МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ СИГНАЛІВ ТА СИСТЕМ

УДК 621.77(088.8)

І. М. Яворський, І. Б. Кравець, І. Й. Мацько

ВЛАСТИВОСТІ ВЗАЄМОСПЕКТРАЛЬНИХ ГУСТИН СТАЦІОНАРНИХ КОМПОНЕНТІВ ПЕРІОДИЧНО НЕСТАЦІОНАРНИХ ВІБРАЦІЙНИХ СИГНАЛІВ

The cross spectral density properties of periodically correlated random processes stationary components are analyzed. Their representation throw the auto- and crosscorrelation functions of quadrature components is considered. The formula for coherent function is concretized.

Keywords: *periodically correlated random process, cross-spectral density, coherent function.*

Проаналізовано властивості взаємоспектральних густин стаціонарних компонентів періодично корельованих випадкових процесів – математичної моделі вібраційних сигналів. Розглянуто їх подання через авто- і взаємокореляційні функції квадратурних складових. Конкретизовано формулу для функції когерентності.

Ключові слова: *періодично корельований випадковий процес, взаємоспектральна густина, функція когерентності.*

Аналіз вібраційних сигналів обертових вузлів механічних систем на основі їх математичної моделі у вигляді періодично корельованих випадкових процесів (ПКВП) створює нові можливості у технічній діагностиці [1, 2]. Використання як діагностичних ознак характеристик періодичної нестаціонарності уможливлює виявлення дефектів на ранніх стадіях їх розвитку. Важлива інформація про дефекти механічних систем пов'язана з характеристиками амплітудної та фазової модуляції основних гармонічних складових вібросигналу. Випадкові процеси, що описують цю модуляцію, формують кореляційну та спектральну структуру ПКВП. Це випливає з його гармонічного представлення

$$\xi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_k(t) e^{ik\omega_0 t} ,$$

де $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$, T – період корельованості, а $\xi_k(t)$ – стаціонарно зв'язані випадкові процеси. Для реального вібраційного сигналу число гармонічних складових є скінченим, тому надалі будемо виходити з представлення

$$\xi(t) = \sum_{k=-L}^{L} \xi_k(t) e^{ik\omega_0 t} , \qquad (1)$$

де L – деяке натуральне число. Для математичного сподівання випадкового процесу (1) маємо

$$m(t) = E\xi(t) = \sum_{k=-L}^{L} m_k e^{ik\omega_0 t} ,$$

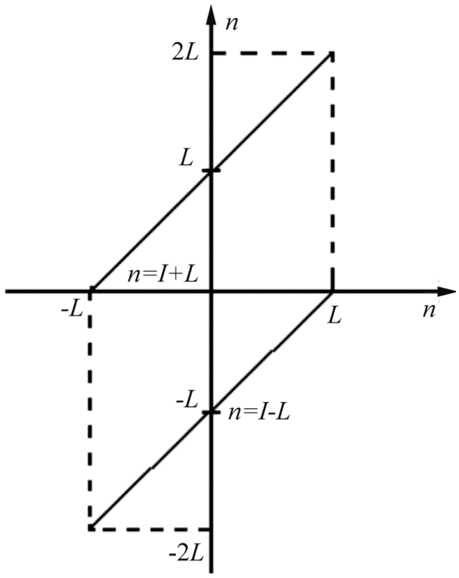
де E – оператор усереднення за густиною імовірності, а $m_k = E\xi_k(t)$. А для кореляційної функції $b(t,u) = E\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\xi}(t+u)$, де $\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - m(t)$, тоді

$$b(t,u) = \sum_{k,l=-L}^{L} R_{kl}(u) e^{i(l-k)\omega_0 t} e^{il\omega_0 u} ,$$

у цьому разі $R_{kl}(u)=E\,\overline{\overset{\circ}{\xi}}(t)\,\overset{\circ}{\xi}(t+u)$, де "–" – знак спряження, а $\overset{\circ}{\xi}_k(t)=\xi_k(t)-m_k$.

