the algorithm is formed on the basis of the conclusions of Theorems 3 and 4 according to the formulas given there.

Theorems 3 and 4 are generalizations of Theorem 1 and Theorem 2 of [5]. These theorems make it possible to analyze and eliminate the various uncertainties connected with continuously differentiable functions. The conclusions of these theorems make it possible to substantially reduce the two-sided approximations of the Cauchy problem solution (1)–(2) and of the boundary problem solution (3)–(5). Therefore, these conclusions can be interpreted as concretization and generalization of the theorem on the average function and its derivative.

The proposed algorithms construct functional intervals of the problem solution with any desired small (as you wish) width.

Key words: *Cauchy problem, boundary value problem, interval, functional interval, two-sided approximation, spline.*

Отримано: 21.05.2018

УДК 517.944

С. Г. Хома-Могильська*, канд. фіз.-мат. наук,
В. З. Чорний,** канд. фіз.-мат. наук

*Тернопільський національний економічний університет, м. Тернопіль,
**Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль

ДОСЛІДЖЕННЯ Т-ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

Як показано в багатьох класичних підручниках з теорії звичайних диференціальних рівнянь, щоб існував T-періодичний розв'язок рівняння $Lu = f(x, t, u)$, потрібно, щоб права частина рівняння $f(x, t, u)$ була T-періодичною по t, тобто $f(x, t+T, u) = f(x, t, u)$. Зауважимо, що не кожне рівняння при такій умові може мати T-періодичний розв'язок. Прикладом такого твердження є звичайне диференціальне рівняння $dx / dt = sin^2 t$, розв'язок якого не є періодичним. Для дослідження існування T-періодичних розв'язків звичайних диференціальних рівнянь та їх систем А. М. Самойленком був розроблений чисельно-аналітичний метод побудови T-періодичних розв'язків звичайних диференціальних рівнянь і систем. Результати, одержані А. М. Самойленко, були використані для дослідження T-періодичних розв'язків багатьох нових класів звичайних диференціальних рівнянь і навіть захопили задачу Гурса для рівнянь у частинних похідних. Зазначимо, що крайові T-періодичні задачі для більш загального диференціального рівняння у частинних похідних не були досліджені аналітичним методом. Вперше у даній роботі нами показано методику дослідження T-періодичних розв'язків крайової T-періо-

дичної задачі для більш загального диференціального рівняння у частинних похідних $\partial^2 u / \partial t^2 - a^2 \partial^2 u / \partial x^2 = f(x, t, u, u_t, u_x)$. Використано таке просте твердження: функція $K(x, t)$, визначена через інтеграл з межами від $t - b$ до $t + b$, для кожної T-періодичної по τ функції $g(x, \tau)$, тобто $g(x, \tau + T) = g(x, \tau)$, є також T-періодична по t. Знайдена формула автоматично задовольняє крайові та T-періодичні умови: $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, t + T) = u(x, t)$, $0 \le x \le \pi$, $t \in \mathbf{R}$. Одержані в даній роботі результати можна використовувати для дослідження багатьох класів диференціальних рівнянь у частинних похідних гіперболічного типу.

Ключові слова: *T-періодичний розв'язок, крайова T-періодична задача, оператор, гіперболічне рівняння другого порядку.*

Вступ. Розвинутий А. М. Самойленком [1] метод відшукання T-періодичних розв'язків звичайних диференціальних систем першого порядку $\dfrac{dx}{dt} = f(t, x)$ знайшов широке застосування і обґрунтування для різного класу диференціальних рівнянь як звичайних, так і у частинних похідних. Вказане обґрунтування здійснювалося на доведених властивостях оператора А. М. Самойленка, який переводить T-періодичну функцію $f(t)$ в T-періодичну функцію за формулою

$$x(t) = \int_0^t \left(f(\tau) - \frac{1}{T} \int_0^T f(s)\, ds \right) d\tau \equiv \int_0^t f(\tau) d\tau - \frac{t}{T} \int_0^T f(s)\, ds .$$

Саме ця властивість дозволила розширити цей метод на різні класи звичайних диференціальних рівнянь, так і рівнянь у частинних похідних [1].

