УДК 517.5(075.8)

С. В. Заболотній

РОЗКЛАД ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН
У ТРИГОНОМЕТРИЧНІ СТОХАСТИЧНІ РЯДИ

The possibility of decomposition of random variables in trigonometrically stochastic series is considered in this work. The coefficients of decomposition are deducted from condition of minimization of main square error of decomposition. The results of simulation of this decomposition are resulted.

Key words: *generating random values, stochastic polynomial, characteristic function, minimum square error of decomposition.*

Розглянуто можливість розкладу випадкових величин у тригонометричні стохастичні ряди. Коефіцієнти розкладу знаходять з умови мінімізації середньоквадратичної похибки розкладу. Наведено результати імітаційного моделювання цього розкладу.

Ключові слова: *порідна випадкова величина, стохастичний поліном, характеристична функція, середньоквадратична похибка розкладу.*

Методи зображення та опрацювання стохастичних сигналів є предметом дослідження багатьох учених з різних країн. Такі дослідження ведуться у напрямках узагальнення властивостей стохастичних сигналів, побудови нових математичних моделей, зображень, перетворень, оцінювання характеристик випадкових процесів, що застосовуються для опису реальних фізичних явищ різної природи походження.

Значна частина теорії опису стохастичних сигналів базується на представленні випадкових величин і процесів у вигляді рядів. Відомими результатами є розклади у ряди за детермінованими координатними функціями з випадковими коефіцієнтами і зображення у вигляді інтегралів з детермінованими ядрами за випадковими мірами (К. Карунен) чи випадковими ваговими функціями (В. Пугачов) [1].

На тлі цих результатів незвично виглядає новий метод розкладу у просторі з порідним елементом, запропонований Ю. Кунченко [5]. Суть цього підходу полягає в представленні випадкових величин у вигляді стохастичних поліномів з детермінованими коефіцієнтами та базисними функціями, якими є нелінійні перетворення над випадковою величиною, що розкладається [6]. Властивості такого розкладу та результати його моделювання на прикладі використання степеневих базисних функції можна знайти в роботах [2, 7]. Прикладною сферою застосування цього математичного апарату є вирішення задач перевірки статистичних гіпотез, які виникають у процесі виявлення та розпізнавання випадкових сигналів та образів [3, 4].

Метою роботи є адаптація апарату розкладу випадкових величин у просторі з порідним елементом у процесі застосування як базисних перетворень тригонометричних функцій та імітаційне моделювання розкладу.

Постановка завдання дослідження. Нехай ξ – випадкова величина, імовірнісні властивості якої описуються характеристичною функцією $f_\xi(u)$. Необхідно адаптувати метод розкладу випадкових величин у просторі з порідним елементом для ситуації, коли як базисні перетворення застосовано косинусні та синусні тригонометричні функції, дослідити динаміку збіжності рядів та промоделювати розклад на прикладі випадкових величин із стандартним нормальним (гаусовим) розподілом.

Математичний апарат. Відповідно до теорії розкладу в просторі з порідним елементом [5] деяку випадкову величину ξ, яку називають порідною, можна наближено представити (розкласти в ряд) у вигляді стохастичного функціонального поліному

$$\xi \approx k_0 + \sum_{i=1}^{S} k_i \varphi_i(\xi), \qquad (1)$$

Особливістю цього розкладу [6] є те, що його базисні функції $\varphi_i(\cdot)$ являють собою певним чином впорядковані нелінійні перетворення від випадкової величини, що розкладається, і повинні вибиратися такими, щоб існували їх математичні сподівання

$$E\{\varphi_i(\cdot)\} = \Psi_i < \infty .$$

Коефіцієнти k_i, $i = \overrightarrow{1,S}$ розкладу (1) повинні знаходитися як розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{S} k_i F_{i,j} = B_j, \quad j = \overrightarrow{1,S}, \qquad (2)$$

де $F_{i,j} = E\left\{ [\varphi_i(\xi) - \Psi_i]\,[\varphi_i(\xi) - \Psi_i] \right\}$; $B_i = E\left\{ [\xi - \Psi_0]\,[\varphi_i(\xi) - \Psi_i] \right\}$; $\Psi_0 = E(\xi)$.