Після введення нового індексу сумування $n=l-k$ (див. рисунок) отримуємо

$$b(t,u)=\sum_{l=-L}^{L}\sum_{n=l-L}^{l+L}R_{l-n,l}(u)e^{il\omega_0 u}e^{in\omega_0 t}=$$
$$=\sum_{n=-2L}^{0}e^{in\omega_0 t}\sum_{l=n-L}^{n+L}R_{l-n,l}(u)e^{il\omega_0 u}+$$
$$+\sum_{n=0}^{2L}e^{im\omega_0 t}\sum_{l=n-L}^{L}R_{l-n,l}(u)e^{il\omega_0 u}=$$
$$=\sum_{n=-2L}^{2L}B_n(u)e^{in\omega_0 t},$$



Зміна індексу сумування.

де

$$B_n(u)=\begin{cases}\sum\limits_{l=n-L}^{L}R_{l-n,l}(u)e^{il\omega_0 u}, & n\ge 0,\\ \sum\limits_{l=-L}^{n+L}R_{l-n,l}(u)e^{il\omega_0 u}, & n<0.\end{cases}$$

Нульовий кореляційний компонент $B_0(u)$ формується автокореляційними функціями стаціонарних компонентів $\xi_k(t)$, а кореляційні компоненти номера n – взаємокореляційними функціями процесів, номери яких зсунуті на n. Припустимо, що кореляційні функції стаціонарних компонентів $\xi_k(t)$ є абсолютно інтегрованими, тобто

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|R_{kl}(u)|\,du<\infty,\quad \forall k\in[-L;L]\bigcap l\in[-L;L]. \tag{2}$$

тоді існують функції

$$f_{kl}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}R_{kl}(u)e^{-i\omega u}du, \tag{3}$$

які називають, якщо $k=l$ спектральними густинами потужності, а в інших випадках – взаємоспектральними густинами.

За умови (2) абсолютно інтегрованими будуть і кореляційні компоненти, тому для такого ПКВП існують спектральні компоненти

$$f_n(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}B_n(u)e^{-i\omega u}du.$$

Для них, виходячи з (3), маємо

$$f_n(\omega)=\begin{cases}\sum\limits_{l=-L}^{n+L}f_{l-n,l}(\omega-l\omega_0), & n<0,\\ \sum\limits_{l=n-L}^{L}f_{l-n,l}(\omega-l\omega_0), & n\ge 0\end{cases}$$

Нульовий спектральний компонент

$$f_0(\omega) = \sum_{l=-L}^{L} f_{ll}(\omega - l\omega_0)$$

є дійсною функцією, а інші – комплекснозначними. Вони формуються на основі взаємоспектральних густин стаціонарних компонентів. Проаналізуємо коротко властивості цих компонентів, а також величини, що ними визначаються.

Для кореляційної функції комплекснозначного випадкового процесу $\zeta(t) = \zeta_c(t) - i\zeta_s(t)$ легко знаходимо

$$R_\zeta(u) = E\,\overline{\overset{\circ}{\zeta}}(t)\overset{\circ}{\zeta}(t+u) = E\left[\zeta_c(t) + i\zeta_s(t)\right]\left[\zeta_c(t+u) - i\zeta_s(t+u)\right] =$$
$$= R_\zeta^c(u) + R_\zeta^s(u) + i\left[R_\zeta^{sc}(u) - R_\zeta^{cs}(u)\right].$$