Однак для рівнянь гіперболічного типу другого порядку вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t, u, u_t, u_x) \tag{1}$$

аналітичного методу відшукання T-періодичних розв'язків по змінній t до даного часу не існує. Крім як використання тригонометричних рядів Фур'є вигляду

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin kx ,$$

якщо розглядається така крайова T-періодична задача:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t, u), \ 0 < x < \pi, \ t \in \mathbf{R}, \tag{2}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \ t \in \mathbf{R}, \tag{3}$$

$$u(x, t + T) = u(x, t), \ 0 \le x \le \pi, \ t \in \mathbf{R}. \tag{4}$$

Слід сказати, що вперше таку задачу при $T = 2\pi$ розглянуто П. Рабіновичем у роботі [3] для рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varepsilon F(x,t,u)\,, \tag{5}$$

де ε — малий параметр. У даній роботі [3] доведено твердження: якщо права частина достатньо гладка відносно аргументів (x, t, u), то крайова $T = 2\pi$-періодична задача (5), (3), (4) для достатньо малого параметра ε ($0 < \varepsilon < 1$) має єдиний класичний розв'язок, який має вигляд $u(x,t) = u^0(x,t) + \varepsilon w(x,t)$, де $u^0(x,t)$ — розв'язок однорідної крайової задачі $\frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} = 0$, $u^0(0,t) = u^0(\pi,t) = 0$, $u^0(x,t+T) = u^0(x,t)$, $0 \le x \le \pi$, $t \in \mathbf{R}$, а $w(x, t)$ — частинний класичний розв'язок задачі (5), (3), (4).

Нами на основі розроблених операторів S_{a_1} і S_{a_2} [2, с. 26, формули (9.6), (9.8)] доведено один спосіб відшукання T-періодичних по t розв'язків $u(x, t)$ рівняння (1).

Основні позначення. Введемо такі позначення: C_π — простір функцій двох змінних x і t, неперервних і обмежених на $[0, \pi]\times\mathbf{R}$. $C_\pi^{k,l}$ — простір функцій $u \in C_\pi$ таких, що $D_t^k D_x^l\, u \in C_\pi$. $G_{\pi\, t}$ — простір функцій двох змінних x і t, неперервних і обмежених на $[0, \pi]\times\mathbf{R}$ разом із похідною по t. Q_T — простір функцій $g(x, t)$, які задовольняють на $[0, \pi]\times\mathbf{R}$ співвідношення $g(x, t + T) = g(x, t)$. $L(X,Y)$ — простір лінійних і обмежених відображень X в Y.

$$A_2 = \{g : g(x,t) = g(\pi - x, t + \pi) = g(x, t + 2\pi)\}.$$

$\mathbf{R}$ — множина дійсних чисел.

$$\alpha\,(x,t,\xi) = t + \frac{x-\xi}{a}.$$

$$\beta\,(x,t,\xi) = t - \frac{x-\xi}{a}.$$

$$\gamma\,(x,\xi) = \frac{x-\xi}{a}.$$

a — число.

Основний результат. Розглянемо ряд таких функцій:

$$u_1^a(x,t) = \left(S_{a_1} g\right)(x,t) \equiv -\frac{1}{2a}\int_0^x d\xi \int_{t-\gamma(x,\xi)}^{t+\gamma(x,\xi)} g(\xi,\tau)\,d\tau\,; \tag{6}$$

$$u_2^a(x,t) = \left(S_{a_2} g\right)(x,t) \equiv -\frac{1}{2a}\int\limits_x^{\pi} d\xi \int\limits_{t+\gamma(x,\xi)}^{t-\gamma(x,\xi)} g(\xi,\tau)\,d\tau\,; \qquad (7)$$

або

$$u_2^a(x,t) = -\frac{1}{2a}\int\limits_{\pi}^{x} d\xi \int\limits_{t-\gamma(x,\xi)}^{t+\gamma(x,\xi)} g(\xi,\tau)\,d\tau, \quad 0 \le x \le \pi\,,\ t \in \mathbf{R}\,. \qquad (7^*)$$

Справедливими є твердження.

