

УДК 519.681.5

О. Д. Поліщук, М. І. Тютюнник, М. С. Яджак

## ОРГАНІЗАЦІЯ ПАРАЛЕЛЬНИХ ОБЧИСЛЕНЬ ДЛЯ ЛОКАЛЬНОГО ОЦІНЮВАННЯ ЯКОСТІ ФУНКЦІОНУВАННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

The parallel-consecutive approach to optimization of calculations for local estimation of quality of functioning of the complex dynamical systems is proposed. This approach is oriented on realization on universal parallel calculational means with common memory.

**Key words:** *complex dynamical systems, local estimation, optimization of calculations, parallel computational means.*

Запропоновано паралельно-послідовний підхід для оптимізації обчислень у разі локального оцінювання якості функціонування складних динамічних систем. Цей підхід зорієнтовано для реалізації на універсальних паралельних обчислювальних засобах зі спільною пам'яттю.

**Ключові слова:** *складні динамічні системи, локальна оцінка, оптимізація обчислень, паралельні обчислювальні засоби.*

**Формулювання проблеми.** Складну динамічну систему (СДС) розглядаємо як об'єкт, який складається з багатьох взаємозв'язаних елементів різного типу та призначення, може реалізувати велику кількість різноманітних функцій, а його стан змінюється в часі. Функції системи є композицією функцій, які можуть реалізувати її елементи. Прикладами СДС є великі промислові підприємства, банківські установи, транспортні системи тощо. Зазвичай елементи таких систем об'єднуються в підсистеми різного рівня складності та функціонального призначення. Звідси виникає потреба у багаторівневих оцінках: від локальних, які визначають якість функціонування окремих елементів під час реалізації ними заданих функцій за відповідними наборами характеристик, критеріїв і параметрів, до агрегованих, кожна з яких оцінює роботу окремих підсистем чи СДС загалом. Зрозуміло, що локальні оцінки є визначальними стосовно формування висновків вищого рівня загальності.

Для оцінки якості функціонування СДС у праці [5] запропоновано методику, яка ґрунтується на різнобічному, багатокритеріальному та багаторівневому аналізі поведінки характеристик її складових частин. У разі великої кількості характеристик використання цієї методики пов'язане із виконанням значних обсягів обчислень. Крім цього, оцінювання якості функціонування деяких СДС необхідно здійснювати в режимі реального часу. З цією метою в [6] розроблено загальні підходи до розпаралелювання обчислювального процесу [1] під час реалізації методики із [5], побудовано відповідні алгоритмічні конструкції та проведено дослідження стосовно їх виконання на універсальних паралельних обчислювальних засобах зі спільною та розподіленою пам'яттю. Зазначимо, що безпосереднє розпаралелювання процедур локального оцінювання [5, 6] за заданим параметром компоненти характеристики досліджуваної СДС раніше не розглядали. Тому вирішення такої проблеми пропонується у цій роботі, яка є продовженням [6].

**Процедура локального оцінювання та підходи до її розпаралелювання.** Нехай досліджувана СДС є новим  $(S+1)$ -м представником класу  $G_S$ , який утворюють  $S$  еквівалентних систем. Необхідно оцінити  $N$  елементів цієї системи. Вважаємо, що  $n$ -й її елемент реалізує  $L_n$  функцій і його поведінка під час реалізації  $l_n$ -ї функції описується характеристиками  $A_{l_n, m_{n,l}}(t)$ , де  $m_{n,l} = \overline{1, M_{n,l}}$ ,  $t \in [0, T]$ . Кожна з

© О. Д. Поліщук, М. І. Тютюнник, М. С. Яджак, 2010

цих характеристик є результатом проведених експериментів або математичного моделювання, а  $T$  – це час тестових досліджень. Для аналізу  $A_{l_n, m_n, l}(t)$ ,  $t \in [0, T]$  використовуємо  $K_{n, l}^m$  критеріїв. Поведінку цієї характеристики за  $k_{n, l}^m$ -м критерієм оцінюватимемо за допомогою параметрів [5]

$$c_{n, l}^{m, k, p} = \|\alpha_{n, l}^{m, k}\|_{C_p[0, T]}; \quad w_{n, l}^{m, k, p} = \|\alpha_{n, l}^{m, k}\|_{W_p^2[0, T]}; \quad p = 0, 1.$$