Тут $R_\zeta^{c,s}(u) = E\,\overset{\circ}{\zeta}{}^{c,s}(t)\overset{\circ}{\zeta}{}^{c,s}(t+u)$, $R_\zeta^{cs}(u) = E\,\overset{\circ}{\zeta}{}^{c}(t)\overset{\circ}{\zeta}{}^{s}(t+u)$, $R_\zeta^{sc}(u) = E\,\overset{\circ}{\zeta}{}^{s}(t)\overset{\circ}{\zeta}{}^{c}(t+u)$. Врахувавши, що $R_\zeta^{c,s}(-u) = R_\zeta^{c,s}(u)$, $R_\zeta^{cs}(-u) = R_\zeta^{sc}(u)$, доходимо висновку, що дійсна частина кореляційної функції комплексно-значного випадкового процесу є парною функцією зсуву, а уявна частина – непарною. Для спектральної густини процесу маємо

$$f_\zeta(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_\zeta(u)e^{-i\omega u}du = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0} R_\zeta(u)e^{-i\omega u} + \int_{0}^{\infty} R_\zeta(u)e^{-i\omega u}\right] =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left[R_\zeta(-u)e^{i\omega u} + R_\zeta(u)e^{-i\omega u}\right]du\,.$$

Оскільки $R_\zeta(u) = \overline{R}_\zeta(-u)$, то

$$f_\zeta(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\left[R_\zeta^c(u) + R_\zeta^s(u)\right]\cos\omega u + \left[R_\zeta^{sc}(u) - R_\zeta^{cs}(u)\right]\sin\omega u\right]du\,.$$

Очевидно, що $f_\varsigma(\omega) \geq 0$ і $f_\varsigma(-\omega) = f_\zeta(\omega)$.

Припустимо, що випадковий процес $\varsigma(t)$ є лінійною комбінацією випадкових процесів $\xi_k(t)$:

$$\zeta(t) = \sum_{k=0}^{L}\alpha_k\xi_k(t)\,.$$

Звідси

$$R_\zeta(u) = \sum_{i,k=0}^{L}\alpha_i\overline{\alpha}_k R_{ki}(u)$$

і

$$f_\zeta(\omega) = \sum_{i,k=0}^{L}\alpha_i\overline{\alpha}_k\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_{ik}(u)e^{-i\omega u}du\right] = \sum_{i,k=0}^{L}\alpha_i\alpha_k f_{ik}(\omega)$$

Оскільки $f_\zeta(\omega) \geq 0$, то

$$\sum_{i,k=0}^{L}\alpha_i\overline{\alpha}_k f_{ik}(\omega) \geq 0\,.$$

Ця нерівність справедлива для будь-яких комплексних чисел α_k. Покладемо, для $k \neq r$ і $k \neq p$, де r і p – цілі числа, що належать до інтервалу $[0; L]$, всі $\alpha_k = 0$. Тоді одержимо нерівність

$$\alpha_r \overline{\alpha}_r f_{rr}(\omega) + \alpha_r \overline{\alpha}_p f_{rp}(\omega) + \alpha_p \overline{\alpha}_r f_{pr} + \alpha_p \overline{\alpha_p} f_{pp}(\omega) \geq 0 .$$

Покладемо тепер $\alpha_r = 1$, $\alpha_p = 0$:

$$f_{rr}(\omega) \geq 0 ,$$

а коли $\alpha_r = 0$, $\alpha_p = 1$, то отримуємо:

$$f_{pp} 9\omega) \geq 0 .$$

Вибравши

$$\alpha_r = \sqrt{f_{pp}(\omega) f_{pr}(\omega)} , \qquad \alpha_p = \sqrt{f_{rr}(\omega) f_{rp}(\omega)}$$

і врахувавши, що

$$\alpha_r \overline{\alpha}_r = f_{pp}(\omega) \,|\, f_{pr}(\omega) \,| , \qquad \alpha_p \overline{\alpha}_p = f_{rr}(\omega) \,|\, f_{rp}(\omega) \,| ,$$

$$\alpha_r \overline{\alpha}_p = -\sqrt{f_{rr}(\omega) f_{pp}(\omega) f_{pr}(\omega) \overline{f}_{rp}(\omega)} , \quad \alpha_p \overline{\alpha}_r = -\sqrt{f_{rr}(\omega) f_{pp}(\omega) f_{rp}(\omega) \overline{f}_{pr}(\omega)} ,$$

