

## МОДЕЛЮВАННЯ СЕРЕДОВИЩ ІЗ ЗАДАНИМ КОЕФІЦІЄНТОМ ЗАЛОМЛЕННЯ

A combination of asymptotic approach and computational modeling is used for solution of problem to create the media with the prescribed electrodynamic characteristic, in particular, a refraction coefficient. The initial diffraction problem is considered under the assumptions  $ka \ll 1$ ,  $d \gg a$ , where  $a$  is the size of the particle and  $d$  is the distance between the neighboring particles. Impedance boundary conditions are assumed on the boundaries of small particles. The results of numerical simulation show good agreement with the theory. They open a way to numerical implementation of the method for creating media with a desired refraction coefficient.

**Key words:** *scattering by small bodies, asymptotic approach, refraction coefficient, numerical modeling.*

Поєднання асимптотичного підходу і числового моделювання використано для розв'язку задачі про створення середовища із заданими електродинамічними характеристиками, зокрема коефіцієнтом заломлення. Стартову дифракційну задачу розв'язано за припущенням  $ka \ll 1$ ,  $d \gg a$ , де  $a$  – розмір окремого включення, а  $d$  – відстань між ними. На поверхні малих включень задано граничні умови імпедансного типу. Результати числового моделювання збігаються з теоретичними положеннями, що відкриває можливість числової реалізації методу створення середовищ із заданим коефіцієнтом заломлення.

**Ключові слова:** *розсіяння на малих включеннях, асимптотичний підхід, коефіцієнт заломлення, числове моделювання.*

Створення середовищ із заданими електромагнітними властивостями (заданим коефіцієнтом заломлення) є важливою інженерною проблемою в процесі проектування і виготовлення мікроелектромеханічних систем [1]. Таке середовище пропонуємо створити шляхом включення в дану область великої кількості малих сферичних об'єктів з імпедансними умовами на їх поверхні. Теорія електромагнітного розсіяння малими включеннями довільної форми була розвинута в роботах [2, 3]. Запропонований підхід дає змогу створювати матеріали із заданою просторовою дисперсією, тобто дає можливість створити коефіцієнт заломлення  $n^2(x, \omega)$  із необхідною залежністю від частоти  $\omega$ . Зокрема, можна створювати матеріали з від'ємним заломленням. Такі матеріали використовують в багатьох технічних застосуваннях [4, 5].

Асимптотичний розв'язок задачі розсіяння у випадку багатьох включень був отриманий у [6] при допущеннях  $ka \ll 1$ ,  $d = O(a^{1/3})$ ,  $M = O(1/a)$ , де  $a$  – розмір включення;  $k = 2\pi/\lambda$  – хвильове число;  $d$  – відстань між сусідніми включеннями, а  $M$  – загальна кількість включень у деякій обмеженій області  $D \subset R^3$ . На границі  $S_m$   $m$ -го включення  $D_m$  задають імпедансні граничні умови. У [7] ці допущення були узагальнені так:

$$\zeta_m = \frac{h(x_m)}{a^\kappa}, \quad d = O(a^{(2-\kappa)/3}), \quad M = O\left(\frac{1}{a^{2-\kappa}}\right), \quad \kappa \in (0,1), \quad (1)$$

де  $\zeta_m$  – поверхневий імпеданс,  $h_m = h(x_m)$ ,  $x_m \in D_m$ , а  $h(x) \in C(D)$  – довільна неперервна у  $\bar{D}$  функція,  $\text{Im } h \leq 0$ .

Однорідне поле  $u_0$  задовольняє рівняння Гельмгольца в  $R^3$ , а розсіяне поле задовольняє умови випромінювання. У цій статті припускається, що параметр  $\kappa \in (0,1)$ , мале включення  $D_m$  – куля радіуса  $a$  з центром у точці  $x_m$ ,  $1 \leq m \leq M$ .

