While studying certain physical processes and phenomena in media with variable characteristics and small dispersion the Korteweg-de Vries equation with singular perturbation is appeared as a mathematical model. Methods of asymptotic analysis are effective instruments for studying the Korteweg-de Vries equation with variable coefficients and a small parameter because they allow us to construct approximate solutions to the equation as well as to analyze its different properties. Consideration of singular perturbed equations of integrable type is current problem of modern applied mathematics that includes a problem of constructing asymptotic soliton like solutions.

The paper deals with constructing the asymptotic soliton like solutions to the singular perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients of special form. There is constructed a main term of the asymptotic solution. The solution is shown to belong to the space of quickly decreasing functions and the solution is demonstrated to define for any values of independent variables in contradistinction to the general case. The theorem on accuracy with which the asymptotic solution satisfies the equation is proved.

Key words: *the Korteweg-de Vries equation, soliton solution, singular perturbation, asymptotic solution.*

Отримано: 26.05.2018

УДК 517.5

І. Б. Ковальська, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

НАБЛИЖЕННЯ НЕСКІНЧЕННО-ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ В ІНТЕГРАЛЬНІЙ МЕТРИЦІ

Оскільки будь-яка сумовна 2π-періодична функція розвивається в ряд Фур'є, то найбільш зручним апаратом наближення таких функцій є послідовності частинних сум цього ряду і послідовності лінійних операторів, що визначаються деякою трикутною матрицею Λ. Ця матриця задає метод побудови поліномів і визначає конкретний метод підсумовування рядів Фур'є. Одним з них є регулярний метод, який називається сумами Зігмунда.

Суми Зігмунда були введені А. Зігмундом в 1945 році. Він же довів деякі твердження, які встановлювали точні порядкові оцінки верхніх граней відхилень цих сум на класах r-диференційовних функцій для дробових r.

Дослідження Зігмунда були продовжені Б. Надем, С. А. Теляковським, А. В. Єфимовим, О. І. Степанцем, Д. М. Бушевим та ін.

У статті отримано точні порядкові оцінки верхніх граней відхилень сум Зігмунда від нескінченно-диференційовних функцій в інтегральній метриці.

Нехай N — деякий клас сумовних 2π-періодичних функцій. Тоді, якщо для $f(x)$ існує $(\psi;\beta)$-похідна (в розумінні Степанця) і ця похідна належить класу N, то такі функції $f(x)$ об'єднують в окремий клас $L(\psi;\beta)N$, що характеризується $(\psi;\beta)$ диференціальними властивостями самої функції і умовами, накладеними на її $(\psi;\beta)$ похідну.

У статті класи $L(\psi;\beta)N$ складаються з функцій, ряди Фур'є яких збігаються до нескінченно-диференційовних функцій, а їх $(\psi;\beta)$-похідні в інтегральній метриці належать одиничній кулі.

Основним результатом роботи є наступне твердження.

Теорема. Якщо дана функція $f(t, n, r)$ — рівномірно обмежена, а функції $f(x)$ належать згаданому класу $L(\psi;\beta)N$, то для довільних $n \in N$, для верхніх граней відхилень сум Зігмунда від функцій з класу $L(\psi;\beta)N$ справедливі точні порядкові оцінки, де порядок визначається степенем — r методу Зігмунда.

Із допоміжних тверджень доводиться 2 леми і для того, щоб показати непокращуваність порядкової оцінки будується екстремальна функція $g(x) \in L(\psi;\beta)N$.

Ключові слова: *порядкові оцінки, суми Зігмунда, нескінченно-диференційовні функції, простір* L_p.

Вступ. Теорія наближення функцій виникла як в результаті внутрішнього розвитку математики так і з потреб практики. В ній відображена одна з фундаментальних ідей математики — моделювання складних об'єктів і явищ з допомогою більш простих і зручних.

