

## ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ АЛГОРИТМІВ ОПТИМАЛЬНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ ЗА ТОЧНІСТЮ ОТРИМАННЯ НАВІГАЦІЙНОГО РІШЕННЯ

A comparative analysis of the classical Kalman filter algorithm and one of its modification (modification of Andrews) is held. The aim of analysis is the information to be obtained about both algorithms of linear systems optimal estimation in the plane of navigation solution accuracy.

**Keywords:** *navigation solution, Kalman filter, covariance, state vector, measurement vector, correlation matrix, extrapolation.*

Проведено порівняльний аналіз класичного фільтра Калмана та однієї з його модифікацій (модифікація Ендрюса) з метою отримання інформації щодо характеристик точності алгоритмів оптимального оцінювання лінійних систем.

**Ключові слова:** *навігаційне рішення, фільтр Калмана, коваріація, вектор стану, вектор спостережень, кореляційна матриця, екстраполяція.*

У сучасних навігаційних системах (як супутникових, так і інерціальних) для розв'язання навігаційної задачі широко практикується використання класичного фільтра Калмана, який призначено для рекурсивного дооцінювання вектора стану апріорно відомої динамічної системи.

Необхідним критерієм щодо застосування того чи іншого алгоритму є його характеристики точності. Характеристики точності слід розглядати як точність визначення поточного місцерозташування об'єкта та його швидкості.

В основу алгоритму роботи класичного лінійного фільтра Калмана покладено часове (а не частотне) подання сигналу та використання дискретизованих у часі лінійних динамічних систем. У цьому разі для розрахунку поточного стану системи необхідно мати в наявності поточні вимірювання та володіти інформацією щодо попереднього стану фільтра [1, 4].

**Об'єкти та методи дослідження.** Тепер відомо багато модифікацій алгоритмів фільтра Калмана. Серед них безперервний алгоритм Калмана, випадок з “кольоровими” шумами у спостереженнях та згладжувальні алгоритми. Відомі модифікації класичного фільтра Калмана, в основу яких покладено використання квадратних коренів з матриць [2]:

- модифікація Поттера;
- модифікація Ендрюса;
- модифікація Беллантаїні і Доджа;
- модифікація Карлсона;
- модифікація Бірмана;
- модифікація Джозефа.

У науковій літературі зазначається, що модифікації класичного фільтра Калмана, в основі яких лежить використання квадратних коренів з матриць, мають кращі характеристики точності [2].

**Постановка завдання.** Мета цієї роботи – порівняльний аналіз класичного фільтра Калмана і однієї з його модифікацій в частині точності отримання навігаційного рішення. Для проведення порівняльного аналізу було обрано модифікацію Ендрюса.

Класичний лінійний фільтр Калмана є різновидом рекурсивних фільтрів. Для оцінювання стану системи фільтром у поточний момент часу необхідно мати оцінку стану системи на попередньому етапі і поточні результати вимірювання стану системи. Стан фільтра задається двома змінними:

– апостеріорною оцінкою стану системи в момент часу  $k$ , яку одержують за результатами спостережень;

– апостеріорною коваріаційною матрицею похибок, які задають оцінку точності отриманої оцінки вектора стану і містять оцінку дисперсій похибки обчисленого стану і коваріації, тим самим демонструючи рівень взаємозв'язку між параметрами стану системи.

Робота фільтра Калмана складається з двох основних етапів: екстраполяції та корекції екстрапольованої величини з врахуванням значень, що спостерігаються. На етапі екстраполяції фільтр отримує попередню оцінку стану системи на поточний крок за підсумковою оцінкою стану з попереднього кроку. Отриману оцінку називають апріорною оцінкою стану. Для її отримання не використовують спостереження на відповідному кроці. На етапі корекції апріорна екстраполяція доповнюється поточними вимірюваннями (спостереженнями) для уточнення екстрапольованої раніше оцінки. Отримана в результаті корекції поточними вимірами величина є апостеріорною оцінкою вектора стану системи. Апостеріорна оцінка вектора стану є результатом роботи фільтра, яку використовують як апріорну на наступному етапі [3].