**Розв'язання задачі розсіяння.** Розв'язок задачі розсіяння для заданої геометрії визначається з наступної граничної задачі

$$[\nabla^2 + k^2 n_0^2(x)]u_M = 0 \text{ в } R^3 \setminus \bigcup_{m=1}^M D_m, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_M}{\partial N} = \zeta_m u_M \text{ на } S_m, 1 \leq m \leq M, \quad (3)$$

де

$$u_M = u_0 + v_M, \quad (4)$$

$u_0$  – розв'язок задачі (2)–(3) для  $M = 0$  (за відсутності включень) при падаючому полі  $e^{ik\alpha \cdot x}$ , і при  $v_M$ , яке задовольняє умови випромінювання.

У роботі [6] було доведено, що розв'язок задачі (2)–(4) – єдиний і подається у вигляді

$$u_M(x) = u_0(x) + \sum_{m=1}^M \int_{S_m} G(x, y) \sigma_m(y) dy, \quad (5)$$

де  $G(x, y)$  – функція Гріна рівняння Гельмгольца у випадку  $M = 0$ ,  $\sigma_m(y)$  – деяка невідома функція.

Визначимо “ефективне поле”  $u_e$ , яке діє на  $m$ -му включенні:

$$u_e(x) := u_e(x, a) := u_e^{(m)}(x) := u_M(x) - \int_{S_m} G(x, y) \sigma_m(y) dy, \quad x \in R^3. \quad (6)$$

Функція  $\sigma_m(y)$  є точним розв'язком певного інтегрального рівняння, асимптотичний розв'язок якого отримано в [7], якщо  $a \rightarrow 0$ . Нехай  $h(x) \in C(D)$  ( $\text{Im } h \leq 0$ ) – довільна функція,  $\Delta_p \subset D$  – довільна підобласть  $D$ , а  $N(\Delta_p)$  – кількість включень у  $\Delta_p$ . Припустимо, що

$$N(\Delta_p) = \left[ \frac{1}{a^{2-\kappa}} \int_{\Delta_p} N(x) dx [1 + o(1)] \right], a \rightarrow 0, \quad (7)$$

де  $N(x) \geq 0$  – задана неперервна функція в  $D$ . У роботі [7] (Теорема 1) було доведено, що існує границя  $u(x)$  поля  $u_e(x)$ , якщо  $a \rightarrow 0$ :

$$\lim_{a \rightarrow 0} \|u_e(x) - u(x)\|_{C(D)} = 0, \quad (8)$$

а  $u(x)$  є розв'язком такого рівняння:

$$u(x) = u_0(x) - 4\pi \int_D G(x, y) h(y) N(y) u(y) dy. \quad (9)$$

Це рівняння було отримане у [6] для граничного ефективного поля, розсіяного розміщеними в  $D$  малими включеннями із законом розподілу (7).

**Наближене представлення ефективного поля.** Виведемо явну формулу для ефективного поля  $u_e$ . Перепишемо точну формулу (5) так:

$$u_M(x) = u_0(x) + \sum_{m=1}^M G(x, x_m) Q_m + \sum_{m=1}^M \int_{S_m} [G(x, y) - G(x, x_m)] \sigma_m(y) dy, \quad (10)$$

де

$$Q_m = \int_{S_m} \sigma_m(y) dy. \quad (11)$$

Використовуючи оцінку для  $G(x, y)$  з [6] і асимптотичну формулу для  $Q_m$  з [7], перепишемо точну формулу (10) так:

$$u_M(x) = u_0(x) + \sum_{m=1}^M G(x, x_m) Q_m + o(1), \quad a \rightarrow 0, \quad |x - x_m| \geq a. \quad (12)$$

Величини  $Q_m(x)$  визначаються за асимптотичною формулою

$$Q_m = -4\pi h(x_m) u_e(x_m) a^{2-\kappa} [1 + o(1)], \quad a \rightarrow 0, \quad (13)$$

а асимптотична формула для  $\sigma_m$  така:

$$\sigma_m = -\frac{h(x_m) u_e(x_m)}{a^\kappa} [1 + o(1)], \quad a \rightarrow 0. \quad (14)$$

Остаточна формула для  $u_e(x)$  має вигляд

$$u_e^{(j)}(x) = u_0(x) - 4\pi \sum_{m=1, m \neq j}^M G(x, x_m) h(x_m) u_e(x_m) a^{2-\kappa} [1 + o(1)]. \quad (15)$$

Рівняння (9) для граничного ефективного поля  $u(x)$  використовують при числових розрахунках, коли номер  $M$  є дуже великим, наприклад,  $M = 10^b, b > 5$ . Мета наших числових розрахунків – дослідження властивостей розв'язків рівняння (9) і порівняння їх з асимптотичною формулою (15) для визначення границі застосування асимптотичного підходу до розв'язування задачі розсіяння багатьма малими включеннями.

