M. P. Korniichuk and V. M. Tikhomirov established the general criterion for an extremal element for the problem of the best approximation of an element of a linear normed space by a convex set based on the dual interrelation. The Kolmogorov's criterion of the extremal element for the problem of approximation of a complex-valued function by a finite-dimensional subspace of generalized complex-valued polynomials is somewhat different from this criterion.

An important class of problems of the theory of the approximation is problems of simultaneous approximation of several elements of linear normed space by set of this space.

In the article one of these tasks is considered. This is a problem to research in the sense of the weighted distances Chebyshov's center of several points of the linear normed space relatively to the convex set of this space.

For this problem we found the dual relation. These duality relations became the basis for obtaining the criterion of the extremal sequence and the criterion of the extremal element. We generalized Kolmogorov's criterion on the problem that is considered in the work.

These results clarified for some cases of the studied problem.

Key words: *the linear normed space, the weighted distances, the convex set, the generalized point of Chebyshev, the extreme sequence, the criteria of the generalized center of Chebyshev.*

Отримано: 23.05.2018

УДК 517.9

К. С. Зайцева*,
В. Г. Самойленко,** д-р фіз.-мат. наук, професор,
Ю. І. Самойленко,** д-р фіз.-мат. наук,
Л. В. Вовк*,** канд. фіз.-мат. наук

*Київський університет імені Бориса Грінченка м. Київ,
**Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ,
***Київський національний університет культури і мистецтв, м. Київ

ПОБУДОВА АСИМПТОТИЧНОГО СОЛІТОНОПОДІБНОГО РОЗВ'ЯЗКУ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРІЗА ЗІ СПЕЦІАЛЬНО ЗАДАНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Рівняння Кортевега-де Фріза є одним з важливих об'єктів дослідження сучасної теоретичної фізики і прикладної математики. Це рівняння описує хвильові процеси в середовищах з нелінійної дисперсією і стало широко відомим у середині минулого століття завдяки наявності у нього так званих солітонних розв'язків, що мають властивість нелінійної суперпозиції. За допомогою різних аналітичних і якісних методів (метод оберненої задачі теорії розсіювання, метод Хіроти, методи Беклунд перетворення і Дарбу перетворення, метод скінченнозонного інтегрування, методи групового аналізу та інші) для рівняння Кортевега-де Фріза вивчено широкий клас задач і встановлено існування для нього розв'язків різної фізичної природи, зокрема, солітонних, періодичних і майже періодичних, розв'язків типу ударної хвилі (типу сходинки), тощо. У випадку середовищ зі змінними характеристиками і малою дисперсією в якості математичних моделей певних процесів і явищ виникає рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами та сингулярним збуренням.

При вивченні рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами та малим параметром ефективним методом його дослідження є асимптотичний аналіз, який дозволяє знайти його наближені розв'язки та проаналізувати їх якісні властивості.

Однією з актуальних задач сучасної прикладної математики є вивчення рівнянь інтегровного типу з сингулярним збуренням, зокрема, задача про побудову асимптотичних розв'язків, які за своєю структурою і властивостями є близькими до солітонних розв'язків. Саме побудові таких асимптотичних розв'язків для рівняння Кортевега-де Фріза із сингулярним збуренням і змінними коефіцієнтами спеціального вигляду і присвячено дану статтю, у якій для цього рівняння побудовано головний доданок його асимптотичного солітоноподібного розв'язку. Показано, що отриманий асимптотичний розв'язок належить простору швидко спадних функцій і, на відміну від загального випадку, він визначений для всіх значень незалежних змінних. Доведено твердження про точність, з якою побудований асимптотичний розв'язок задовольняє досліджуване рівняння.

Ключові слова: *рівняння Кортевега-де Фріза, солітонний розв'язок, сингулярне збурення, асимптотичний розв'язок.*

Вступ. Рівняння Кортевега-де Фріза є одним з важливих об'єктів сучасної математичної фізики. Для побудови і вивчення його розв'язків використовувалися різноманітні аналітичні і якісні методи, серед яких методи теорії звичайних диференціальних рівнянь, чисельні методи, метод оберненої задачі теорії розсіювання, метод Хіроти, перетворення Беклунда і Дарбу перетворення, методи групового аналізу, асимптотичні методи та інші [1–11]. При цьому було встановлено, що це рівняння володіє розв'язками з різноманітними властивостями. Надзвичайний інтерес до даного рівняння пов'язаний з наявністю у нього так званих солітонних розв'язків, які описують принцип нелінійної суперпозиції розв'язків хвильової природи. Крім фізично змістовної сутності дане рівняння володіє низкою цікавих математичних властивостей, серед яких згадаємо лише про існування у нього так званих сингулярних розв'язків, тобто розв'язків, які можуть «руйнуватися» або грубо, або згідно сценарію градієнтної катастрофи [12].