Чергуючи етапи екстраполяції та корекції, фільтр дає змогу оцінювати вектор стану в реальному часі.

Представлений алгоритм оцінки вектора стану системи за допомогою класичного лінійного фільтра Калмана може бути використано у складі навігаційного устаткування транспортних засобів (автівок), авіаційному обладнанні тощо. Саме тому *необхідно оцінити класичний та добре відомий алгоритм у порівнянні з деякими можливими модифікаціями*, щоб визначити, який саме тип фільтра оптимально підходить для використання у навігаційній апаратурі.

**Результати та їх обговорення.** Вектор стану є за своєю структурою вектор-стовпцем, та являє собою набір величин, що визначають стан системи. У цьому випадку (для використання на одному з видів транспортних засобів) вектор стану буде включати в себе місцезозташування, швидкість, прискорення:

$$X = (x_k \quad y_k \quad x'_k \quad y'_k \quad x''_k \quad y''_k)^T. \quad (1)$$

Набір вимірювань, які використовують для оцінювання параметрів руху, аналогічний за структурою до вектора стану і має назву вектор спостережень. На відміну від вектора стану, вектор спостережень формується з реальних величин, які отримують від датчиків. У разі необхідності (або за наявності тих чи інших типів датчиків) вектор спостережень може змінювати свою розмірність. Точність оцінки знижується із зменшенням розмірності вектора спостереження. Фізично це означає відмову одного або декількох типів датчиків або взагалі вилучення його із системи. У цьому випадку ентропія всієї системи збільшується, знижуючи точність оцінювання. Розмірність вектора спостережень для мінімального значення ентропії системи повинна дорівнювати розмірності вектора стану:

$$Y = (x_k \quad y_k \quad x'_k \quad y'_k \quad x''_k \quad y''_k)^T. \quad (2)$$

Вектор стану та вектор спостережень утворюють множини, які називають просторами. Кожен вектор можна зобразити як точку у відповідному просторі. Кожна з точок відповідатиме стану системи в певний момент часу, її можна буде описати координатами, швидкістю і прискоренням. Кожному можливому стану системи відповідає тільки одна точка в просторі вимірювань. Всі такі точки утво-

рюють у просторі вимірювань підпростір. У цьому підпросторі всі показники датчиків, істинні і дублюючі, матимуть однакові значення. Цей підпростір є ізоморфним (еквівалентним) щодо простору станів. Зв'язок між простором станів і підпростором істинних вимірювань зазвичай відомий і описується функцією, яка визначає закономірність цьому зв'язку:

$$z = h(x) . \quad (3)$$

У випадку, коли функція  $h$  лінійна, то її можна записати як множення на матрицю постійних коефіцієнтів:

$$z = H \times x , \quad (4)$$

де  $H$  – часткова похідна від  $h$  по  $x$ , яку називають матрицею вимірювань.

Під час проведення вимірювань місцезоташування, швидкості і прискорення об'єкта матриця вимірювань є одиничною діагональною матрицею [1, 4]:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad \text{Тоді } z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ x'_k \\ y'_k \\ x''_k \\ y''_k \end{pmatrix} . \quad (5)$$

Матриця переходу від вимірювання до вимірювання:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t & 0 & \frac{\Delta t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (6)$$

Етап екстраполяції вектора стану системи:

$$\begin{cases} X_k = A_{k-1} \times X_{k-1}, \\ P_k = A_{k-1} \times P_{k-1} \times A_{k-1}^T + Q_{Xk-1}, \\ \Delta t = T - T_0 . \end{cases} \quad (7)$$

Етап корекції екстраполяції вектора стану системи:

$$\begin{cases} V_k = Y_k - H_k \times X_{k-1}, \\ S_k = H_k \times P_k \times H_k^T + R_k, \\ K_k = P_k \times H_k^T / S_k ; \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} X_{k+1} = X_k + K_k \times V, \\ P_{k+1} = P_k - K_k \times S_k \times K_k^T. \end{cases} \quad (9)$$

Модель алгоритму зображено на рис. 1.