Теорема 1. Якщо $g \in G_{\pi\, t} \bigcap Q_T$, то функція $u_1^a(x,t)$ є T-періодичним по t частинним класичним розв'язком неоднорідного рівняння

$$\frac{\partial^2 u_1^a}{\partial t^2} - a^2\,\frac{\partial^2 u_1^a}{\partial x^2} = g(x,t)\,,\ 0 \le x \le \pi\,,\ t \in \mathbf{R}\,. \qquad (8)$$

Доведення. Обчислимо частинні похідні першого і другого порядків від функції $u_1^a(x,t)$. На підставі формули (6) одержуємо

$$\frac{\partial u_1^a(x,t)}{\partial x} = -\frac{1}{2a}\int\limits_0^x \left\{ g\left(\xi, t+\frac{x-\xi}{a}\right)\cdot\frac{1}{a} + g\left(\xi, t-\frac{x-\xi}{a}\right)\cdot\frac{1}{a} \right\} d\xi =$$

$$= -\frac{1}{2a^2}\int\limits_0^x \left\{ g\left(\xi, t+\frac{x-\xi}{a}\right) + g\left(\xi, t-\frac{x-\xi}{a}\right) \right\} d\xi\,;$$

Скористаємося позначеннями

$$\alpha\,(x,t,\,\xi) = t + \frac{x-\xi}{a}\,;\ \ \beta\,(x,t,\,\xi) = t - \frac{x-\xi}{a}\,.$$

Тоді

$$\frac{\partial^2 u_1^a(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{1}{a^2}\,g(x,t) - \frac{1}{2a^2}\int\limits_0^x \left\{ \frac{\partial g}{\partial \alpha}\cdot\frac{1}{a} - \frac{\partial g}{\partial \beta}\cdot\frac{1}{a} \right\} d\xi\,;$$

$$\frac{\partial u_1^a(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{2a}\int\limits_0^x \left\{ g\left(\xi, t+\frac{x-\xi}{a}\right) - g\left(\xi, t-\frac{x-\xi}{a}\right) \right\} d\xi\,;$$

$$\frac{\partial^2 u_1^a(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{2a}\int\limits_0^x \left\{ \frac{\partial g}{\partial \alpha}\cdot 1 - \frac{\partial g}{\partial \beta}\cdot 1 \right\} d\xi\,.$$

Отже,

$$\frac{\partial^2 u_1^a(x,t)}{\partial t^2} - a^2\,\frac{\partial^2 u_1^a(x,t)}{\partial x^2} = g(x,t)\,.$$

Далі доведемо, що функція $u_1^a(x,t)$ для кожної функції $g \in C_\pi \bigcap Q_T$ — періодичної по t, є також T-періодична по t.

Справді, на основі формули $u_1^a(x,t) = -\frac{1}{2a}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_{t-\gamma(x,\xi)}^{t+\gamma(x,\xi)} g(\xi,\tau)\,d\tau$,

де $\gamma\,(x,\xi) = \frac{x-\xi}{a}$, маємо

$$u_1^a(x,t+T) = -\frac{1}{2a}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_{t+T-\gamma(x,\xi)}^{t+T+\gamma(x,\xi)} g(\xi,\tau)\,d\tau \;.$$

З останньої рівності після виконання заміни $\tau = \theta + T$, $t-\gamma(x,t) \le \theta \le t+\gamma(x,t)$, одержуємо

$$u_1^a(x,t+T) = -\frac{1}{2a}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_{t-\gamma(x,\xi)}^{t+\gamma(x,\xi)} g(\xi,\theta+T)\,d\theta = u_1^a(x,t)$$

що й потрібно було довести.

Теорема 2. Якщо $g \in G_{\pi\, t} \bigcap Q_T$, то функція $u_2^a(x,t)$ є T-періодичним по t частинним класичним розв'язком неоднорідного рівняння

$$\frac{\partial^2 u_2^a}{\partial t^2} - a^2\,\frac{\partial^2 u_2^a}{\partial x^2} = g(x,t)\,,\ 0 \le x \le \pi\,,\ t \in \mathbf{R}\,. \tag{9}$$

Доведення. Обчислимо частинні похідні від функції $u_2^a(x,t)$. Маємо

$$u_2^a(x,t) = -\frac{1}{2a}\int\limits_x^\pi d\xi \int\limits_{t+\frac{x-\xi}{a}}^{t-\frac{x-\xi}{a}} g(\xi,\tau)\,d\tau\,;$$

або

$$u_2^a(x,t) = -\frac{1}{2a}\int\limits_\pi^x d\xi \int\limits_{t-\frac{x-\xi}{a}}^{t+\frac{x-\xi}{a}} g(\xi,\tau)\,d\tau\,.$$