Тут допоміжна функція  $\alpha_{n, l}^{m, k}(t)$  визначає величину відхилення значення характеристики  $A_{l_n, m_n, l}(t)$  від її області допустимих значень за критерієм  $k_{n, l}^m$  у момент часу  $t$ , де  $t \in [0, T]$ . Значення параметрів у рівномірній метриці дають змогу відстежити окремі піки чи збурення у поведінці заданої характеристики чи її похідних, а у середньоквадратичній – визначити усереднене значення їх виходу за межі допустимої області чи відхилення від вибраного еталону.

Нехай  $c_{n, l, \min}^{m, k, p}$  ( $w_{n, l, \min}^{m, k, p}$ ) і  $c_{n, l, \max}^{m, k, p}$  ( $w_{n, l, \max}^{m, k, p}$ ) – відповідно мінімальне та максимальне значення параметра  $c_{n, l}^{m, k, p}$  ( $w_{n, l}^{m, k, p}$ ). Якщо прийнята неперервна шкала оцінок, то значення локальної оцінки визначають унаслідок співвідношення значення функціоналу  $c_{n, l}^{m, k, p}$  ( $w_{n, l}^{m, k, p}$ ) до відомих його граничних значень. Граничні значення одержують на підставі аналізу поведінки відповідних параметрів для раніше досліджених  $S$  систем класу. Надалі для спрощення викладу індекси  $k, l, m, n$  у позначеннях величин  $\alpha_{n, l}^{m, k}(t)$ ,  $c_{n, l}^{m, k, p}$ ,  $w_{n, l}^{m, k, p}$  опускатимемо.

Вважатимемо, що відрізок  $[0, T]$  розбито на  $M - 1$  однакових частин довжини  $T/(M - 1)$ , до того ж число  $M$  має бути обов'язково непарним.

Загалом процедура локального оцінювання за заданим параметром ( $c^p$  або  $w^p$ ) деякої характеристики елемента досліджуваної системи складається з таких основних кроків [5, 7]:

- 1) обчислюється  $M$  значень допоміжної функції  $\alpha(t)$  на відрізьку  $[0, T]$ ;
- 2) обчислюється значення параметра локальної оцінки;
- 3) робиться висновок стосовно числового значення локальної оцінки характеристики.

Значення параметрів  $c^0$ ,  $w^0$  обчислюємо відповідно за формулами [5]:

$$c_0 = \max\{|\alpha(0)|, |\alpha(T/(M - 1))|, |\alpha(2T/(M - 1))|, \dots, |\alpha((M - 2)T/(M - 1))|, |\alpha(T)|\}; \quad (1)$$

$$w_0 = (((\alpha(0))^2 + 4((\alpha(T/(M - 1)))^2 + (\alpha(3T/(M - 1)))^2 + \dots + (\alpha((M - 2)T/(M - 1)))^2 + 2((\alpha(2T/(M - 1)))^2 + (\alpha(4T/(M - 1)))^2 + \dots + (\alpha((M - 3)T/(M - 1)))^2) + (\alpha(T))^2)T/(3(M - 1)))^{1/2}. \quad (2)$$

У деяких випадках поряд з параметрами  $c^0$  та  $w^0$ , що ґрунтуються відповідно на рівномірній та середньоквадратичній метриках, для локального оцінювання необхідно використовувати і інші параметри, наприклад,  $c^1$  та  $w^1$ . Значення цих параметрів обчислюємо відповідно за формулами:

$$c_1 = \max\{|\alpha(0)'|, |(\alpha(T/(M - 1)))'|, |(\alpha(2T/(M - 1)))'|, \dots, |(\alpha((M - 2)T/(M - 1)))'|, |(\alpha(T))'| \}; \quad (3)$$