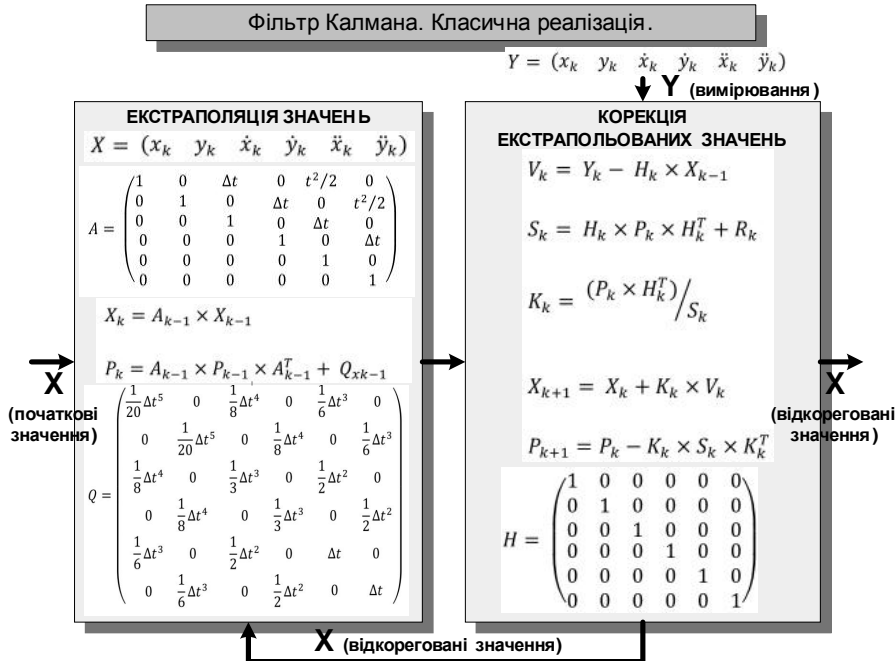


Рис. 1. Модель алгоритму класичного фільтра Калмана.

Використання алгоритму фільтрації на основі класичного лінійного фільтра Калмана для розв'язування практичних завдань (оцінка параметрів руху об'єкта) за допомогою центрального процесора навігаційного приймача не завжди можливе через несумісність програмного забезпечення з апаратною частиною стосовно виділення ресурсів процесора. Процесори навігаційних пристроїв не є ідеально точними обчислювальними пристроями і мають індивідуальні для кожного процесора похибки округлення. Ці розбіжності можуть бути суттєві, що має принципове значення для прийняття рішення щодо доцільності використання результатів роботи алгоритмів оцінювання та ступеня довіри до цих результатів.

Подібні відмінності можуть виникати через:

- втрату позитивної визначеності умовної кореляційної матриці;
- погану обумовленість під час знаходження обернених матриць.

Також сама процедура отримання обернених матриць (особливо це стосується матриць великої розмірності) є трудомістким завданням для процесорів навігаційних пристроїв (наприклад, для 3D-завдань необхідно оперувати матрицями розмірністю 18 на 18 під час фільтрації всіх трьох компонент, що описують рух об'єкта). Відповідно, втрата позитивної визначеності коваріаційними матрицями на етапах екстраполяції і корекції екстраполяції (матриці  $P_k$  і  $P_{k+1}$ ) може статися у двох випадках:

- під час формування апостеріорної кореляційної матриці за допомогою співвідношення, яке містить віднімання матриць за умови близькості до одиниці будь-якого з діагональних елементів добутку коефіцієнта підсилення фільтра та матриці вимірювань,  $K_k \times H_k$ ;

- за умови округлення матриці прогнозу дисперсії екстрапольованого вектора стану до матриці виду  $A_{k-1} \times P_{k-1} \times A_{k-1}^T$  (округлення фізично означає, що на

етапі екстраполяції не враховується шум системи), і близькості якого-небудь з діагональних елементів цієї матриці до нуля.