Отже,

$$\frac{\partial u_2^a(x,t)}{\partial x} = -\frac{1}{2a}\int\limits_\pi^x \left(\int\limits_{t-\frac{x-\xi}{a}}^{t+\frac{x-\xi}{a}} g(\xi,\tau)\,d\tau \right)'_x d\xi =$$

$$= -\frac{1}{2a}\int\limits_\pi^x \left\{ g\left(\xi,t+\frac{x-\xi}{a}\right)\cdot\frac{1}{a} + g\left(\xi,t-\frac{x-\xi}{a}\right)\cdot\frac{1}{a} \right\} d\xi\,;$$

$$\frac{\partial^2 u_2^a(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{1}{a^2} g(x,t) - \frac{1}{2a^3}\int_{\pi}^{x}\left\{\frac{\partial g}{\partial \alpha} - \frac{\partial g}{\partial \beta}\right\} d\xi \; ;$$

$$\frac{\partial u_2^a(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{2a}\int_{\pi}^{x}\left\{g\left(\xi, t + \frac{x-\xi}{a}\right)\cdot 1 - g\left(\xi, t - \frac{x-\xi}{a}\right)\cdot 1\right\} d\xi \; ;$$

$$\frac{\partial^2 u_2^a(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{2a}\int_{\pi}^{x}\left\{\frac{\partial g}{\partial \alpha} - \frac{\partial g}{\partial \beta}\right\} d\xi \; .$$

Отже,

$$\frac{\partial^2 u_2^a(x,t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_2^a(x,t)}{\partial x^2} = g(x,t) \, .$$

Аналогічно доводимо, що для кожної функції $g \in C_{\pi} \bigcap Q_T$, функція $u_2^a(x,t)$ — T-періодична по t.

Теорему 2 доведено.

Розглянемо таку функцію:

$$u^a(x,t) = \frac{1}{2}\left(S_{a_1} g + S_{a_2} g\right)(x,t) \equiv \left(S_a g\right)(x,t) \, , \; 0 \le x \le \pi \, , \; t \in \mathbf{R} \, ,$$

або

$$u^a(x,t) = -\frac{1}{4a}\int_0^x d\xi \int_{t-\gamma(x,\xi)}^{t+\gamma(x,\xi)} g(\xi,\tau)\, d\tau - \frac{1}{4a}\int_x^{\pi} d\xi \int_{t+\gamma(x,\xi)}^{t-\gamma(x,\xi)} g(\xi,\tau)\, d\tau \, . \quad (10)$$

Теорема 3. Якщо $g \in G_{\pi\, t} \bigcap Q_T$, то функція

$$u^a(x,t) = \left(S_a g\right)(x,t) \, ,$$

є також T-періодичним по t частинним класичним розв’язком неоднорідного рівняння

$$\frac{\partial^2 u^a}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u^a}{\partial x^2} = g(x,t) \, , \; 0 \le x \le \pi \, , \; t \in \mathbf{R} \, . \quad (11)$$

Доведення теореми 3 випливає з тверджень теорем 1, 2.

Розглянемо таку функцію:

$$\tilde{u}^a(x,t) = \left(S_a g\right)(x,t) + \left(\tilde{S}_a g\right)(x,t) \, , \; 0 \le x \le \pi \, , \; t \in \mathbf{R} \, ,$$

де

$$\left(\tilde{S}_a g\right)(x,t) = \frac{\pi - x}{4\pi a}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t+\gamma(0,\xi)}^{t-\gamma(0,\xi)} g(\xi,\tau)\, d\tau + \frac{x}{4\pi a}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\gamma(\pi,\xi)}^{t+\gamma(\pi,\xi)} g(\xi,\tau)\, d\tau \, .$$

Теорема 4. Для кожної функції $g\,(x,\,t)$ T-періодичної по t, функція $\tilde{u}^a(x,t)$ є T-періодичною по t, тобто $\tilde{u}^a(x,t+T) = \tilde{u}^a(x,t)$, $0 \le x \le \pi$, $t \in \mathbf{R}$.

Доведення очевидне.

Теорема 5. Функція $\tilde{u}^a(x,t)$ задовольняє крайові умови

$$\tilde{u}^a(0,t) = \tilde{u}^a(\pi,t) = 0, \ \ t \in \mathbf{R} .$$

Безпосередньою перевіркою в цьому твердженні переконуємося.
На основі теорем 3, 4 випливає таке твердження.