маємо

$$f_{pp}(\omega) \left| f_{pr}(\omega) \right| f_{rr}(\omega) + f_{rr}(\omega) \left| f_{rp}(\omega) \right| f_{pp}(\omega) -$$
$$-\sqrt{f_{rr}(\omega) f_{pp}(\omega)} \left[\sqrt{f_{pr}(\omega) \overline{f}_{rp}(\omega)} f_{rp}(\omega) + \sqrt{f_{rp}(\omega) \overline{f}_{pr}(\omega)} f_{pr}(\omega) \right] \geq 0 .$$

З формули (4) випливає, що

$$\overline{f}_{rp}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{R}_{rp}(u) e^{i\omega u} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{pr}(-u) e^{i\omega u} du = f_{pr}(\omega) .$$

Тоді

$$f_{pp}(\omega) f_{rr}(u) \left| f_{pr}(\omega) \right| - \sqrt{f_{rr}(\omega) f_{pp}(\omega)} \left| f_{rp}(\omega) \right|^2 \geq 0 .$$

Після скорочення одержимо

$$|\, f_{rp}(\omega) \,|^2 \leq f_{rr}(\omega) f_{pp}(\omega) . \tag{4}$$

Ця нерівність є сильнішою за кореляційну

$$|\, R_{rp}(u) \,|^2 \leq R_{rr}(0) R_{pp}(0) ,$$

оскільки кореляційна нерівність обмежує значення кореляційної функції для довільних зсувів відносно значень автокореляційної функції в нулі, а нерівність (4) справедлива для довільних значень частот як лівої, так і правої її сторін. Це, зокрема, означає, що взаємоспектральна густина завжди дорівнює нулю для тих частот, для яких спектральна густина потужності одного з процесів приймає нульові значення. З формули

$$R_{kl}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{kl}(\omega) e^{i\omega u} du$$

випливає, що корельованими можуть бути тільки ті стаціонарні компоненти, спектри яких перекриваються.

Наведемо ще одну формулу для взаємоспектральних густин, яка пов'язує їх значення у від'ємній області частот зі значеннями в додатній:

$$f_{kl}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_{kl}(u)e^{i\omega u}du=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_{kl}(-u)e^{-i\omega u}du=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_{lk}(u)e^{-i\omega u}du=f_{lk}(\omega)=\overline{f}_{kl}(\omega).$$

Для дійсних ПКВП гармонічне представлення (1) може бути записане у в дійсній формі. Виділимо для кожного ненульового стаціонарного компонента дійсну і уявну частини: $\xi_k(t)=\frac{1}{2}\left[\xi_k^c(t)-i\xi_k^s(t)\right]$. Взявши до уваги, що $\xi_{-k}(t)=$ $=\overline{\xi}_k(t)$, отримуємо

$$\xi(t)=\xi_0(t)+\sum_{k=1}^{L}\left[\xi_k^c(t)\cos k\omega_0 t+\xi_k^s\sin k\omega_0 t\right].$$

Виразимо взаємоспектральні густини $f_{kl}(\omega)$ через спектральні густини квадратурних складових $\xi_k^c(t)$ і $\xi_k^s(t)$. Для взаємокореляційних функцій $R_{kl}(u)$ маємо

$$R_{kl}(u)=E\overline{\overset{\circ}{\xi}}_k(t)\overset{\circ}{\xi}_l(t+u)=\frac{1}{4}E\left\{\left[\overset{\circ}{\xi}{}_k^c(t)+i\overset{\circ}{\xi}{}_k^s(t)\right]\left[\overset{\circ}{\xi}{}_k^c(t+u)+i\overset{\circ}{\xi}{}_k^s(t+u)\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{4}\left[R_{kl}^c(u)+R_{kl}^s(u)-i\left[R_{kl}^{cs}(u)-R_{kl}^{sc}(u)\right]\right]. \tag{5}$$