Погана обумовленість обернених матриць також може бути під час проведення точних вимірювань, тобто, коли  $R_k = 0$ , а також під час проведення у короткій час послідовності неточних вимірювань, які суттєво впливають на корекцію екстраполяції оцінки вектора стану системи.

Для подолання зазначених труднощів можливе використання методів розщеплення вимірювань, введення різних ваг вимірювань та інших модифікацій.

Основним методом для реалізації всіх модифікацій алгоритму Калмана є метод фільтрації на основі використання квадратних коренів з матриць. Така процедура дає змогу зберегти позитивну визначеність кореляційної матриці параметрів, що оцінюються. Головна ідея методу:

– екстрапольовану та апостеріорну кореляційні матриці оцінюваних параметрів подають у вигляді добутку деяких невивіржених матриць на транспоновані щодо них матриці;

– співвідношення для розрахунку кореляційних матриць і коефіцієнта підсилення фільтра замінюють еквівалентними співвідношеннями, які дають змогу гарантувати позитивну визначеність кореляційних матриць.

В [2] описано використання модифікації класичного фільтра Калмана, розробленої Ендрюсом. Використання цієї модифікації дає можливість уникнути трудомісткої процедури знаходження обернених матриць, що теоретично має знизити навантаження на процесор навігаційного пристрою. Модифікація Ендрюса припускає наявність у системі шуму системи для векторних вимірювань параметрів оцінки. Головною ідеєю модифікації є представлення обох коваріаційних матриць у вигляді добутків двох матриць – нижньотрикутної ( $S_{k-1}, S_k, S_{k+1}$ ) та верхньотрикутної ( $S_{k-1}^T, S_k^T, S_{k+1}^T$ ):

$$P_{k-1} = S_{k-1} \times S_{k-1}^T, \quad P_k = S_k \times S_k^T, \quad P_{k+1} = S_{k+1} \times S_{k+1}^T. \quad (10)$$

Подібне розкладання має назву розкладання Холецького і являє собою знаходження квадратного кореня з матриці.

Етап екстраполяції вектора стану системи:

$$\begin{cases} X_k = A_{k-1} \times X_{k-1}, \\ P_{k-1} = S_{k-1} \times S_{k-1}^T; \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \Phi_k = A_{k-1} \times S_{k-1}, \\ S_k = (\Phi_k \times \Phi_k^T + Q_k)^{1/2}, \\ P_k = S_k \times S_k^T. \end{cases} \quad (12)$$

Етап корекції екстраполяції вектора стану системи:

$$\begin{cases} F_k = S_k^T \times H_k^T, \\ G_k = (F_k^T \times F_k + R_k)^{1/2}, \\ B_k = R_k^{1/2}; \end{cases} \quad (13)$$

$$V_k = Y_k - H_k \times X_{k-1}, \quad (14)$$

$$K_k = S_k \times F_k \times (G_k^T)^{-1} \times G_k^{-1}, \quad (15)$$

$$S_{k+1} = S_k \times [E_k - F_k \times (G_k^T)^{-1} \times (G_k + B_k)^{-1} \times F_k^T], \quad (16)$$

$$\begin{cases} X_{k+1} = X_k + K_k \times V_k, \\ P_{k+1} = S_{k+1} \times S_{k+1}^T. \end{cases} \quad (17)$$

Загальну модель алгоритму зображено на рис. 2.