$$w_1 = (((\beta(0))^2 + 4((\beta(T)/(M-1)))^2 + (\beta(3T/(M-1)))^2 + \dots +$$

$$+ (\beta((M-2)T/(M-1)))^2) + 2((\beta(2T/(M-1)))^2 + (\beta(4T/(M-1)))^2 + \dots +$$

$$+ (\beta((M-3)T/(M-1)))^2) + (\beta(T))^2)T/(3(M-1))^{1/2}. \quad (4)$$

Легко побачити, що вирази, за якими обчислюється основа степеня в (2) та (4), є чисельним поданням відповідно інтегралів  $\int_0^T (\alpha(t))^2 dt$  та  $\int_0^T ((\alpha(t))^2 + ((\alpha(t))')^2) dt$  згідно з формулою Сімпсона. Зауважимо, що в (3)  $(\alpha(P_0))'$  – це значення похідної від функції  $\alpha(t)$  в точці  $P_0 \in [0, T]$ , а у формулі (4)  $\beta(P_0) = \alpha(P_0) + (\alpha(P_0))'$ .

На підставі детального аналізу наведеної процедури оцінювання характеристики елемента системи ми запропонували підхід [7] до її оптимізації шляхом паралельного подання виконання окремих фрагментів, серед яких можна виділити:

- обчислення  $M$  значень допоміжної функції  $\alpha(t)$ , де  $t \in [0, T]$ ;
- обчислення  $M$  значень однієї із функцій (залежно від параметра локальної оцінки)  $(\alpha(t))^2$ ,  $(\alpha(t))'$ ,  $((\alpha(t))')^2$ , де  $t \in [0, T]$ ; слід зазначити, що у разі оцінювання за параметром  $c^0$  цей фрагмент обчислень є відсутнім;
- безпосереднє обчислення значення параметра локальної оцінки (див. формули (1)–(4)).

Крім наведених фрагментів, певні резерви оптимізації містять процедура обчислення значення допоміжної функції  $\alpha(t)$  у заданій точці та процедура здійснення висновку стосовно числового значення локальної оцінки за параметрами  $c^0$  ( $c^1$ ) та  $w^0$  ( $w^1$ ). Ці резерви виявляються в тому, що в обох випадках результат залежить від заданих трьох умовних операторів [5], виконання яких можна подати паралельно.

Зауважимо, що під час обчислення значення параметра локальної оцінки за формулами (1)–(4) можна використати режим, близький до повного двійкового дерева [9–11].

**Розробка та аналіз алгоритмічних конструкцій для організації паралельних обчислень.** Розглянемо алгоритмічні конструкції для виконання паралельних обчислень під час локальної оцінки деякої характеристики елемента СДС за параметром  $c^0$ . У разі відсутності будь-яких обмежень на обчислювальні ресурси (об'єм пам'яті, кількість працюючих процесорних елементів (ПЕ)) для знаходження  $M$  значень модуля функції  $\alpha(t)$  можна використати конструкцію

$$\text{fork } (h^1; h^2; \dots; h^M) \text{ join}. \quad (5)$$

У кожній з паралельних автономних гілок  $h^i$  цієї конструкції обчислюється  $i'$ -е значення модуля допоміжної функції. Службові слова *fork*, *join* – розгалузити, з'єднати визначають варіант примітивів для задання галузнення [1–3]. У випадку обмеження кількості ПЕ обчислювальної системи (5) трансформується в

$$\text{fork } (\tilde{h}^1; \tilde{h}^2; \dots; \tilde{h}^{M/M_1}) \text{ join}. \quad (6)$$

Тут  $M_1$  – це кількість значень модуля функції  $\alpha(t)$ , які послідовно обчислюються в  $j'$ -й гілці  $\tilde{h}^{j'}$ . Зауважимо, що у цьому випадку вимагається виконання умови  $[M/M_1] = M/M_1$ , де  $[ \cdot ]$  означає взяття цілої частини.