Очевидно, що $R_{kl}^{c,s}(u)=R_{lk}^{c,s}(-u)$, $R_{kl}^{cs}(u)=R_{lk}^{sc}(-u)$. Звідси для автокореляційних функцій отримуємо

$$R_{ll}(u)=\frac{1}{4}\left[R_{ll}^c(u)+R_{ll}^s(u)-i\left[R_{ll}^{cs}(u)-R_{ll}^{sc}(u)\right]\right].$$

Дійсна частина цієї функції є парною функцією зсуву, а уявна – непарною. Подамо взаємокореляційну функцію $R_{ll}^{cs}(u)$ у вигляді суми парної $\tilde{R}_{ll}^{cs}(u)$ і непарної $\tilde{\tilde{R}}_{ll}^{cs}(u)$ частин: $R_{ll}^{cs}(u)=\tilde{R}_{ll}^{cs}(u)+\tilde{\tilde{R}}_{ll}^{cs}(u)$. Тоді

$$R_{ll}(u)=\frac{1}{4}\left[R_{ll}^c(u)+R_{ll}^s(u)-2i\tilde{\tilde{R}}_{ll}^{cs}(u)\right].$$

Врахувавши цей вираз, для спектральної густини $f_{ll}(\omega)$ знаходимо

$$f_{ll}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_{ll}(u)e^{-i\omega u}du=\frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[R_{ll}^c(u)+R_{ll}^s(u)-2iR_{ll}^{cs}\right](\cos\omega u-i\sin\omega u)\,du=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\left[R_{ll}^c(u)+R_{ll}^s\right]\cos\omega u-2\tilde{\tilde{R}}_{ll}^{cs}(u)\sin\omega u\right]du. \tag{6}$$

Взявши до уваги співвідношення (5), для взаємоспектральних густин $f_{kl}(\omega)$ маємо

$$f_{kl}(\omega)=\frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left[R_{kl}^c(u)+R_{kl}^s(u)\right]-i\left[R_{kl}^{cs}(u)-R_{kl}^{sc}(u)\right]\right](\cos\omega u-i\sin\omega u)\,du=$$

$$=\frac{1}{8\pi}\left[\begin{array}{l}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\left[R_{kl}^{c}(u)+R_{kl}^{s}(u)\right]\cos\omega u+\left[R_{kl}^{cs}(u)-R_{kl}^{sc}(u)\right]\sin\omega u\right]du-\\-i\int\limits_{\infty}^{\infty}\left[\left[R_{kl}^{c}(u)+R_{kl}^{s}(u)\right]\sin\omega u+\left[R_{kl}^{cs}(u)-R_{kl}^{sc}(u)\right]\cos\omega u\right]du\end{array}\right]. \tag{7}$$

Дійсна $\text{Re}\{f_{kl}(\omega)\}$ і уявна $\text{Im}\{f_{kl}(\omega)\}$ частина задовольняють рівності: $\text{Re}\{f_{kl}(-\omega)\}=\text{Re}\{f_{lk}(\omega)\}$, $\text{Im}\{f_{kl}(-\omega)\}=-\text{Im}\{f_{lk}(\omega)\}$.

Комплекснозначну функцію $f_{kl}(\omega)$ можна подати у показниковій формі

$$f_{kl}(\omega)=\left|f_{kl}(\omega)\right|e^{i\varphi_{kl}(\omega)},$$

де

$$|f_{kl}(\omega)|=\sqrt{[\text{Re}(f_{kl}(\omega))]^2+[\text{Im}(f_{kl}(\omega))]^2}, \quad \varphi_{kl}(\omega)=\text{arctg}\frac{\text{Im}\{f_{kl}(\omega)\}}{\text{Re}\{f_{kl}(\omega)\}}.$$

Величину $|f_{kl}(\omega)|$ називають амплітудним спектром, а $\varphi_{kl}(\omega)$ – фазовим або різницею фаз. Квадрат нормованого амплітудного спектра

$$\gamma_{kl}^2(\omega)=\frac{|f_{kl}(\omega)|^2}{f_{kk}(\omega)f_{ll}(\omega)} \tag{8}$$