Оскільки будь-яка сумовна 2π-періодична функція розвивається в ряд Фур'є, то найбільш зручним апаратом наближення таких функцій є послідовності частинних сум цього ряду і послідовності $U_n(f,\Lambda)$ лінійних операторів, що визначаються матрицею $\Lambda = \left\|\lambda_k^{(n)}\right\|$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ $k = 0, 1, 2, \ldots$:

$$U_n(f,x,\Lambda) = \frac{a_0}{2}\lambda_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}\left(a_k\cos kx + b_k\sin kx\right),$$

де $a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\;dt,$ $\quad b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\;dt$ — коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$. Тригонометричний поліном

$$U_n(f,\Lambda) = \frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}\cos kt$$

називають ядром оператора (методу) $U_n(f,\Lambda)$. У випадку, коли $\lambda_k^{(n)} = 1 - \left(\dfrac{k}{n}\right)^r$, $r > 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ виходить поліном, що відповідає методу Зігмунда. Поліноми

$$Z_n^{(r)}(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\left(\frac{k}{n}\right)^r\right)\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)$$

називають сумами Зігмунда.

Суми Зігмунда для $\forall r>0$ були введені А. Зігмундом в [3]. Там же були доведені деякі твердження, які встановлювали точні порядки відхилень цих сум на класах W_r^r, $W_r^r H_\omega$.

Дослідження А. Зігмунда були продовжені Б. Надем [6] і С. А. Теляковським [5], а також А. В. Єфимовим [4], О. І. Степанцем і Д. М. Бушевим [2].

Постановка задачі. Нехай $f(x)$ — сумовна, 2π-періодична функція, і

$$S[f]=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx\right)=\sum_{k=0}^{n}A_k(f,x)$$

— її ряд Фур'є.

Нехай далі $\psi(k)$ — довільна функція натурального аргументу і β — фіксоване дійсне число, $\beta\in R$. Припустимо, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}\left(a_k(f)\cos\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right)+b_k(f)\sin\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right)$ є рядом Фур'є деякої функції з $L(0;2\pi)$.

Цю функцію позначимо через $f_\beta^\psi(\cdot)$ і назвемо, згідно [1], $(\psi;\beta)$-похідною функції $f(\cdot)$, а множину функцій $f(\cdot)$, що задовольняють таку умову, позначимо L_β^ψ.

Нехай N — деякий клас сумовних 2π-періодичних функцій. Тоді, якщо $f\in L_\beta^\psi$ і крім того $f_\beta^\psi\in N$, то будемо вважати, що функція $f(x)$ належить до класу $L_\beta^\psi N$.

Розглянемо величини відхилень сум Зігмунда

$$Z_n^{(r)}(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\left(\frac{k}{n}\right)^r\right)A_k(f,x)$$

порядку $n-1$ від функцій з класів $L_\beta^\psi N$, коли N — деяка підмножина в просторі L_p: $N=S_p=\left\{\varphi:\ \|\varphi\|_p\le 1\right\}$ і верхні грані цих відхилень на класах $L_\beta^\psi N$:

$$\mathscr{E}_n(L^{\psi}_{\beta}N)_s = \sup_{f\in L^{\psi}_{\beta}N}\left\|\delta_n(f;x)\right\|_s = \sup_{f\in L^{\psi}_{\beta}N}\left\|f(x)-Z^{(r)}_n(f,x)\right\|_s .$$

При цьому покладемо $L^{\psi}_{\beta}S_p = L^{\psi}_{\beta,p}$, $p\in(1;+\infty)$.

Нехай множини L^{ψ}_{β} складаються з функцій, ряди Фур'є яких збігаються до нескінченно-диференційовних функцій

$$\left(\mathfrak{M}_{\infty} = \left\{\psi(t):\ \frac{t}{\eta(t)-t}\uparrow\infty\right\},\ \eta(t)=\psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right)\right).$$

Згідно з [1] позначимо через $\mathfrak{M}_{\infty}'$ множину функцій $\psi\in\mathfrak{M}_{\infty}$, для яких величина $\eta(t)-t$ обмежена зверху

$$\mathfrak{M}_{\infty}' = \left\{\psi\in\mathfrak{M}_{\infty}:\ \eta(t)-t\le K,\quad \forall t\ge 1\right\}.$$

У роботі отримаємо точні порядкові оцінки величини $\mathscr{E}_n\left(L^{\psi}_{\beta,p}\right)_s$ для $f(x)\in L^{\psi}_{\beta,p}$ в метриці простору L_s, де $\|f\|_s = \left(\int\limits_0^{2\pi}|f(t)|^s\,dt\right)^{1/s}$, якщо наближення здійснюється регулярним лінійним методом підсумовування рядів Фур'є — методом Зігмунда.