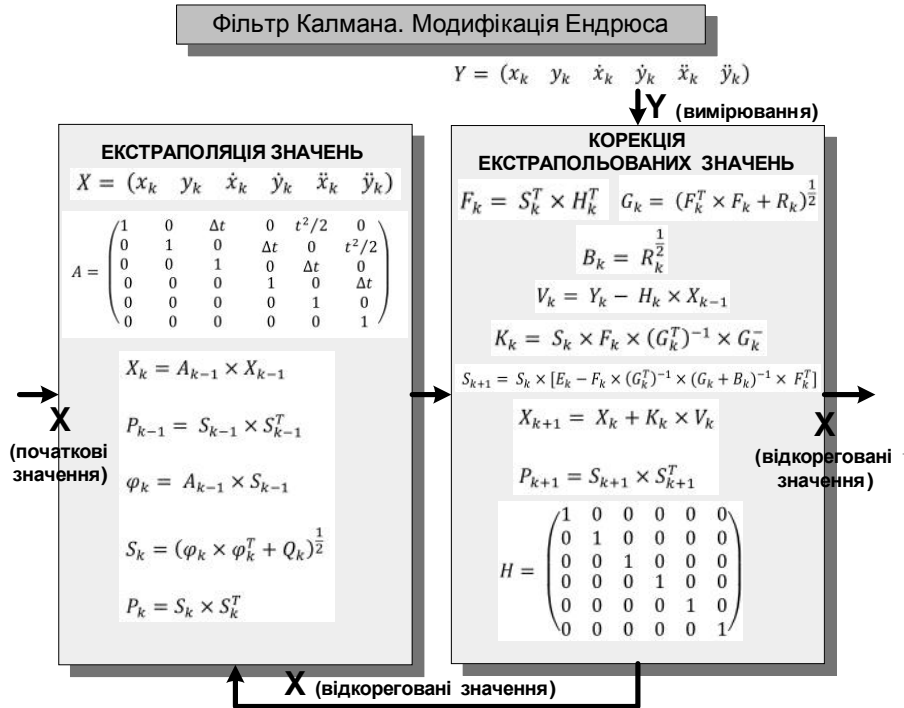


Рис. 2. Модель алгоритму модифікованого фільтра Калмана (модифікація Ендрюса).

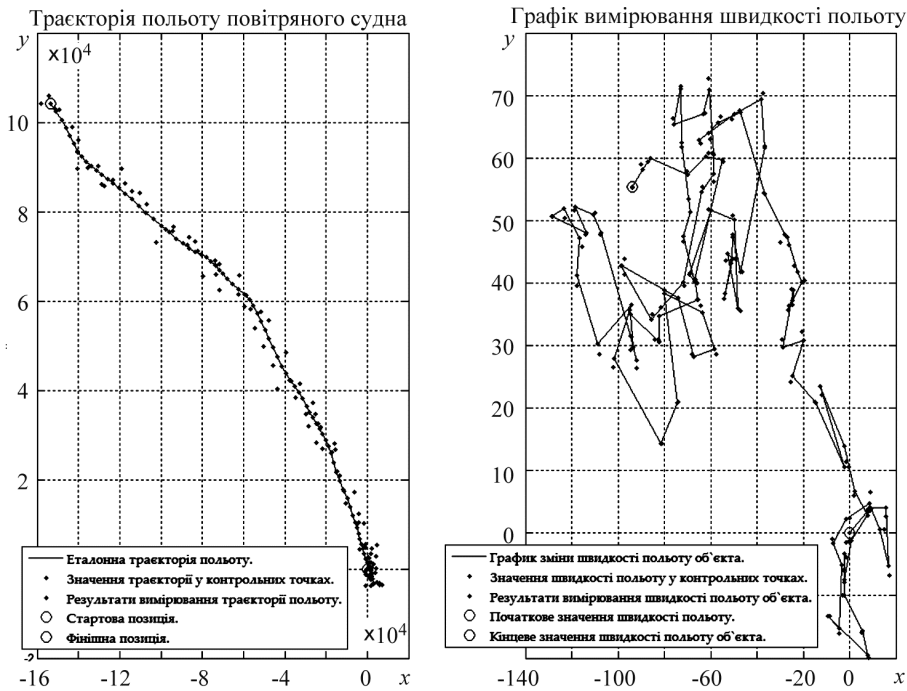


Рис. 3. Траекторія руху об'єкта у площині (політ повітряного судна).