називають функцією когерентності (іноді квадратом когерентності [3]). Відповідно до нерівності (8), доходимо висновку, що

$$0\le\gamma_{kl}^2(\omega)\le 1.$$

Легко бачити, що функція когерентності дорівнює одиниці у випадку, коли випадкові процеси $\xi_k(t)$ і $\xi_l(t)$ пов’язані лінійним перетворенням. Насправді, подавши випадковий процес $\xi_l(t)$ у вигляді

$$\xi_l(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}dZ_l(\omega),$$

для процесу $\xi_k(t)$ маємо

$$\xi_k(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}H(i\omega)\,dZ_l(\omega),$$

де $H(i\omega)$ – передавальна функція перетворення. Тоді $f_{kk}(\omega)=|H(i\omega)|^2\ f_{ll}(\omega)$, а $f_{kl}(\omega)=|H(i\omega)|^2\ f_{ll}(\omega)$, а звідси

$$\gamma_{kl}^2(\omega)=\frac{|H(i\omega)|^2\ f_{ll}^2(\omega)}{f_{ll}(\omega)\,|H(i\omega)|^2\ f_{ll}(\omega)}=1.$$

Одиничною функція когерентності буде й у випадку, якщо процеси $\xi_k(t)$ і $\xi_l(t)$ є результатом лінійних перетворень одного й того ж процесу $\eta(t)$:

$$\xi_k(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}H_1(i\omega)\,dZ_\eta(\omega), \quad \xi_l(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}H_2(i\omega)\,dZ_\eta(\omega).$$

Для функції когерентності тоді маємо

$$\gamma_{kl}^2(\omega)=\frac{|H_1(i\omega)|^2|H_2(i\omega)|^2\ f_\eta^2(\omega)}{|H_1(i\omega)|^2\ f_\eta(\omega)|H_2(i\omega)|^2\ f_\eta(\omega)}=1.$$

Якщо функція когерентності є відмінною від нуля, однак меншою від одиниці, то можуть бути такі випадки: а) випадкові сигнали $\xi_k(t)$ і $\xi_l(t)$ спостерігаються на фоні шумів; б) вони пов'язані нелінійними перетвореннями; в) в системі наявні інші впливові процеси. Оскільки під час появи дефектів у обертових вузлах всі перелічені випадки здебільшого трапляються, то використання функції когерентності для їх виявлення може бути досить ефективним [4].

Взявши до уваги співвідношення (6)–(7), формулу (8) перепишемо у більш конкретному вигляді

$$\gamma_{lk}^2(\omega)=\left[\int_{-\infty}^{\infty}[[R_{kl}^c(u)+R_{kl}^s(u)]\cos\omega u+[R_{kl}^{cs}(u)-R_{kl}^{sc}(u)]\sin\omega u]du\right]^2\times$$

$$\times\left[\int_{-\infty}^{\infty}[[R_{ll}^c(u)+R_{ll}^s(u)]\cos\omega u-2\tilde{\tilde{R}}_{ll}^{cs}(u)\sin\omega u]du\right]^{-1}\times$$

$$\times\left[\int_{-\infty}^{\infty}[[R_{kk}^c(u)+R_{kk}^s(u)]\cos\omega u-2\tilde{\tilde{R}}_{kk}^{cs}(u)\sin\omega u]du\right]^{-1}+$$

$$+\left[\int_{-\infty}^{\infty}[[R_{kl}^c(u)+R_{kl}^s(u)]\sin\omega u+[R_{kl}^{cs}(u)-R_{kl}^{sc}(u)]\cos\omega u]du\right]^2\times$$

$$\times\left[\int_{-\infty}^{\infty}[[R_{ll}^c(u)+R_{ll}^s(u)]\cos\omega u-2\tilde{\tilde{R}}_{ll}^{cs}(u)\sin\omega u]du\right]^{-1}\times$$

$$\times\left[\int_{-\infty}^{\infty}[[R_{kk}^c(u)+R_{kk}^s(u)]\cos\omega u-2\tilde{\tilde{R}}_{kk}^{cs}(u)\sin\omega u]du\right]^{-1}.$$