Система (2) формується із умови забезпечення мінімуму середньоквадратичної похибки розкладу (СКПР), тобто величини

$$D_S = E\left\{ \xi - \left[k_0 + \sum_{i=1}^{S} k_i \varphi_i(\xi) \right] \right\}^2 = 0 .$$

Крім того, значення коефіцієнта k_0 повинно забезпечувати умову центрування похибки розкладу, тобто

$$k_0 = \Psi_0 - \sum_{i=1}^{S} k_i \Psi_i . \qquad (3)$$

Доведено [6], що при оптимальному наборові коефіцієнтів розкладу, знайдених з (2) та (3), середньоквадратичну похибку розкладу можна описати виразом

$$D_S = \sigma_\xi^2 - J_S, \qquad (4)$$

де величину $J_S \le \sigma_\xi^2$, значення якої характеризує ступінь наближення, називають інфоркуною, для якої при довільному S справедлива рівність

$$J_S = \sum_{i=1}^{S} k_i B_i = \sum_{i=1}^{S} \sum_{j=1}^{S} k_i k_j F_{i,j} . \qquad (5)$$

Зазначимо, що для аналізу збіжності ряду (1) більш придатним є нормоване на дисперсію порідної випадкової величини значення СКПР

$$\delta_S = D_S \big/ \sigma_\xi^2 ,$$

оскільки діапазон його зміни належить області (0; 1].

Отримані результати. ***Різновиди тригонометричних стохастичних рядів.*** Якщо для деякої випадкової величини ξ існує імовірнісний опис у вигляді характеристичної функції $f_\xi(u)$, то таку випадкову величину можна наближено записати у вигляді тригонометричних стохастичних поліномів S-го порядку

$$\xi \approx k_0 + \sum_{i=1}^{S} k_i \cos(ip\xi)\,, \qquad (6)$$

або

$$\xi \approx k_0 + \sum_{i=1}^{S} k_i \sin(ip\xi)\,, \qquad (7)$$

де p – константа, яку називають коефіцієнтом гармонік.

У першому випадку, тобто коли базисні функції являють собою косинусні перетворення $\varphi_i[\xi] = \cos(ip\xi)$, ряд називатимемо косинусним стохастичним рядом, а у випадку, коли функції $\varphi_i[\xi] = \sin(ip\xi)$, є синусними перетвореннями, то ряд називатимемо синусним стохастичним рядом.

Особливості розкладу випадкових величин у косинусний стохастичний ряд. Якщо для побудови стохастичного ряду використовуються косинусні тригонометричні функції, то, беручи до уваги, що характеристична функція випадкової величини пов'язана з її щільністю розподілу перетворенням Фур'є

$$f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{iux}\, dx\,,$$

а також застосовуючи формулу Ейлера

$$\cos(p\xi) = \frac{1}{2}\left[e^{ip\xi} + e^{-ip\xi} \right],$$

можна довести, що набір математичних сподівань від базисних функціональних перетворень, які використовуються в аналітичних співвідношеннях (2)–(5) при розкладі випадкових величин косинусний ряд, матиме такий вигляд:

$$\Psi_r = \frac{1}{2}\left[f(rp) + f^*(rp) \right],$$

$$B_r = \frac{-i}{2}\left\{ f'[rp] + f'[r(-p)] \right\} - \alpha \frac{1}{2}\left[f(rp) + f^*(rp) \right],$$

$$F_{r,k} = \frac{1}{4}\Big\{ f[(r+k)p] + f^*[(r+k)p] + f[(r-k)p] +$$
$$+ f^*[(r-k)p] - [f(rp) + f^*(rp)]\,[f(kp) + f^*(kp)] \Big\}.$$

Необхідно зазначити, що в цих виразах функції $f^*(u)$ є функціями комплексно спряженими до характеристичної функції $f(u)$, а функції $f'(u)$ є похідними від характеристичної функції за параметром u.

Формальна заміна параметрів (i, j) на (r, k) викликана необхідністю використання в розрахунках комплексної одиниці $i = \sqrt{-1}$.

Із врахуванням того, що оптимальний коефіцієнт k_0, в цьому випадку, має вигляд

$$k_0 = \alpha - \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{S} k_r \left[f(rp) + f^*(rp) \right],$$

де $\alpha = E(\xi)$, косинусний розклад (6) можна записати так:

$$\xi = \alpha + \sum_{r=1}^{S} k_r \left[\cos(rp\xi) - \frac{1}{2}\left[f(rp) + f^*(rp) \right] \right]. \qquad (8)$$