Описана модифікація не вимагає діагоналізації і вилучення з обробки шуму системи. Однак їй властиві такі недоліки:

- втрата матрицею  $S_{k+1}$  трикутного вигляду на етапі корекції. На кожному кроці обчислень цю матрицю необхідно підносити до квадрата, а потім добувати квадратний корінь з добутку  $S_{k+1} \times S_{k+1}^T$  за допомогою розкладання Холецького;

- збільшення необхідного обсягу пам'яті процесора навігаційної апаратури та кількості обчислень порівняно з класичним фільтром Калманом.

Для проведення порівняльного аналізу запропонованих методик фільтрації, що є метою роботи, було проведено моделювання руху об'єкта (рис. 3, політ впродовж 3000 с з проведенням вимірювань кожні 30 с). Отримані в результаті моделювання руху дані псевдотраєкторних вимірювань піддано обробці обома алгоритмами: класичним та модифікованим (рис. 4). З метою зменшення похибки в оцінці стану системи було проведено постобробку оцінених даних (рис. 5). Постобробку виконано згладжувальним алгоритмом RTS (Rauch-Tung-Striebel Smoother).

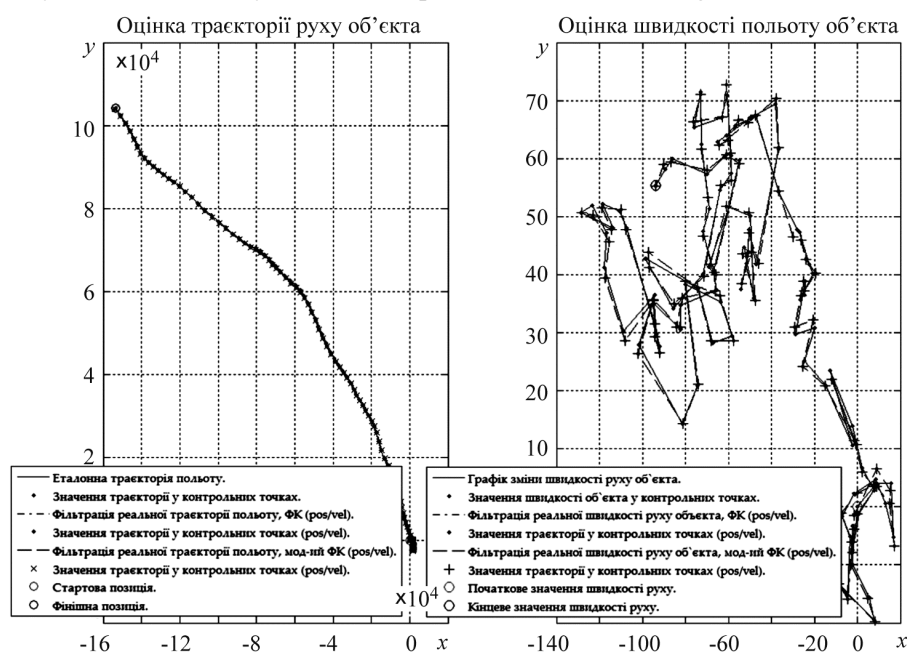


Рис. 4. Оцінка траєкторії руху об'єкта та його швидкості у площині за допомогою фільтрів.

Середньоквадратичні похибки обох фільтрів та середньоквадратичні похибки постобробки результатів фільтрації наведено у таблиці.

#### Середньоквадратичні похибки фільтрів та результатів постобробки

Похибки	Місцерозташування	Швидкість
KF RMS error	124114.7953357	0.6806198
KF-RTS RMS error	33811.1252828	0.6611243
KF (ANDREWS) RMS error	124114.7953371	0.6806198
KF-RTS (ANDREWS) RMS error	33811.1252844	0.6611243

Місцерозташування об'єкта, траєкторію руху якого змодельовано, вимірювали у метрах, швидкість – у метрах за секунду. Значення дисперсій вимірювань параметрів під час використання фільтрів задають опціонально, відповідно до значень похибок наявної апаратури.