Введемо в розгляд величини

$$f_{kl}^{c,s}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_{kl}^{c,s}(u)e^{-i\omega u}du,\qquad f_{kl}^{cs}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_{kl}^{cs}(u)e^{-i\omega u}du.$$

Запишемо кореляційні функції $R_{kl}^{c,s}(u)$ і $R_{kl}^{cs}(u)$ у вигляді суми парної і непарної складових:

$$R_{kl}^{c,s}(u)=\tilde{R}_{kl}^{c,s}(u)+\tilde{\tilde{R}}_{kl}^{c,s}(u),\qquad R_{kl}^{cs}(u)=\tilde{R}_{kl}^{cs}(u)+\tilde{\tilde{R}}_{kl}^{cs}(u).$$

Тоді

$$f_{kl}^{c,s}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\tilde{R}_{kl}^{c,s}(u)+\tilde{\tilde{R}}_{kl}^{c,s}(u)](\cos\omega u-i\sin\omega u)\,du=\mathrm{Re}\{f_{kl}^{c,s}(\omega)\}-i\,\mathrm{Im}\{f_{kl}^{c,s}(\omega)\},$$

$$f_{kl}^{cs}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\tilde{R}_{kl}^{cs}(u)+\tilde{\tilde{R}}_{kl}^{cs}(u)](\cos\omega u-i\sin\omega u)\,du=\mathrm{Re}\{f_{kl}^{cs}(\omega)\}-i\,\mathrm{Im}\{f_{kl}^{cs}(\omega)\},$$

де

$$\mathrm{Re}\{f_{kl}^{c,s}(\omega)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{R}_{kl}^{c,s}(u)\cos\omega u du,\quad \mathrm{Im}\{f_{kl}^{c,s}(\omega)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\tilde{R}}_{kl}^{c,s}(u)\sin\omega u du,$$

$$\mathrm{Re}\{f_{kl}^{cs}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{R}_{kl}^{cs}(u)\cos\omega u du, \quad \mathrm{Im}\{f_{kl}^{cs}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\tilde{R}}_{kl}^{cs}(u)\sin\omega u du.$$

Взявши до уваги останні співвідношення, а також

$$f_{ll}^{c,s}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{R}_{ll}^{c,s}(u)\cos\omega u du, \ \mathrm{Im}\{f_{ll}^{cs}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\tilde{R}}_{ll}^{cs}(u)\sin\omega u du,$$

для спектральної густини потужності $f_{ll}(\omega)$ і взаємної спектральної густини $f_{kl}(\omega)$ знаходимо

$$f_{ll}(\omega) = \frac{1}{4}\Big[f_{ll}^{c}(\omega) + f_{ll}^{s}(\omega) - 2\,\mathrm{Im}\{f_{ll}^{cs}(\omega)\}\Big],$$

$$f_{kl}(\omega) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}\mathrm{Re}\{f_{kl}^{c}(\omega)\} + \mathrm{Re}\{f_{kl}^{s}(\omega)\} + \mathrm{Im}\{f_{kl}^{cs}(\omega)\} - \mathrm{Im}\{f_{kl}^{sc}(\omega)\} - \\ -i[\mathrm{Im}\{f_{kl}^{c}(\omega)\} + \mathrm{Im}[f_{kl}^{s}(\omega)] + \mathrm{Re}\{f_{kl}^{cs}(\omega)\} - \mathrm{Re}\{f_{kl}^{sc}(\omega)\}]\end{bmatrix},$$