Особливості розкладу випадкових величин у синусний стохастичний ряд. Якщо для побудови стохастичного ряду використовують базисні синусні тригонометричні функції, то, враховуючи формулу Ейлера

$$\sin(p\xi) = \frac{1}{2i}\left[e^{ip\xi} - e^{-ip\xi}\right],$$

можна довести, що набір відповідних математичних сподівань матиме такий вигляд:

$$\Psi_r = \frac{1}{2i}\left[f(rp) + f^*(rp)\right],$$

$$B_r = \frac{1}{2}\left\{f'[rp] - f'[r(-p)]\right\} - \alpha\frac{1}{2i}\left[f(rp) - f^*(rp)\right],$$

$$F_{r,k} = \frac{-1}{4}\Big\{f[(r+k)p] + f^*[(r+k)p] - f[(r-k)p] -$$

$$- f^*[(r-k)p] - [f(rp) - f^*(rp)][f(kp) - f^*(kp)]\Big\}.$$

Із врахуванням того, що оптимальний коефіцієнт k_0, у цьому випадку, дорівнює

$$k_0 = \alpha - \frac{1}{2i}h\sum_{r=1}^{S}h_r\left[f(rp) - f^*(rp)\right],$$

синусний розклад (7) можна записати так:

$$\xi \approx \alpha + \sum_{r=1}^{S}k_r\left[\sin(rp\xi) - \frac{1}{2i}\left[f(rp) - f^*(rp)\right]\right]. \tag{9}$$

Моделювання розкладу гаусових випадкових величин. Розглянемо можливість розкладу в тригонометричні ряди на прикладі представлення нормально-розподіленої (гаусової) випадкової величини у вигляді синусного стохастичного поліному.

Відомо, що гаусовий закон розподілу ймовірностей, який описується виразом

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{\frac{-(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

відіграє значну роль у теорії статистичного опрацювання і його застосовують як одну із найбільш поширених математичних моделей сигналів та завад в інформаційних каналах. Характеристична функція цього розподілу має такий вигляд:

$$f_\xi(u) = \exp\left\{i\alpha u - \frac{u^2}{2}\sigma^2\right\},$$

де α та σ^2 – відповідно математичне сподівання та дисперсія випадкової величини.

Можна показати, що для випадкової величини з гаусовим розподілом математичні сподівання Ψ_r базисних функціональних перетворень будуть описуватися виразом

$$\Psi_r = \sin(rp\alpha)\exp\left\{-\frac{(rp)^2}{2}\sigma^2\right\}. \tag{10}$$

Із врахуванням (9) і (10) синусний стохастичний поліном для наближеного представлення гаусової випадкової величини ξ можна записати у вигляді

$$\xi \approx \alpha + \sum_{r=1}^{S} k_r \left[\sin(rp\xi) - \sin(rp\alpha)\exp\left\{ -\frac{(rp)^2}{2}\sigma^2 \right\} \right]. \qquad (11)$$

У таблиці наведені результати дослідження динаміки наближення (величини нормованої СКПР) зі зростанням степеня S поліному розкладу гаусової випадкової величини з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією:

Степінь поліному розкладу	$S = 1$	$S = 2$	$S = 3$	$S = 4$	$S = 5$
Нормована СКПР δ_S	0,149	0,076	0,059	0,054	0,052

За результатами імітаційного моделювання, здійсненого в середовищі Mathcad, були отримані графічні, які наведені на рис. 1–4.

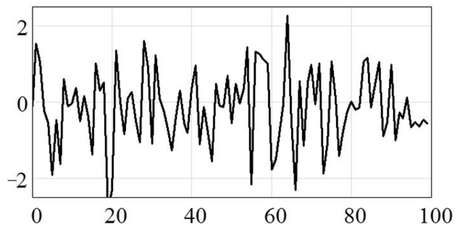

Рис. 1. Порідна гаусова випадкова величина.

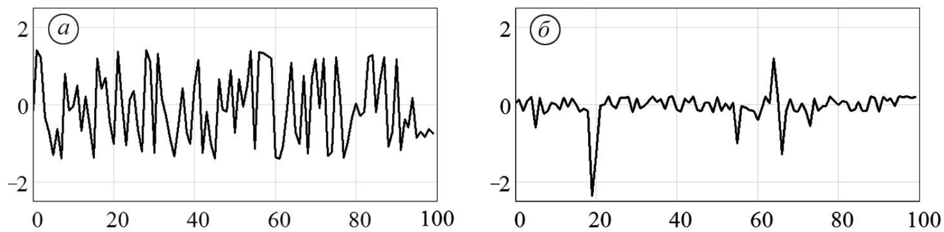

Рис. 2. Розклад гаусової випадкової величини, якщо S = 1.