**Зведення задачі розсіяння до розв'язування лінійних алгебраїчних систем.** Знаходження поля  $u_e$  за формулою (15) вимагає, щоб були відомими величини  $u_m := u_e(x_m)$ . Ці значення отримують, розв'язуючи лінійну систему рівнянь

$$u_j = u_{0j} - 4\pi \sum_{m=1, m \neq j}^M G(x_j, x_m) h(x_m) u_m a^{2-\kappa}, \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (16)$$

Ця система є зручною для числових розрахунків, оскільки її матриця – з діагональним переважанням елементів. З результатів [6] випливає, що для достатньо малих  $a$  ця система має єдиний розв'язок.

Для знаходження розв'язків граничного рівняння (9) використовують метод колокацій [8], з допомогою якого отримують наступну лінійну систему рівнянь:

$$u_j = u_{0j} - 4\pi \sum_{p=1, p \neq j}^P G(x_j, x_p) h(y_p) N(y_p) u_p |\Delta_p|, \quad p = 1, 2, \dots, P, \quad (17)$$

де  $P$  – кількість малих кубів (підобластей)  $\Delta_p$ ,  $y_p$  – центр  $\Delta_p$ ,  $|\Delta_p|$  – об'єм  $\Delta_p$ . Припускається, що об'єднання областей  $\Delta_p$  формує розбиття  $D$ , а діаметр  $\Delta_p \in O(d^{1/2})$ .

З обчислювального погляду розв'язування системи (17) є набагато простішим, ніж системи (16), оскільки  $P \ll M$ .

Ми маємо дві системи лінійних рівнянь, які відповідають формулі (15) і рівнянню (9). Розв'язуючи ці системи, можна порівнювати їхні розв'язки і встановлювати межі застосовності асимптотичного підходу [7] для розв'язування задачі розсіяння у випадку багатьох малих включень.

**Числове моделювання середовища із заданим коефіцієнтом заломлення.**

Числовий підхід до розв'язування задачі розсіяння малими включеннями був започаткований у [9]. В цій роботі також були отримані часткові результати стосовно точності розв'язків системи (16) внаслідок застосування асимптотичного підходу.

Числове моделювання зі створення середовища із заданим коефіцієнтом заломлення зводиться до такої задачі: для заданих  $n^2(x)$  і  $n_0^2(x)$  ( $n_0^2(x)$  – коефіцієнт заломлення середовища без включень) дослідити, яке найменше  $M$  (або, еквівалентно, найбільше  $a$ ), для якого відповідне  $n_{M(x)}^2$  відрізняється від заданого  $n^2(x)$  не більше, наприклад, ніж на 5%–10%.

Метод формування середовища із заданим коефіцієнтом заломлення  $n^2(x)$  запропонований у [6]. З обчислювального погляду є суттєвим те, як створений з допомогою цієї процедури коефіцієнт заломлення  $n_M^2(x)$  буде відрізнятися від отриманого аналітичним шляхом? Спочатку опишемо аналітичну процедуру отримання заданого коефіцієнта заломлення. Вона складається із трьох кроків [6].

*Крок 1.*

Задаються  $n_0^2(x)$  і  $n^2(x)$ , обчислюється

$$p(x) = k^2[n_0^2(x) - n^2(x)] = p_1(x) + ip_2(x). \quad (18)$$

*Крок 2.*

Використовуючи співвідношення

$$p(x) = 4\pi h(x)N(x) \quad (19)$$

з [7] і (1), отримаємо рівняння для знаходження  $h(x)$ :

$$h(x) = h_1(x) + ih_2(x), \quad (20)$$

тобто

$$4\pi[h_1(x) + ih_2(x)]N(x) = p_1(x) + ip_2(x). \quad (21)$$

Остаточно

$$N(x)h_1(x) = \frac{p_1(x)}{4\pi}, \quad N(x)h_2(x) = \frac{p_2(x)}{4\pi}. \quad (22)$$

