.

У статті були наведені приклади обчислення комбінованих базових мас за правилами комбінування Ягера, Жанга та Інагакі.

Запропоновані методи комбінування даних, отриманих із різних джерел, можуть бути використані при класифікуванні лісів, сільськогосподарських земель, урбанізованих територій, при пошуку корисних копалин та при оцінюванні екологічного стану навколишнього середовища.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Аковецкий В.И. Дешифрирование снимков. М.: Недра, 1983. 320 с.
2. Кузнецов А.В., Мясников В.В. Сравнение алгоритмов управляемой поэлементной классификации гиперспектральных изображений. *Компьютерная оптика*. 2014. Т. 38, № 3. С. 494–502.
3. Лурье И.К., Косиков А.Г. Теория и практика цифровой обработки изображений. М.: Научный мир, 2003. 356 с.
4. Chang C.I. Hyperspectral Data Processing: Algorithm Design and Analysis. Hoboken, NJ: John Willey & Sons, 2013. 1164 p.
5. Smets P., Henrion M., Shachter R.D., Kanal L.N., Lemmer J.F. Constructing the pignistic probability function in a context of uncertainty. *Uncertainty in Artificial Intelligence*. North Holland, Amsterdam. 1990. Vol. 5. P. 29–40.
6. Yager R. On the Dempster-Shafer Framework and New Combination Rules. *Information Sciences.* 1987. N 41. P. 93–137.
7. Gong P. Integrated Analysis of Spatial Data from Multiple Sources: Using Evidential Reasoning and Artificial Neural Network Techniques for Geological Mapping. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing.* 1996. Vol. 62, N 5. P. 513–523.
10. Попов М., Станкевич С. Методы оптимизации числа спектральных каналов в задачах обработки и анализа данных дистанционного зондирования Земли. *Современные проблемы дистанционного зондирования земли из космоса*. М.: ИКИ РАН, 2006. Т. 2, № 1. С. 61–63.
11. Renyi A. Probability theory. Amsterdam: North-Holland Pub. Co, 1970. 670 p.
12. Альперт С.І. Оцінка точності класифікації космічних зображень на основі теорії Демпстера-Шафера. *Історія розвитку науки, техніки та освіти:* зб. праць XI-ої міжнар. молодіжної наук.-практ. конф. (Київ, 25 квітня 2013 р.). Київ, 2013. С. 242–245.
13. Альперт С.І. Новий підхід до застосування основних мір близькості та методу Роккіо при вирішенні задач класифікування. *Астрономічна школа молодих вчених*: зб. праць XX-ої міжнар. наук. конф. (Умань, 23–24 травня 2018 р.). Умань, 2018. С. 120–121.
14. Альперт С.І. Удосконалений метод комбінування даних на основі теорії Демпстера-Шейфера за наявності суперечливих даних. *Математичні машини і системи*. 2018. № 2. С. 33–39.
15. Zhang L., Yager R.R., Kacprzyk J., Fedrizzi M. Representation, independence, and combination of evidence in the Dempster-Shafer theory. Advances in the Dempster-Shafer Theory of Evidence. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1994. P. 51–69.
16. Гарбук С., Гершензон В. Космические системы дистанционного зондирования Земли. М.: Изд-во А и Б, 1997. 296 с.
17. Альперт С.І. Новий удосконалений підхід до комбінування даних на основі теорії Демпстера-Шейфера. *Ідеї та новації в системі наук про Землю*: зб. матеріалів VII-ої Всеукр. молодіжної наук. конф. (Київ, 25–27 жовтня 2017 р.). Київ, 2017. С. 26–27.
18. Inagaki T. Interdependence between Safety-Control Policy and Multiple-Sensor Schemes Via Dempster-Shafer Theory. *IEEE Transactions on Reliability*. 1991. Vol. 40, N 2, P. 182–188.
20. Shafer G. A Mathematical Theory of Evidence. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1976. P. 875–883.
21. Альперт С.І. Новий модифікований метод класифікування гіперспектральних космічних зображень на основі теорії Демпстера-Шейфера. *Історія розвитку науки, техніки та освіти*: зб. праць XV-ої міжнар. молодіжної наук.-практ. конф. (Київ, 13 квітня 2017 р.). Київ, 2017. С. 97–99.

Стаття надійшла до редакції 06.02.2019