Для паралельного обчислення значення  $c^0$ -параметра локальної оцінки використовуємо схему, близьку до повного двійкового дерева. У разі відсутності обмежень на обчислювальні ресурси відповідна алгоритмічна конструкція матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned}
 &FOR \ i_1 = 1, \lceil \log_2 M \rceil \ DO \\
 &\quad FOR \ j_1 = 1, 1 + 2^{i_1} \lceil M / 2^{i_1} - 3/2 \rceil, 2^{i_1} \ DO \ PAR \\
 &\quad\quad a(j_1) = \max\{a(j_1), a(j_1 + 2^{i_1-1})\}, \\
 &\quad\quad c_0 = a(1).
 \end{aligned} \tag{7}$$

У наведеній конструкції  $a(j_1)$  – це  $j_1$ -е значення модуля допоміжної функції  $\alpha(t)$ ;  $\lceil b \rceil$  тут і надалі означає ціле число, що задовольняє нерівність  $b \leq \lceil b \rceil < b + 1$ ;  $PAR$  означає одночасне присвоювання всім  $a(j_1)$ , де  $j_1$  змінюється з кроком  $2^{i_1}$  від 1 до  $1 + 2^{i_1} \lceil M / 2^{i_1} - 3/2 \rceil$ , а кома після третього оператора вказує на кінець тіла циклу за змінною  $i_1$ .

У разі обмеження кількості ПЕ (7) можна трансформувати, наприклад, в

$$\begin{aligned}
 &FOR \ j_2 = 0, M(M_2 - 1)/M_2, M/M_2 \ DO \\
 &\quad FOR \ i_1 = 1, \lceil \log_2(M/M_2) \rceil \ DO \\
 &\quad\quad FOR \ j_1 = 1, 1 + 2^{i_1} \lceil M / (M_2 2^{i_1}) - 3/2 \rceil, 2^{i_1} \ DO \ PAR \\
 &\quad\quad\quad a(j_1 + j_2) = \max\{a(j_1 + j_2), a(j_1 + j_2 + 2^{i_1-1})\}, \\
 &FOR \ i_2 = 1, \lceil \log_2 M_2 \rceil \ DO \\
 &\quad FOR \ j_3 = 1, 1 + (M/M_2)2^{i_2} \lceil M_2 / 2^{i_2} - 3/2 \rceil, (M/M_2)2^{i_2} \ DO \ PAR \\
 &\quad\quad a(j_3) = \max\{a(j_3), a(j_3 + (M/M_2)2^{i_2-1})\}, \\
 &\quad\quad c_0 = a(1).
 \end{aligned} \tag{8}$$

У цій конструкції  $M_2$  – кількість фрагментів, у кожному з яких паралельно здійснюється пошук максимального серед  $M/M_2$  значень модуля допоміжної функції. Коми у (8) після четвертого та сьомого операторів вказують на кінець тіл циклів за змінними  $j_2$  та  $i_2$  відповідно. Зауважимо, що величини  $M$  та  $M_2$  пов'язані виконанням умов  $\lceil M/M_2 \rceil = M/M_2$  та  $\lceil M_2/2 \rceil \leq \lceil M/(2M_2) \rceil$ .

Якщо припустити, що  $t_0$  – це час обчислення значення модуля допоміжної функції  $\alpha(t)$  у заданій точці, то використання (5) призведе до прискорення обчислень у  $M$  разів порівняно з послідовним виконанням. Використання конструкції (6) дещо зменшить цю оцінку до  $M/M_1$ .

Нехай  $\tilde{t}_0$  – час виконання функції взяття  $\max$  від двох дійсних чисел. Порівняно з послідовною реалізацією використання (7) призведе до прискорення обчислень приблизно у  $(M-1)/\log_2 M$  рази, а застосування (8) зменшить цю оцінку до  $(M-1)/((1-M_2)\log_2 M_2 + M_2 \log_2 M)$ .