Система (22) двох рівнянь для невідомих функцій  $h_1(x)$ ,  $h_2(x)$  і  $N(x)$  має безмежну кількість розв'язків  $\{h_1(x), h_2(x), N(x)\}$ , які повинні задовольняти умови  $N(x) \geq 0$ ,  $h_2(x) \leq 0$ . Якщо, наприклад, покласти  $N(x)$  довільною константою, тоді  $h_1$  і  $h_2$  будуть однозначно визначатися за (22). Легко бачити, що умова  $\text{Im } n^2(x) > 0$  приводить до  $\text{Im } p = p_2 \leq 0$ , що узгоджується з умовою  $h_2 < 0$ ,  $N \geq 0$ . Для точок, де  $p_1(x) = p_2(x) = 0$ , покладається  $N(x) = h_1(x) = h_2(x) = 0$ .

Нехай

$$N(x) = N = \text{const}, \quad (23a)$$

тоді

$$h_1(x) = \frac{p_1(x)}{4\pi N}, \quad h_2(x) = \frac{p_2(x)}{4\pi N}. \quad (23b)$$

Обчислення значень  $N(x)$ ,  $h_1(x)$  і  $h_2(x)$  за формулами (23) завершує *Крок 2* нашої процедури.

*Крок 3.*

Цей крок є конструктивним з погляду практичної реалізації, він визначає спосіб, яким чином розмістити включення в  $D$ , яка кількість цих включень повинна бути і які електродинамічні чи акустичні параметри повинні мати ці включення.

Розіб'ємо область  $D$  на певну кількість малих кубів  $\Delta_p$ , які не мають спільних внутрішніх точок, з центрами в точках  $y^{(p)}$ , і помістимо в кожний куб

$$N(\Delta_p) = \left[ \frac{1}{a^{2-\kappa}} \int_{\Delta_p} N(x) dx \right] \quad (24)$$

малих куль  $D_m$  радіуса  $a$  з центрами в точках  $x_m$ , де  $[b]$  – найближче ціле до  $b > 0$ ,  $\kappa \in (0,1)$ . Розмістимо ці кулі на відстані  $O(a^{(2-\kappa)/3})$  і сконструюємо поверхневий

імпеданс цих куль, що дорівнює  $\frac{h(x_m)}{a^\kappa}$ .

Як було доведено у [6], створений матеріал, отриманий включенням малих куль у  $D$  запропонованим способом, матиме заданий коефіцієнт заломлення  $n^2(x)$  з помилкою, яка прямує до нуля, якщо  $a \rightarrow 0$ .

Крок 3 запропонованої процедури вимагає вирішення таких технологічних задач:

1. Як створити малі кулі радіуса  $a$  із заданим поверхневим імпедансом.

2. Яким чином вбудувати ці малі кулі у задану область  $D$ , заповнену матеріалом з відомими властивостями, згідно з вимогами Крок 3.

Звичайно, задачі 1, 2 є задачами технології, але числові результати, які будуть отримані нижче, дадуть змогу розв'язати частину інженерних проблем для практичних застосувань.

Числові експерименти проводились для постійної функції  $N(x)$ . Для простоти розглядали випадок, коли область  $D$  розбивалась на однакові підобласті  $\Delta_p$ . Таке обмеження не зменшує можливостей запропонованого підходу під час подальшого розв'язування практичних задач.

Нехай функції  $n_0^2(x)$  і  $n^2(x)$  – задані. Тоді можна обчислити значення  $h_1$  і  $h_2$  у (23б). Тобто ми можемо визначити кількість  $N(\Delta_p)$  включень в область  $D$ , значення поверхневого імпедансу  $\frac{h(x_m)}{a^k}$  при цьому легко обчислити. Але формула

(24) вказує тільки на кількість включень, вона не пояснює, як їх розмістити, щоб отримати коефіцієнт заломлення, найближчий до заданого. Тому розглядається найбільш просте з інженерного погляду розміщення включень, а саме: рівномірне заповнення всієї області  $D$  вздовж усіх трьох координатних осей, іншими словами, відстань між включеннями є однією і тією ж у трьох напрямках.