Проте переважна більшість згаданих вище методів і підходів може ефективно використовуватися лише для випадку рівняння Кортевега-де

Фріза зі сталими коефіцієнтами, в той час, як при моделюванні хвильових процесів у середовищах зі змінними характеристиками в якості математичних моделей виникають рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами і, зокрема, з малим параметром при старшій похідній, який характеризує малу дисперсію середовища. Зауважимо, що при наявності малого параметра чи не єдиним методом дослідження таких рівнянь є асимптотичний аналіз, який дозволяє знайти їх наближені розв’язки. Саме побудові асимптотичних розв’язків спеціального вигляду для рівняння Кортевега-де Фріза з сингулярним збуренням і змінними коефіцієнтами спеціального вигляду і присвячено дану статтю.

Постановка задачі. Для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$\varepsilon^2 u_{xxx} = a(x,t,\varepsilon)\, u_t + b(x,t,\varepsilon)\, u u_x, \tag{1}$$

де ε — малий параметр, функції $a(x,t,\varepsilon)$, $b(x,t,\varepsilon)$ записуються у вигляді асимптотичних (за Пуанкаре) рядів

$$a(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x,t)\varepsilon^k \ , \ b(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x,t)\varepsilon^k \ ,$$

коефіцієнти яких є нескінченно диференційованими за x, t функціями, розглядається задача про знаходження його асимптотичного солітоноподібного розв’язку для випадку, коли коефіцієнти мають вигляд

$$a(x,t,\varepsilon) = t^2 + x^2 + 1 \ , \ b(x,t,\varepsilon) = 1 \, . \tag{2}$$

Зазначимо, що рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами вивчалося у низці статей, зокрема, у [10].

Алгоритм побудови розв’язку. Асимптотичний солітоноподібний розв’язок рівняння (1), (2) шукається за допомогою алгоритму, який розроблено і обґрунтовано в [13, 14]. Відповідно до властивостей солітонних розв’язків шуканий асимптотичний розв’язок має спеціальну поведінку при великих значеннях аргументів, а тому його доданки належать певним функціональним просторам. Розглянемо [13, 15] простір $G_1 = G_1(R \times [0;T] \times R)$ — лінійний простір таких нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau)$, $(x,t,\tau) \in R \times [0;T] \times R$, що для довільних невід’ємних цілих чисел n, p, q, r рівномірно щодо (x,t) на кожній компактній множині $K \subset R \times [0;T]$ виконуються умови:

1^0. справджується співвідношення:

$$\lim_{\tau \to +\infty} \tau^n \frac{\partial^p}{\partial x^p} \frac{\partial^q}{\partial t^q} \frac{\partial^r}{\partial \tau^r} f(x,t,\tau) = 0, \quad (x,t) \in K;$$

2^0. існує така нескінченно диференційовна функція $f^-(x,t)$, що

$$\lim_{\tau\to-\infty}\tau^n \frac{\partial^p}{\partial x^p}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^r}{\partial \tau^r}\Big(f(x,t,\tau)-f^-(x,t)\Big)=0, \quad (x,t)\in K.$$

Нехай $G_1^0 = G_1^0(R\times[0;T]\times R)\subset G_1$ — простір функцій $f = f(x,t,\tau)\in G_1$, $(x,t,\tau)\in R\times[0;T]\times R$, для яких рівномірно щодо змінних (x,t) на кожному компакті $K\subset R\times[0;T]$ виконується умова $\lim\limits_{\tau\to-\infty} f(x,t,\tau)=0.$

Означення 1 [13–15]. Функція $u=u(x,t,\varepsilon)$, де ε — малий параметр, називається солітоноподібною, якщо ця функція для довільного цілого $N\geq 0$ зображується асимптотичним розкладом вигляду:

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\Big[u_j(x,t)+V_j(x,t,\tau)\Big]+O(\varepsilon^{N+1}), \quad \tau=\frac{x-\varphi(t)}{\varepsilon}, \tag{3}$$

де $\varphi(t)\in C^\infty([0;T])$ — скалярна функція, функції $u_j(x,t)$, $j=\overline{0,N}$, — нескінченно диференційовні; $V_0(x,t,\tau)\in G_1^0$, $V_j(x,t,\tau)\in G_1$, $j=\overline{1,N}$. Вираз $x-\varphi(t)$ називається фазою солітоноподібної функції $u(x,t,\varepsilon)$.