Теорема 6. Функція $\tilde{u}^a(x,t) \in C_\pi \bigcap Q_T$ задовольняє крайові та періодичні умови такої задачі:

$$\tilde{u}^a_{tt} - a^2 \tilde{u}^a_{xx} = g(x,t), \ 0 < x < \pi \ , \ t \in \mathbf{R} , \tag{12}$$

$$\tilde{u}^a(0,t) = \tilde{u}^a(\pi, t) = 0 \ , \ t \in \mathbf{R} , \tag{13}$$

$$\tilde{u}^a(x, t+T) = \tilde{u}^a(x,t) \ , \ 0 \le x \le \pi \ , \ t \in \mathbf{R} . \tag{14}$$

Зауваження 1. Взагалі кажучи, функція $\tilde{u}^a(x,t)$ не є класичним розв'язком рівняння (1), бо функція $\left(\tilde{S}_a g\right)(x, t)$ не є розв'язком однорідного рівняння $\tilde{u}^a_{tt} - a^2 \tilde{u}^a_{xx} = 0$. Хоча $\dfrac{\partial^2 \left(\tilde{S}_a g\right)(x,t)}{\partial x^2} \equiv 0$, але $\dfrac{\partial^2 \left(\tilde{S}_a g\right)(x,t)}{\partial t^2}$ не для кожної функції $g\,(x, t)$ дорівнює нулеві. Значить потрібні нові дослідження, наприклад, на основі роботи А. М. Самойленка, М. І. Ронто [1].

На прикладі покажемо, що функція

$$u(x,t) = \left(R_2 g\right)(x,t) \equiv \left(Sg\right)(x, t) + \left(\tilde{S}_a g\right)(x, t) ,$$

де при $a = 1$ маємо

$$\left(Sg\right)(x,t) = -\frac{1}{4}\int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau - \frac{1}{4}\int_x^\pi d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau , \tag{15}$$

$$\left(\tilde{S}g\right)(x,t) = \frac{\pi - x}{4\pi}\int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau + \frac{x}{4\pi}\int_0^\pi d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau \tag{16}$$

у класі функцій $A_2 = \left\{ g : g(x, t) = g(\pi - x, t+\pi) = g(x, t+2\pi) \right\}$ є єдиним розв'язком крайової 2π-періодичної задачі

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x,t) \ , \ 0 < x < \pi \ , \ t \in \mathbf{R} , \tag{17}$$

$$u(0,t) = u(\pi, t) = 0 \ , \ t \in \mathbf{R} , \tag{18}$$

$$u(x, t+2\pi) = u(x,t) \ , \ 0 \le x \le \pi \ , \ t \in \mathbf{R} . \tag{19}$$

Справді доведемо, що функція $u^0(x,t) = \left(\tilde{S}g\right)(x,t)$ є розв'язком однорідного рівняння $u^0_{tt} - u^0_{xx} \equiv 0$, $0 < x < \pi$, $t \in \mathbf{R}$. Оскільки $\left(\tilde{S}g\right)''_{xx}(x,t) \equiv 0$, то запишемо $\left(\tilde{S}g\right)'_{t}(x,t)$ у такому вигляді:

$$\left(\tilde{S}g\right)'_{t}(x,t) = \frac{\pi - x}{4\pi}\int_0^\pi \left(g(\xi,t+\xi) - g(\xi,t-\xi)\right)d\xi +$$
$$+\frac{x}{4\pi}\int_0^\pi \left(g(\xi,t+\pi-\xi) - g(\xi,t-\pi+\xi)\right) = \frac{\pi - x}{4\pi}\mu(t) + \frac{x}{4\pi}\nu(t). \tag{20}$$

Доведемо, що при T = 2π у класі функцій A_2 $\mu(t) \equiv 0, \nu(t) \equiv 0$ $\forall t \in \mathbf{R}$, а отже, на основі формули (20) перша похідна $\left(\tilde{S}g\right)'_{t}(x,t) \equiv 0$. Таким чином,

$$\left(\tilde{S}g\right)''_{tt}(x,t) - \left(\tilde{S}g\right)''_{xx}(x,t) \equiv 0 .$$

Справді, на основі формули (20) маємо

$$\mu(t) = \int_0^\pi \left(g(\xi,t+\xi) - g(\xi,t-\xi)\right)d\xi = \int_0^\pi g(\xi,t+\xi)d\xi - \int_0^\pi g(\xi,t-\xi)d\xi \ .\tag{21}$$

Зробимо заміну $\xi = \pi - \eta, \quad d\xi = -d\eta, \quad \pi \le \eta \le 0.$ На основі формули (21) одержуємо

$$\mu(t) = -\int_\pi^0 g(\pi-\eta, t+\pi-\eta)d\eta - \int_0^\pi g(\xi,t-\xi)d\xi \ . \tag{22}$$