Цей спосіб розміщення включень викликатиме певне відхилення порашованого коефіцієнта заломлення  $\tilde{n}^2(x)$  від заданого.

Числові розрахунки проводились для випадку  $D = \bigcup_{p=1}^P \Delta_p$  (всі  $\Delta_p$  є однаковими),  $D$  – куб зі стороною  $l_D = 0,5$ , включення розміщені рівномірно в  $D$ . Нехай задана область  $D$  розміщена у вільному просторі, тобто  $n_0^2(x) = 1$ , а заданий коефіцієнт заломлення –  $n^2(x) = 2 + 0.01i$ . Можна порашувати значення  $N(\Delta_p)$  за формулою (24). Водночас можна вибрати таке число  $\mu$ , що  $M = \mu^3$  буде найближчим до  $N(\Delta_p)$ . Легко бачити, що відповідне  $n^2(x)$  для цього  $M$  обчислюють за формулою

$$\tilde{n}_1^2(x) = -\frac{4\pi M h_1}{k^2} + n_0^2, \quad \tilde{n}_2^2(x) = -\frac{4\pi M h_1}{k^2} \quad (25)$$

і відрізняється від заданих  $n_1^2(x)$  і  $n_2^2(x)$ . З метою отримати найменшу похибку вибирають два числа  $\mu_1$  і  $\mu_2$ , які задовольняють співвідношення  $M_1 < N(\Delta_p) < M_2$ , де  $M_1 = \mu_1^3$  і  $M_2 = \mu_2^3$ . Таким чином, маючи значення  $N(\Delta_p)$  для фіксованого  $a$ , можна оцінити числа  $M_1$  та  $M_2$  і порашувати за формулою (25) найближчі значення до  $n_1^2(x)$  і  $n_2^2(x)$ .

На рис. 1 показано залежність відносної похибки обрахованих значень  $\tilde{n}^2(x)$  від радіуса  $a$  включення для  $N(x) = 5$  (на рис. 1–3 суцільна лінія відповідає дійс-

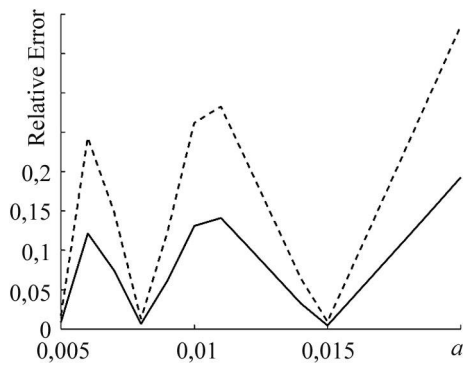


Рис. 1. Відносна похибка для порахованого коефіцієнта заломлення  $\tilde{n}^2(x)$ ,  $N(x) = 5$ .

тиві частині, а штрихова – уявній частині похибки). Наведені результати свідчать, що величина похибки суттєво залежить від співвідношення величин  $M_1$ ,  $M_2$ , і  $N(\Delta_p)$ . Похибка найменша у випадку, коли одне з чисел  $M_1$  або  $M_2$  є найближчим до  $N(\Delta_p)$ . Середня похибка на періоді зменшується зі зменшенням  $a$ . Аналогічні результати наведено для  $N = 20$  і  $N = 50$  на рис. 2 і 3 відповідно.

Рівномірне розміщення включень в області  $D$  є найпростішим з технологічного погляду. Аналізуючи результати, наведені на рис. 1–3, можна оцінити число  $M$  необхідних включень для отримання коефіцієнта заломлення, найближчого до заданого. Відповідні результати наведені на рис. 4. Вздовж осі  $y$  зображено величину  $\mu = \sqrt[3]{M}$ . Суцільна лінія відповідає  $N(x) = 5$ , штрихова –  $N(x) = 20$ , штрих-пунктирна –  $N(x) = 50$ . Знання оптимальної кількості включень у задану область  $D$  є наступним технологічним кроком створення середовища із заданим коефіцієнтом заломлення.