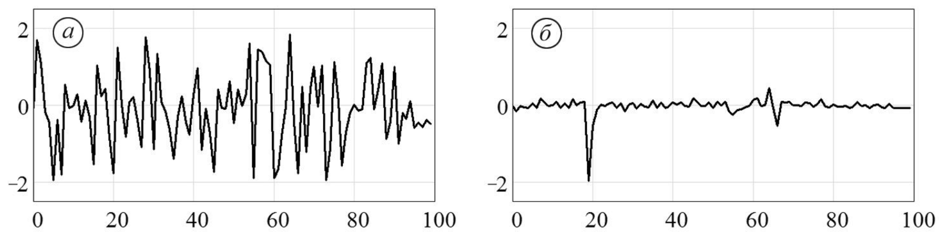

Рис. 3. Розклад гаусової випадкової величини, якщо S = 2.

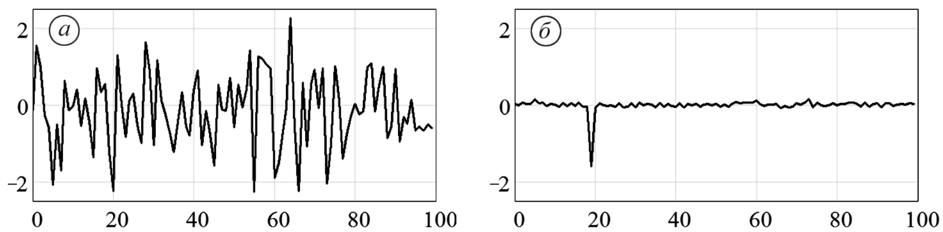

Рис. 4. Розклад гаусової випадкової величини, якщо S = 3.

Зазначимо, що на рис. 1 зображена реалізація порідної випадкової величини ξ із параметрами $N(0; 1)$, отримана з використанням вбудованої функції генерації Mathcad. А на рис. 2–4 подано результати розкладу цієї випадкової величини при різній кількості членів ряду (порядку поліному S). На рисунках (*а*) наведені реалізації випадкових величин, відліки яких формуються на основі поліному виду (11), а на рисунках (*б*) – похибки розкладу, тобто реалізації випадкових величин, що є різницею між порідною випадковою величиною та її представленням у вигляді тригонометричного синусного ряду.

ВИСНОВКИ

Проведені аналітичні дослідження свідчать, що зростання кількості членів рядів призводить до зменшення величини нормованої середньоквадратичної похибки розкладу. Це також підтверджують результати імітаційного моделювання, яке демонструє зменшення візуальної різниці між порідною випадковою величиною та її наближеним представленням у вигляді стохастичного поліному зі збільшенням його порядку. Аналіз цих та інших отриманих результатів підтверджує теоретичну можливість розкладу випадкових величин у тригонометричні стохастичні ряди.

Беручи до уваги властивість селективність (налаштованість на певні імовірнісні характеристики), що притаманна апарату розкладу випадкових величин у просторі з порідним елементом, отримані результати можуть стати основою побудови принципово нових методів та алгоритмів, призначених для виявлення і розпізнавання сигналів на тлі завад.

1. *Драґан Я.* Енергетична теорія лінійних моделей стохастичних сигналів: – Львів: Центр стратегічних досліджень еко-біо-технічних систем, 1997. – 333 с.
2. *Заболотній С. В.* Про деякі результати, отримані за допомогою методу неортогонального розкладання випадкових величин в просторі з породжуючим елементом // Вісник ЧДТУ. – 2007. – № 1–2. – С. 50–54.
3. *Заболотній С. В.* Статистичне розпізнавання образів на основі розкладу в просторі з порідним елементом // Вісник НУ Львівська політехніка “Комп’ютерні науки та інформаційні технології”. – 2009. – № 638. – С. 118–123.
4. *Заболотній С. В., Коваль В. В., Салипа С. В.* Виявлення відеосигналів із застосуванням нелінійних дискретних фільтрів з постійними коефіцієнтами // Електроніка та системи управління. – 2008. – № 3. – С. 77–83.
5. *Кунченко Ю. П.* Полиномы приближения в пространстве с порождающим элементом. – К.: Наук. думка, 2003. – 243 с.
6. *Кунченко Ю. П.* Стохастические полиномы. – К.: Наук. думка, 2006. – 275 с.
7. *Кунченко Ю. П., Заболотный С. В.* Разложение гауссовских случайных величин в степенные стохастические ряды. Сборник научных трудов МРФ-2002. – Харьков, 2002. – С. 120–123.

Черкаський державний технологічний університет

Одержано 13.01.2010