Основним результатом роботи є наступне твердження:

Теорема. Нехай $\psi\in\mathfrak{M}_{\infty}'$ і функція $\Phi_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\tau_k^{(n)}\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)$,

$$\tau_k^{(n)} = \begin{cases}\psi(k)\left(\dfrac{k}{n}\right)^r, & 1\le k\le n-1;\\ \psi(k), & k\ge n;\end{cases}$$

така, що $f_n(t)=\Phi_n(t)n^r$ є рівномірно обмежена. Тоді, якщо $1<p,\ s<\infty$ і $f\in L^{\psi}_{\beta,p}$, то $\forall n\in N$

$$\frac{1}{n^r}\cdot C^{(2)}_{p,s} \le \mathscr{E}_n\left(L^{\psi}_{\beta,p}\right)_s \le C^{(1)}_{p,s}\cdot\frac{1}{n^r},$$

де $C^{(1)}_{p,s}$ і $C^{(2)}_{p,s}$ — сталі, що залежать лише від p і s.

Допоміжні твердження.

Лема 1. Якщо функція $\psi(k)$ така, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cdot k^r$, $r>0$ збіжний, то функція $f_n(t)=\Phi_n(t)n^r$, де

$$\Phi_n(t)=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^r \psi(k)\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)+\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right),\ r>0,\ \beta\in R$$

є рівномірно обмеженою при всіх $n\in N$ і $t\in R$.

Доведення. Покажемо, що $\forall n\in N$ функція $f_n(t)$ обмежена.

$$\left|\Phi_n(t)\right|\le\left|\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^r \psi(k)\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right|+\left|\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right|\le$$

$$\le\frac{1}{n^r}\sum_{k=1}^{n-1}\psi(k)\cdot k^r\left|\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right|+\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\left|\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right|\le$$

$$\le\frac{1}{n^r}\sum_{k=1}^{n-1}\psi(k)\cdot k^r+\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\,.$$

Відомо, що $\forall\psi(n)\in\mathfrak{M}_\infty$ і $\forall n\in N$ (див. наприклад, [1])

$$\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\le \mathrm{K}_1\,\psi(n)\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j}=\mathrm{K}_2\,\psi(n)\,.$$

Оскільки ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cdot k^r$ збіжний, то $S_n=\sum_{k=1}^{n}\psi(k)\cdot k^r$ обмежена і $\sum_{k=1}^{n}\psi(k)\cdot k^r\le S\quad\forall n\in N$.

Із цих співвідношень отримаємо:

$$\left|f_n(\psi;t)\right|=\left|\Phi_n(t)n^r\right|\le$$

$$\le n^r\left(\frac{1}{n^r}\sum_{k=1}^{n-1}\psi(k)\cdot k^r+\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\right)\le S+K_2\psi(n)\cdot n^r\le S\left(1+K_2\right)=K\,.$$

Лема доведена.

Лема 2. Нехай $\psi(k)\in\mathfrak{M}_\infty'$, $1<p,\ s<\infty$. Тоді $\forall f\in L^{\psi}_{\beta,p}$ і $\forall n\in N:\ \mathcal{E}_n\left(L^{\psi}_{\beta,p}\right)_s\le C_{p,s}\cdot\frac{1}{n^r}$, де $C_{p,s}$ — стала, що залежить лише від p і s .

Доведення. Оскільки $\psi\in\mathfrak{M}_\infty'\subset\mathfrak{M}_\infty$, то для таких функцій виконується нерівність $\sum_{k=1}^{n}\frac{\psi(k)}{k}<\infty$ і ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)$ є рядом Фур’є деякої сумовної функції.