Легко бачити, що у разі відсутності будь-яких обмежень на обсяг обчислювальних ресурсів процедура локального оцінювання за  $c^0$ -параметром може бути

реалізована у разі використання конструкцій (5), (7) за час  $t_0 + \lceil \log_2 M \rceil \tilde{t}_0 + \tilde{\tilde{t}}_0$ . Тут  $\tilde{\tilde{t}}_0$  – час, за який локальна оцінка характеристики елемента досліджуваної СДС набуває, власне, числового значення. Зауважимо, що величини  $t_0, \tilde{t}_0, \tilde{\tilde{t}}_0$  є співвимірними. Послідовне ж виконання розглядуваної процедури локального оцінювання здійснюватиметься за час  $Mt_0 + (M-1)\tilde{t}_0 + \tilde{\tilde{t}}_0$ . Якщо припустити, що величини  $t_0, \tilde{t}_0, \tilde{\tilde{t}}_0$  є набагато меншими, ніж  $M$ , то прискорення обчислень у цьому випадку можна приблизно подати формулою  $((t_0/\tilde{t}_0 + 1)M - 1)/\log_2 M$ .

Далі розглянемо алгоритмічні конструкції для організації паралельних обчислень під час визначення локальної оцінки за параметром  $w^0$ . У цьому разі для обчислення  $M$  значень функції  $(\alpha(t))^2$ , де  $t \in [0, T]$  можна використати одну із конструкцій (5), (6). Тоді у відповідних гілках замість значень модуля допоміжної функції обчислюватимуться їхні квадрати.

Значення  $w^0$ -параметра локальної оцінки за даним критерієм можна обчислювати, використовуючи для паралельного сумування у дужках при коефіцієнтах 4 та 2 (див. формулу (2)) режим, близький до повного двійкового дерева. Зауважимо, що ці дві процедури сумування можна виконувати одночасно. Відповідна алгоритмічна конструкція має такий вигляд:

$$\begin{aligned}
 &FOR \ i_1 = 1, \lceil \log_2 A \rceil \ DO \\
 &\quad FOR \ j_1 = 1, 1 + 2^{i_1} \lceil A/2^{i_1} - 3/2 \rceil, 2^{i_1} \ DO \ PAR \\
 &\quad\quad fork \ (b(j_1) = b(j_1) + b(j_1 + 2^{i_1-1})); \\
 &\quad\quad\quad d(j_1) = d(j_1) + d(j_1 + 2^{i_1-1}) \ join, \\
 &\quad\quad\quad b(1) = b(1) + b(2 + 2^{\lceil \log_2 A \rceil - 1}) \\
 &\quad\quad\quad w_0 = ((a^0 + 4 * b(1) + 2 * d(1) + a^T) * A_1)^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Тут  $b(j_1)$  ( $j_1 = \overline{1, A+1}$ ) та  $d(j_1)$  ( $j_1 = \overline{1, A}$ ) – масиви, елементами яких є набори значень функції  $(\alpha(t))^2$ , обчислені відповідно в точках  $T/(M-1), 3T/(M-1), \dots, (M-2)T/(M-1)$  та  $2T/(M-1), 4T/(M-1), \dots, (M-3)T/(M-1)$ , до того ж  $A = \lceil (M-2)/2 \rceil$ ;  $a^0, a^T$  – це значення  $(\alpha(0))^2, (\alpha(T))^2$  відповідно;  $A_1 = T/(3(M-1))$ . Зауважимо, що в конструкції (9) кома після службового слова *join* вказує на кінець тіла циклу за змінною  $i_1$ .

Припустимо, що  $t^+, t^*, t^\circ$  – це відповідно часи реалізації операцій додавання, множення та взяття квадратного кореня. Тоді використання (9) порівняно з послідовним виконанням призведе до прискорення обчислень у  $v$  разів, де  $v = (3t^* + 2(A+1)t^+ + t^\circ)/(3t^* + (4 + \log_2 A)t^+ + t^\circ)$ .