Використовуючи тотожність при визначенні простору

$$A_2 = \left\{g : g(x,t) = g(\pi - x, t+\pi) = g(x, t+2\pi)\right\},$$

тобто рівність $g(\pi - x, t+\pi) = g(x,t)$, маємо з формули (22)

$$\mu(t) = \int_0^\pi g(\eta, t-\eta)d\eta - \int_0^\pi g(\xi,t-\xi)d\xi \equiv 0, \quad \forall t \in \mathbf{R} \ .$$

На основі означення функції $\nu(t)$ (формула (20)), використовуючи рівність $g(\pi - x, t+\pi) = g(x, t)$, маємо такий результат::

$$\nu(t) = \int_0^\pi \left(g(\xi,t+\pi-\xi) - g(\xi,t-\pi+\xi)\right)d\xi =$$
$$= \int_0^\pi g(\pi-\eta, \pi+t-\pi+\eta)d\eta - \int_0^\pi g(\xi,t-\pi+\xi)d\xi \equiv 0\ , \ \forall t \in \mathbf{R}\ ,$$

що й потрібно було довести. Це означає, що перша похідна $\left(\tilde{S}g\right)'_t(x,t) \equiv 0$, $\forall t \in \mathbf{R}$. А отже, і друга похідна

$$\left(\tilde{S}g\right)''_{tt}(x,t) \equiv 0\,,\ \forall t \in \mathbf{R}\,. \tag{23}$$

Таким чином, функція $u^0(x,t) = \left(\tilde{S}g\right)(x,t)$ у класі функцій A_2 задовольняє однорідне рівняння $u^o_{tt} - u^o_{xx} \equiv 0$, $0 < x < \pi$, $t \in \mathbf{R}$. А отже, функція

$$u^0(x,t) = \left(\tilde{S}g\right)(x,t) \tag{24}$$

є розв’язком однорідного рівняння $u^o_{tt} - u^o_{xx} \equiv 0$.

Має місце таке твердження.

Теорема 7. Для кожної функції $g \in G_{\pi t} \cap A_2$ функція $u = R_2 g$ є єдиною із простору $C^{2,2}_{\pi} \cap A_2$, яка задовольняє умови крайової 2π-періодичної задачі (17)–(19). Крім того, $R_2 \in L\left(C_{\pi} \cap A_2,\ C^{1,1}_{\pi} \cap A_2\right)$, $R_2 \in L\left(G_{\pi t} \cap A_2,\ C^{2,2}_{\pi} \cap A_2\right)$.

Зауваження 2. Як доведено у роботі [3] у класі функцій A_2 більше нетривіальних розв’язків, тобто розв’язків відмінних від нуля, однорідного рівняння $u_{tt} - u_{xx} = 0$ не існує. Отже, теорема 7 справедлива, що функція $u = R_2 g$ єдина.

Висновки.

1. На основі результатів роботи [2] розглянуто оператори S_{a_1} та S_{a_2} (с.26, формули (9.6), (9.8), на основі яких будується вказаний результат).

2. Введено нові оператори S_a та R_2^a для дослідження T-періодичних розв’язків гіперболічних рівнянь вигляду $u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x,t)$, $g(x, t+T) = g(x, t)$.

3. Доведено, що введення оператора R_2^a ще не гарантує, що функція

$$\tilde{u}^a(x,t) = \left(S_a g\right)(x,t) + \left(\tilde{S}_a g\right)(x,t) \equiv \left(R_2^a g\right)(x,t)\,,$$

де

$$\left(\tilde{S}g\right)(x,t)=\frac{\pi-x}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}d\xi\int\limits_{t-\xi}^{t+\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau+\frac{x}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}d\xi\int\limits_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau\ ,$$

буде розв'язком лінійного неоднорідного рівняння $u_{tt}^a-a^2u_{xx}^a=g(x,t)$, враховуючи властивості оператора S_a.