Щодо характеристик точності фільтрів, порівняння яких є метою проведення дослідження, то вони ідентичні як за координатами, так і за швидкістю. З огляду

на це можна стверджувати, що переваг щодо точності ця модифікація не має. Класичний алгоритм у цьому випадку не поступається за рівнем дисперсії модифікованому. Але необхідно зазначити, що гіпотетично модифікований алгоритм може знизити навантаження на процесор навігаційного пристрою внаслідок усунення з алгоритму необхідної процедури отримання обернених матриць. Саме цю гіпотезу необхідно оцінити та дослідити на наступному етапі досліджень модифікацій фільтра Калмана та їх практичного застосування у навігаційній апаратурі користувача.

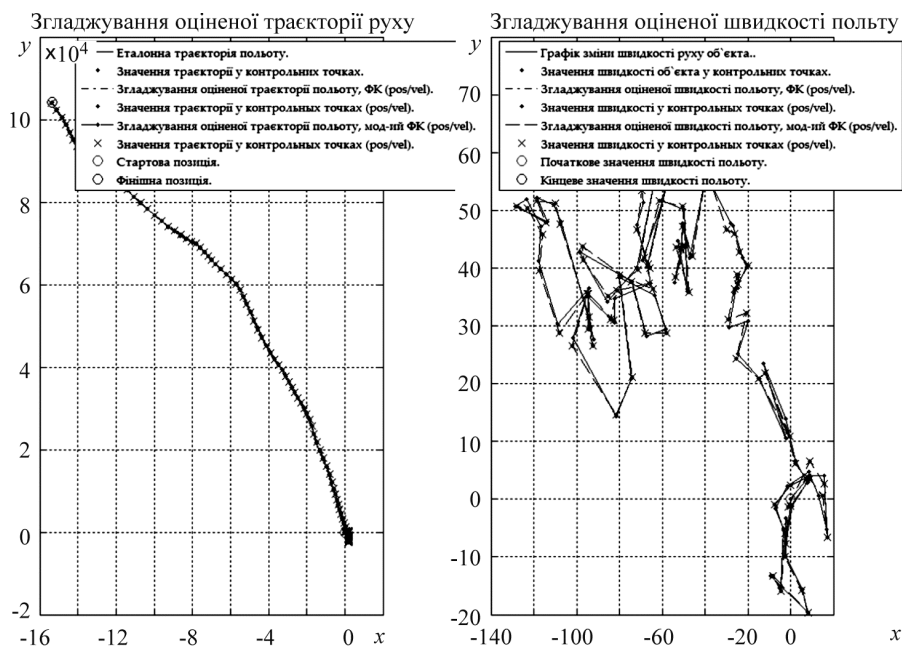


Рис. 5. Згладжування оціненої траєкторії та вимірної швидкості за допомогою Rauch-Tung-Striebel Smoother.

## ВИСНОВКИ

Проведено порівняльний аналіз класичного фільтра Калмана з однією з його модифікацій, а саме модифікації Ендрюса. За мету дослідження ставили з'ясувати, чи має модифікація переваги перед класичним алгоритмом щодо точності визначення координат та швидкості. Припущення, що модифікація дає змогу отримати менші середньоквадратичні похибки, ніж класичний фільтр унаслідок збереження позитивної визначеності кореляційної матриці параметрів, що оцінювались, виявилось таким, що не відповідає дійсності. На підставі вищезазначеного та наведених результатів моделювання можна стверджувати, що немає ніяких передумов для використання модифікації Ендрюса в апаратурі.

З огляду на це, для використання в апаратурі рекомендується добре вивчений та апробований на практиці класичний алгоритм фільтра Калмана.

1. Балакришнан А. В. Теория фильтрации Калмана. Пер. с англ. – М: Мир, 1988. – С. 71–156.
2. Огарков М. А. Методы статистического оценивания параметров случайных величин. – М: Энеоатомиздат, 1990. – 207 с.
3. Chui C. K., Chen G. Kalman Filtering with Real-Time Applications, Fourth Edition. – Springer-Verlag Berlin, 2009. – 229 p.
4. Mohinder S. Grewal, Angus P. Andrews. Kalman Filtering: Theory and Practice using Matlab, Second Edition. – Wiley & Sons Interscience, 2001. – P. 114–165.