Асимптотичний солітоноподібний розв'язок рівняння (1) записується у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon)=Y_N(x,t,\tau,\varepsilon)+O(\varepsilon^{N+1}),$$

$$Y_N(x,t,\tau,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\Big[u_j(x,t)+V_j(x,t,\tau)\Big],\ \tau=\frac{x-\varphi(t)}{\varepsilon}$$

Оскільки солітонні властивості розв'язку визначаються його сингулярною частиною, то у подальшому вважаємо, що регулярна частина асимптотичного розв'язку рівна нулеві, тобто розглядається випадок нульового фону. Стандартними методами показується, що доданки сингулярної частини асимптотики — функції $V_j(x,t,\tau)$, $j=\overline{0,N}$, задовольняють систему диференціальних рівнянь вигляду:

$$\frac{\partial^3 V_0}{\partial\tau^3}+a_0(x,t)\frac{\partial V_0}{\partial\tau}\varphi'(t)-b_0(x,t)\left(u_0\frac{\partial V_0}{\partial\tau}+V_0\frac{\partial V_0}{\partial\tau}\right)=0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^3 V_j}{\partial\tau^3}+a_0(x,t)\frac{\partial V_j}{\partial\tau}\varphi'(t)-b_0(x,t)\left(u_0\frac{\partial V_j}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial\tau}\Big(V_0V_j\Big)\right)=F_j(x,t,\tau), \tag{5}$$

де функції $F_j(x,t,\tau)$, $j=\overline{1,N}$ знаходяться рекурентно.

У [13] описано загальну процедуру побудови розв'язків системи (4), (5), яка дає алгоритм знаходження функції $\varphi(t)$, за допомогою якої визначається фаза солітоноподібного розв'язку. Оскільки у цій статті ми обмежуємося побудовою лише головного доданку асимптотичного розв'язку рівняння (1), (2), то для даного випадку фазу шуканого розв'язку можна визначити [13] за допомогою рівності $x-\varphi(t)=x+2\,t$, тобто покласти $\varphi(t)=-2\,t$.

Шукаючи розв'язок рівняння (4) у просторі G_0, знаходимо, що головний доданок сингулярної частини асимптотичного солітоноподібного розв'язку рівняння (1), (2) має вигляд

$$Y_0(x,t,\varepsilon)=-3(10t^2+2)\;ch^{-2}\left(\frac{\sqrt{10t^2+2}}{2}\left(\frac{x+2t}{2\varepsilon}\right)\right).$$

Встановлено твердження.

Теорема. Для рівняння вигляду

$$\varepsilon^2 u_{xxx}=(x^2+t^2+1)\,u_t+uu_x$$

функція

$$u(x,t,\varepsilon)=-3(10t^2+2)\,ch^{-2}\left(\frac{\sqrt{10t^2+2}}{2}\left(\frac{x+2t}{2\varepsilon}\right)\right)$$

є головним доданком асимптотичного солітоноподібного розв'язку і задовольняє це рівняння з точністю $O(1)$.

Доведення даного твердження проводиться аналогічно доведенню теореми 1 [13], а тому тут не подається.

Зауваження. Побудований розв'язок, на відміну від загального випадку, «гарантовано» визначено для всіх значень незалежних аргументів *x*, *t*. Очевидно також, що цей розв'язок має «солітонні» властивості і становить певний фізичний інтерес.

Висновки. Побудовано асимптотичний солітоноподібний розв'язок сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами для випадку, коли коефіцієнти рівняння мають спеціальний вигляд. Встановлено точність, з якою побудований асимптотичний розв'язок задовольняє дане рівняння. Показано, що отриманий розв'язок є розв'язком солітонного типу.

Список використаних джерел:

1. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике / А. Ньюэлл ; пер. с англ. И. Р. Габитов, А. Ю. Орлов, Е. И. Шульман. — М. : Мир, 1989. — 324 с.
2. Солитоны / под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. — М. : Мир, 1983. — 408 с.
3. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. — М. : Мир, 1988. — 696 с.
4. Стокер Дж. Волны на воде / Дж. Стокер. — М. : ИЛ, 1959.