Список використаних джерел:

1. Самойленко А. М. Численно-аналитические методы исследования периодических решений / А. М. Самойленко, Н. И. Ронто. — К. : Вища школа, 1976. — 180 с.
2. Митропольский Ю. А. Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа / Ю. А. Митропольский, Г. П. Хома, М. И. Громяк. — К. : Наук. думка, 1991. — 232 с.
3. Вейвода О. Существование классических периодических решений волнового уравнения: Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений / О. Вейвода, М. Штедры // Дифференциальные уравнения. — 1984. — Т. 20, № 10. — С. 1733–1739.
4. Rabinowitz P. Periodic solution of hyperbolic partial differential equations / P. Rabinowitz // Comm. Pure Appl. Math. — 1967. — Vol. 20, № 1. — P. 145–205.
5. Пташник Б. Й. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними / Б. Й. Пташник, В. С. Ільків, І. Я. Кміть, В. М. Поліщук. — К. : Наук. думка, 2002. — 416 с.
6. Митропольський Ю. О. Умови існування розв'язків крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку / Ю. О. Митропольський, С. Г. Хома-Могильська // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, № 7. — С. 912–921.

INVESTIGATION OF T-PERIODIC SOLUTIONS TO HYPERBOLIC TYPE EQUATIONS

As shown in many classical textbooks on ordinary differential equations a T-periodic solution to the equation $Lu=f(x,t,u)$ will exist if the right-hand side of the equation $f(x,t,u)$ is T-periodic in t ($f(x,t+T,u)=$ $=f(x,t,u)$). Note that not every equation in such condition can have a T-periodic solution. As an example of such statement is the ordinary differential equation $dx/dt=\sin^2 t$, whose solution is not periodic. To study the existence of T-periodic solutions of ordinary differential equations and their systems, A. M. Samoylenko developed a numerical-analitycal method for constructing T-periodic solutions to the ordinary differential equations and their systems. The results obtained by A. M. Samoylenko were used to study T-periodic solutions to many new classes of ordinary differential equations and also the Gours problem for partial differential equations $\partial^2 u/(\partial t\partial x)=F(x,t,u,u_t,u_x)$. Note that the boundary-value T-periodic problems for a more general differential equation in partial derivatives were not investigated by the analytical method. For the first time in this work we have shown a method for studying T-periodic solutions to a boundary-value T-periodic problem for a more general differential equation in partial derivatives $\partial^2 u/\partial t^2 - a^2\partial^2 u/\partial x^2 = f(x, t, u, u_t, u_x)$. The following simple assertion has been used: the function K (x, t) defined by an integral with limits from $t - b$ to $t + b$ for each T-periodic in τ function $g(x, \tau)$, that is $g(x, \tau+T) = g(x, \tau)$, is also T-periodic in t. The found formula automatically satisfies the boundary and T-periodic conditions: $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, t + T) = u(x, t)$, $0 \le x \le \pi$, $t \in \mathbf{R}$. The obtained in this paper results can be used to study many classes of differential equations in partial derivatives of hyperbolic type.

Key words: *T-periodic solution, boundary-value T-periodic problem, operator, hyperbolic the second order equation.*

Отримано: 31.05.2018

УДК 534.1

О. Ю. Швець, д-р фіз.-мат. наук,
В. О. Сіренко, канд. техн. наук

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут ім. І. Сікорського», м. Київ

СИМЕТРИЧНІ СЦЕНАРІЇ ПЕРЕХОДУ ДО ДЕТЕРМІНОВАНОГО ХАОСУ В СИСТЕМАХ З ОБМЕЖЕНИМ ЗБУДЖЕННЯМ

Розглянуто п'ятивимірну детерміновану динамічну систему, яка використовується для опису динамічної поведінки маятникових систем, баків з рідиною, оболонок, тощо. Принциповою особливістю є неідеальність розглянутої динамічної системи за Зоммерфельдом-Кононенком. У таких динамічних системах завжди враховується взаємодія між деякою коливальною підсистемою та джерелом збудження коливань. Головна увага приділяється пошуку та опису нових сценаріїв переходу від регулярних режимів до хаотичних.

На підставі, розробленої методики для чисельного дослідження явищ детермінованого хаосу в динамічних системах проведений великий обсяг комп'ютерних обчислень з метою виявлення нових сценаріїв переходу до детермінованого хаосу. Був описаний сценарій переходу до хаосу, який починається як симетричний каскад біфуркацій подвоєння періоду граничних циклів та закінчується виникненням симетричного хаотичного атрактора через переміжність. Тобто виявлений сценарій поєднує у собі характерні особливості притаманні класичним сценаріям Фейгенбаума та Помо-Манневілля. Також був описаний сценарій переходу до хаосу через переміжність у якому рух тра-