а тоді

$$\gamma_{kl}^{2}(\omega) = \frac{[\mathrm{Re}\{f_{kl}^{c}(\omega)\} + \mathrm{Re}\{f_{kl}^{s}(\omega)\} + \mathrm{Im}\{f_{kl}^{cs}(\omega)\} - \mathrm{Im}\{f_{kl}^{sc}(\omega)\}]^2}{[f_{ll}^{c}(\omega) + f_{ll}^{s}(\omega) - 2\,\mathrm{Im}\{f_{ll}^{cs}(\omega)\}]\,[f_{kk}^{c}(\omega) + f_{kk}^{s}(\omega) - 2\,\mathrm{Im}\{f_{kk}^{cs}(\omega)\}]} +$$
$$+ \frac{[\mathrm{Im}\{f_{kl}^{c}(\omega)\} + \mathrm{Im}\{f_{kl}^{s}(\omega)\} + \mathrm{Re}\{f_{kl}^{cs}(\omega)\} - \mathrm{Re}\{f_{kl}^{sc}(\omega)\}]^2}{[f_{ll}^{c}(\omega) + f_{ll}^{s}(\omega) - 2\,\mathrm{Im}\{f_{ll}^{cs}(\omega)\}]\,[f_{kk}^{c}(\omega) + f_{kk}^{s}(\omega) - 2\,\mathrm{Im}\{f_{kk}^{cs}(\omega)\}]}.$$

Остання формула виражає функцію когерентності через авто- та взаємоспектральні густини квадратурних складових k-ої та l-ої гармонічних складових ПКВП. Вона суттєво спрощується, якщо взаємокореляційні зв'язки описуються парною функцією

$$\gamma_{kl}^{2}(\omega) = \frac{[\mathrm{Re}\{f_{kl}^{c}(\omega)\} + \mathrm{Re}\{f_{kl}^{s}(\omega)\}]^2 + [\mathrm{Re}\{f_{kl}^{cs}(\omega)\} - \mathrm{Re}\{f_{kl}^{sc}(\omega)\}]^2}{[f_{ll}^{c}(\omega) + f_{ll}^{s}(\omega)]\,[f_{kk}^{c}(\omega) + f_{kk}^{s}(\omega)]}.$$

Отримані у цій статті результати є теоретичним підґрунтям для побудови оцінок спектральних характеристик вібраційних сигналів, їхнього аналізу, обґрунтування алгоритмів і створення відповідного програмного забезпечення. Вони є основою для інтерпретації результатів статистичної обробки, формування ознак для класифікації дефектів обертових механізмів.

1. *Методи* і нові технічні засоби вібродіагностики підшипникових вузлів зубчатих передач / І. М. Яворський, О. П. Драбич, П. П. Драбич та ін. // Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій, споруд та машин. – К.: Ін-т електрозварювання ім. Є. О. Патона, 2006. – С. 52–56.
2. *Розробка* інформаційно-вимірювальної системи для вібродіагностики підшипників великих стаціонарних агрегатів / І. М. Яворський, П. П. Драбич, І. Ю. Ісаєв та ін. // Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій, споруд та машин. – К.: Ін-т електрозварювання ім. Є. О. Патона, 2009. – С. 58–62.
3. *Бендат Дж., Пирсол А.* Прикладной анализ случайных данных. – М.: Мир, 1989. – 540 с.
4. *Методи* і засоби ранньої діагностики обертових механізмів / І. М. Яворський, П. П. Драбич, І. Ю. Ісаєв та ін. // Міжнар. наук.-техн. конф. "Ресурс, надійність та ефективність використання енергетичного обладнання", 25–28 травня 2010. – Харків: Ін-т проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, 2010. – С. 4–11.
5. *Гельман Л. М., Зиньковський Ю. Ф., Петрунин И. В.* Эффективность использования действительной и мнимой составляющих преобразования Фурье для диагностики усталостных трещин // Техническая диагностика и неразрушающий контроль. – 2001. – № 3. – С. 21–23.

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів
Інститут телекомунікації Технологічно-природничого університету, Бидгощ, Польща
Одержано 24.09.2010