5. Теория солитонов: метод обратной задачи / В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. — М. : Наука, 1980. — 320 с.
6. Филиппов А. Т. Многоликий солитон / А. Т. Филиппов. — М. : Наука, 1986. — 223 с.
7. Ablowitz M. J. Nonlinear dispersive waves. Asymptotic analysis and solitons / M. J. Ablowitz. — Cambridge : Cambridge University Press, 2011. — 348 p.
8. Gardner C. S. Method for solving the Korteweg-de Vries equation / C. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal, R. M. Miura // Physical Review Lett. — 1967. — Vol. 19. — P. 1095–1097.
9. Hirota R. Exact solutions of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solutions / R. Hirota // Physical Review Letters. — 1971. — Vol. 27. — P. 1192–1194.
10. Vaneeva O. Group classification of variable coefficient KdV-like equations / O. Vaneeva // arXiv: 1204.4875v3. — 8 p.
11. Blacmore D. Nonlinear dynamical systems of mathematical physics. Spectral and integrability analysis / D. Blacmore, A. K. Prykarpatsky, V. H. Samoylenko. — Singapore : World Scientific, 2011. — 564 p.
12. Похожаев С. И. О сингулярных решениях уравения Кортевега-де Фриза / С. И. Похожаев // Матем. заметки. — 2010. — Т. 88, вып. 5. — С. 770–777.
13. Самойленко В. Г. Асимптотичні розвинення для однофазових солітоноподібних розв'язків рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами / В. Г. Самойленко, Ю. І. Самойленко // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, №1. — С. 111–124.
14. Самойленко В. Г. Асимптотичні розв’язки задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами / В. Г. Самойленко, Ю. І. Самойленко // Укр. мат. журн. — 2007. — Т. 59, № 1. — С. 122–132.
15. Maslov V. P. Geometric asymptotics for PDE. I / V. P. Maslov, G. A. Omel'yanov. — Providence : American Math. Society, 2001. — 243 p.

CONSTRUCTING ASYMPTOTIC SOLITON-LIKE SOLUTION TO THE SINGULAR PERTURBED KORTEWEG-DE VRIES EQUATION WITH SPECIAL COEFFICIENTS

The Korteweg-de Vries equation is known as one of important object for researching in modern theoretical physics and applied mathematics. The equation describes wave processes in nonlinear dispersion media. It became widely known in the middle of the past century.

The equation attracted much attention in connection with discovery of soliton solutions possessing interesting property of non-linear superposition. By means of different analytical, qualitative and numerical methods and approaches, namely, inverse scattering transform, Hirota method, Backlund transform, Darboux transform, method of finite zone integration, group analysis and others, for the Korteweg-de Vries equation there were studied a lot of different mathematical problems. In particular, there were found solutions with different physical treatment as well as there were proved existence of periodic and almost periodic solutions, shock wave solutions (or step like solution) and others.

While studying certain physical processes and phenomena in media with variable characteristics and small dispersion the Korteweg-de Vries equation with singular perturbation is appeared as a mathematical model. Methods of asymptotic analysis are effective instruments for studying the Korteweg-de Vries equation with variable coefficients and a small parameter because they allow us to construct approximate solutions to the equation as well as to analyze its different properties. Consideration of singular perturbed equations of integrable type is current problem of modern applied mathematics that includes a problem of constructing asymptotic soliton like solutions.

The paper deals with constructing the asymptotic soliton like solutions to the singular perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients of special form. There is constructed a main term of the asymptotic solution. The solution is shown to belong to the space of quickly decreasing functions and the solution is demonstrated to define for any values of independent variables in contradistinction to the general case. The theorem on accuracy with which the asymptotic solution satisfies the equation is proved.

Key words: *the Korteweg-de Vries equation, soliton solution, singular perturbation, asymptotic solution.*

Отримано: 26.05.2018

УДК 517.5

І. Б. Ковальська, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

НАБЛИЖЕННЯ НЕСКІНЧЕННО-ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ В ІНТЕГРАЛЬНІЙ МЕТРИЦІ

Оскільки будь-яка сумовна 2π-періодична функція розвивається в ряд Фур'є, то найбільш зручним апаратом наближення таких функцій є послідовності частинних сум цього ряду і послідовності лінійних операторів, що визначаються деякою трикутною матрицею Λ. Ця матриця задає метод побудови поліномів і визначає конкретний метод підсумовування рядів Фур'є. Одним з них є регулярний метод, який називається сумами Зігмунда.

Суми Зігмунда були введені А. Зігмундом в 1945 році. Він же довів деякі твердження, які встановлювали точні порядкові оцінки верхніх граней відхилень цих сум на класах r-диференційовних функцій для дробових r.

Дослідження Зігмунда були продовжені Б. Надем, С. А. Теляковським, А. В. Єфимовим, О. І. Степанцем, Д. М. Бушевим та ін.

У статті отримано точні порядкові оцінки верхніх граней відхилень сум Зігмунда від нескінченно-диференційовних функцій в інтегральній метриці.