Тому $\forall f \in L^{\psi}_{\beta,p}$ майже скрізь на періоді має місце рівність

$$\delta_n\left(f,x\right)=f\left(x\right)-Z_n^{(r)}\left(f,x\right)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^{\psi}\left(x+t\right)\sum_{k=1}^{\infty}\tau_k^{(n)}\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt\,,$$

де $\tau_k^{(n)}=\begin{cases}\psi\left(k\right)\left(\dfrac{k}{n}\right)^r, & 1\le k\le n-1;\\ \psi\left(k\right), & k\ge n.\end{cases}$

Використовуючи нерівність Юнга для згорток періодичних функцій $\left(2\pi\left\|y*z\right\|_s\le\left\|y\right\|_p\cdot\left\|z\right\|_q,\quad \dfrac{1}{q}=1-\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{s},\quad 1\le p\le s\le\infty\right)$, знаходимо:

$$2\pi\left\|\delta_n\left(f,x\right)\right\|_s=2\pi\left\|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^{\psi}\left(x+t\right)\sum_{k=1}^{\infty}\tau_k^{(n)}\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt\right\|\le$$

$$\le 2\left\|f_{\beta}^{\psi}\left(x+t\right)\right\|_p\cdot\left\|\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^r\psi\left(k\right)\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)+\sum_{k=n}^{\infty}\psi\left(k\right)\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right\|_q=$$

$$=2\left\|f_{\beta}^{\psi}\left(x+t\right)\right\|_p\cdot\left\|\Phi_n\left(t\right)\right\|_q=2\left\|f_{\beta}^{\psi}\left(x+t\right)\right\|_p\cdot\frac{1}{n^r}\left\|f_n\left(t\right)\right\|_q\le\frac{2}{n^r}\left\|f_n\left(t\right)\right\|_q.$$

Згідно леми 1 функція $f_n\left(t\right)$ обмежена. Тому

$$\left\|\delta_n\left(f,x\right)\right\|_s\le\frac{2}{n^r}\cdot K\cdot\frac{1}{2\pi}=\frac{C}{n^r}.$$

З нерівності Гельдера для $f\in L_p,\ \ 1<p,\ s<\infty$ слідує, що $\left\|f\right\|_s=\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(t\right)\right|^p dt\right)^{1/p}\le\left(2\pi\right)^{\frac{p-s}{ps}}\cdot\left\|f\right\|_p$. Тоді оцінку можна записати для $1<p,\ s<\infty$ у вигляді $\mathscr{E}_n\left(L^{\psi}_{\beta,p}\right)_s=\sup\limits_{f\in L^{\psi}_{\beta,p}}\left\|\delta_n(f;x)\right\|_s\le C_{p,s}\cdot\dfrac{1}{n^r}$, де $C_{p,s}$ — стала, що залежить лише від p і s.

Лема доведена.

Щоб показати непокращуваність по порядку отриманої оцінки, розглянемо функцію $g\left(x\right)=\psi\left(1\right)a^{-1}\cos\left(x-\dfrac{\beta\pi}{2}\right)$, де $a=\left\|\cos x\right\|_p$.

Легко бачити, що

$$\left\|g\left(x\right)_{\beta}^{\psi}\right\|_p=a^{-1}\psi\left(1\right)\left\|\frac{1}{\psi\left(1\right)}\cos\left(x-\frac{\beta\pi}{2}+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right\|_p=1,$$

тобто

$$g(x) \in L^{\psi}_{\beta,p} \text{ і}$$

$$\mathscr{E}_n\left(L^{\psi}_{\beta,p}\right)_s = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} \left\| f(x) - Z_n^{(r)}(f,x) \right\|_s \geq \left\| g(x) - Z_n^{(r)}(g,x) \right\|_s =$$

$$= \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g^{\psi}_{\beta}(x+t) \cdot \frac{1}{n^r} \cdot \cos\left(t + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt \right\|_s = \frac{1}{\pi} \left\| \int_{-\pi}^{\pi} a^{-1} \cdot \psi(1) \cdot \frac{1}{\psi(1)} \times \right.$$

$$\left. \times \cos\left(x - \frac{\beta\pi}{2} + \frac{\beta\pi}{2} + t\right) \cdot \frac{2}{n^r} \cos\left(t + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt \right\|_s =$$

$$= \frac{a^{-1}}{\pi n^r} \left\| \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x+t) \cdot \cos\left(t + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt \right\|_s = \frac{a^{-1}}{\pi n^r} \left\| \pi \cos\left(x - \frac{\beta\pi}{2}\right) \right\|_s = \frac{C^{(r)}_{p,s}}{n^r},$$

де $C_{p,s}$ — стала, що залежить лише від p і s.