Організація паралельних обчислень під час визначення локальної оцінки за параметрами  $c^1$  та  $w^1$  здійснюється аналогічно, як і у разі відповідно параметрів  $c^0$  та  $w^0$ . Зауважимо, що у випадку використання  $c^1$ -параметра, (5), (6) застосовуємо для обчислення  $M$  значень функції  $|\alpha(t)|$ , а у випадку використання  $w^1$ -параметра ці конструкції застосовуємо для обчислення такої ж кількості значень

функції  $(\alpha(t))^2 + ((\alpha(t))')^2$ . Значення похідної від допоміжної функції у заданих точках обчислюємо на підставі формул чисельного диференціювання [4]. Зазначимо, що певні резерви розпаралелювання містить і процедура обчислення значення функції  $(\alpha(t))^2 + ((\alpha(t))')^2$  у деякій точці  $P_0 \in [0, T]$ . Зокрема, одночасно можуть обчислюватися  $(\alpha(P_0))^2$  та  $(\alpha(P_0))'$  або ж  $(\alpha(P_0))^2$  та  $((\alpha(P_0))')^2$ .

## ВИСНОВКИ

У роботі, що є логічним продовженням досліджень, виконаних в [6], здійснено аналіз процедури локального оцінювання якості функціонування СДС з метою її розпаралелювання. Унаслідок цього для окремих фрагментів обчислень запропоновано та проаналізовано алгоритмічні конструкції, орієнтовані на реалізацію на універсальних паралельних обчислювальних засобах зі спільною пам'яттю [11]. Ці конструкції наведено для випадку можливого обмеження кількості ПЕ обчислювальної структури та у разі, коли таких обмежень немає.

Запропонований паралельно-последовний підхід можна використати для організації та виконання масових обчислень [10] у різних предметних областях на сучасній та перспективній високопродуктивній обчислювальній техніці [8, 11–14] універсального та спеціального призначення.

1. *Вальковский В. А.* Распаралеливание алгоритмов и программ. Структурный подход. – М.: Радио и связь, 1989. – 176 с.
2. *Вальковский В. А., Малышкин В. Э.* Элементы современного программирования и суперЭВМ. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990. – 143 с.
3. *Вальковський В. О., Яджак М. С.* Проблеми подальшого розвитку та модифікації методу пірамід для розпаралелювання циклів // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2000. – **43**, № 1. – С. 68–75.
4. *Иванов В. В.* Методы вычислений на ЭВМ: Справ. пос. – К.: Наук. думка, 1986. – 584 с.
5. *Полищук А. Д.* Оптимизация оценки качества функционирования сложных динамических систем // Проблемы управления и информатики. – 2004. – № 4. – С. 39–44.
6. *Полищук О. Д., Тютюнник М. І., Яджак М. С.* Оцінювання якості функціонування складних систем на основі паралельної організації обчислень // Відбір і обробка інформації. – 2007. – Вип. 26 (102). – С. 121–126.
7. *Полищук О., Тютюнник М., Яджак М.* Паралельна організація обчислень для локального оцінювання якості функціонування складних систем // Сучасні проблеми механіки та математики: В 3-х т. – Львів, 2008. – **3**. – С. 40–42.
8. *Штейнберг Б. Я.* Математические методы распаралеливания рекуррентных циклов для суперкомпьютеров с параллельной памятью. – Ростов н/Д: Изд-во Ростов. ун-та, 2004. – 192 с.
9. *Яджак М. С.* Параллельная организация массовых вычислений в нейронных сетях // Методы и средства обработки информации: Тр. Второй Всероссийской научн. конф. / Под ред. Л. Н. Королёва. – М.: Изд-й отдел ф-та ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова, 2005. – С. 643–649.
10. *Яджак М. С.* Високопаралельні алгоритми та засоби для розв'язання задач масових арифметичних і логічних обчислень: Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук, 01.05.03. – К.: Київ. ун-т ім. Т. Шевченка, 2009. – 33 с.
11. [www.parallel.ru](http://www.parallel.ru).
12. [www.sgi.com/company\\_info/newsroom/press\\_releases/2007/july/nasa.html](http://www.sgi.com/company_info/newsroom/press_releases/2007/july/nasa.html).
13. [www.supercomputers.ru](http://www.supercomputers.ru).
14. [www.top500.org](http://www.top500.org).