Із отриманого співвідношення, а також лем 1 і 2 слідує теорема.

Висновки. В статті отримані точні порядкові оцінки величини $\mathscr{E}_n\left(L^{\psi}_{\beta,p}\right)_s$ для $f(x) \in L^{\psi}_{\beta,p}$ в метриці простору L_s у випадку, коли наближення здійснюється регулярним лінійним методом підсумовування рядів Фур'є-методом Зігмунда.

Список використаних джерел:

1. Степанец А. И. Классификация и приближение периодических функций / А. И. Степанец. — К. : Наук. думка, 1987. — 268 с.
2. Бушев Д. Н. О приближении слабо дифференцируемых периодических функций / Д. Н. Бушев, А. И. Степанец // Укр. мат. журн. — 1990. — Вип. 42. — № 3. — С. 405–412.
3. Zygmund A. Smooth Functions / A. Zygmund // Duke Math. J. — 1945. — Vol. 12. — P. 47–76.
4. Ефимов А. В. О линейных методах суммирования рядов Фурье / А. В. Ефимов // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1960. — Вип. 24. — № 5. — С. 743–756.
5. Теляковский С. А. О приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье / С. А. Теляковский // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1960. — Вип. 24. — № 2. — С. 213–242.
6. Nagy B. Sur une generale procedes de summation pour les series de Fourier / B. Nagy // Hung. Acta Math. — 1948. — № 3. — P. 14–62.

APPROXIMATION OF THE INFINITELY-DIFFERENTIABLE FUNCTIONS IN AN INTEGRAL METRIC

Since every summable 2π-periodic function is expanded in the Fourier series, the most convenient way to approximate it is to use the sequences of the partial sums of this series and sequences of linear operators, that are defined by some triangular matrix Λ. This matrix defines the way of constructing polynomials and a particular method of summing the Fourier series. One of them is a regular method, called the Zygmund sums.

Zygmund's sums were defined by A. Zigmund in 1945. He proved some statements, that established exact order estimates of the upper founds of the deviations of these sums on classes of r-differentiable functions for fractional r.

The research of Zigmund was continued by B. Nagy, S. A. Telyakovskiy, A. V. Efimov, A. I. Stepanets, D. N. Bushev and other.

In this paper we obtain exact order estimates for the upper bounds of deviations of Zigmund sums from infinitely-differentiable functions in the integral metric.

Let N — be a class of summable 2π-functions. If for function $f(x)$ periodic there exists a derivative (in the sense of Stepanets) and it belongs to the class N, then such functions $f(x)$ are united in a separate class $L(\psi;\beta)N$. This class is characterized by the $(\psi;\beta)$-differential properties of the functions themselves and the conditions imposed on their derivatives.

In this article the classes $L(\psi;\beta)N$ consist of functions for which the Fourier series are converged to infinitely-differentiable functions and their $(\psi;\beta)$-derivatives in the integral metric belong to the unit ball.

The main result of the paper is the theorem: if the given function $f(t, n, r)$ — uniformly bounded and the functions $f(x)$ belong to the class $L(\psi;\beta)N$, then for any $n \in N$ and for upper founds of deviations of Zigmund sums from functions of the class $L(\psi;\beta)N$, the exact order estimates are valid, where the order is determined by the number — r of Zigmund sums.

From auxiliary assertions, 2 lemmas are proved and an extremal function $g(x) \in L(\psi;\beta)N$ is constructed in order to show that the order estimates are unimprovable.

Key words: *order estimates, Zygmund sums, infinitely-differentiable functions, integral metric.*

Отримано: 14.05.2018