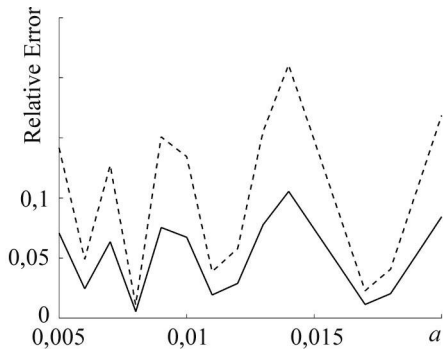


Рис. 2. Відносна похибка для обчисленого коефіцієнта заломлення  $\tilde{n}^2(x)$ ,  $N(x) = 20$ .

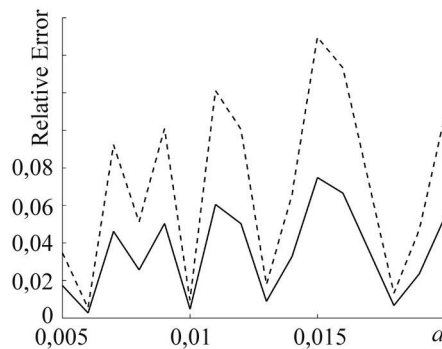


Рис. 3. Відносна похибка для обчисленого коефіцієнта заломлення  $\tilde{n}^2(x)$ ,  $N(x) = 50$ .

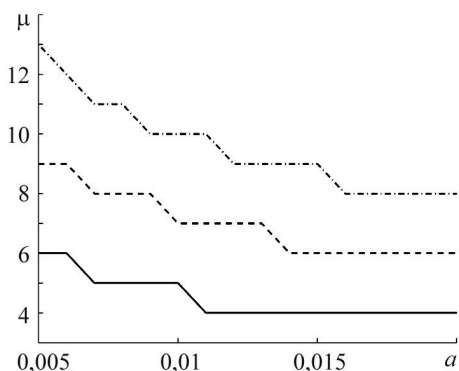


Рис. 4. Залежність оптимального значення кількості включень  $\mu$  від радіуса  $a$  для різних  $N(x)$ .

Легко бачити, що кількість включень зменшується зі збільшенням радіуса  $a$ . Оцінка  $O(a^{(2-\kappa)/3})$  дає значення відстані  $d$  між включеннями. Ця очікувана відстань відрізняється від відстані  $d$ , яка відповідає рівномірному розміщенню включень, значною мірою. Наприклад, якщо  $N(x) = 5$ ,  $a = 0,01$ , очікувана відстань  $d$  дорівнює 0,1359, а пораховане значення  $d = 0,12$  і 0,16 для  $\mu = 5$  і  $\mu = 4$  відповідно. Числові результати свідчать, що відносна різниця між двома значеннями  $d$  пропорційна до відносної похибки для коефіцієнта заломлення.

Використовуючи оцінку,  $O(a^{(2-\kappa)/3})$ ,

можна встановити відстань  $d$  між включеннями. Зрозуміло, ця відстань не залежить від діаметра  $D$ . Водночас можна оцінити кількість включень в область  $D$ , використовуючи формулу (24). Маючи значення  $N(\Delta_p)$ , можна легко порахувати відповідне число  $M$  включень для випадку їх рівномірного розміщення. Дані для діапазону оптимальних значень  $\mu$ , ( $\mu = \sqrt[3]{M}$ ) наведено у таблиці для  $l_D = 0,5$ .

Результати числових розрахунків свідчать, що відносна похибка для відповідного  $\mu$  може бути зменшена, якщо брати додатково до уваги оцінку для  $d$ . З цією метою потрібно з таблиці вибрати значення  $d$ , яке більш близьке до  $a^{(2-\kappa)/3}$ .

## ВИСНОВКИ

Результати числових розрахунків, проведених з використанням асимптотичного підходу для розв'язання задачі розсіювання на великій кількості малих включень, підтверджують можливість використання запропонованого підходу для моделювання середовища із заданим коефіцієнтом заломлення. Комп'ютерне моделювання надає можливість інженерної реалізації практичних задач. Рівномірне розміщення включень у заданій області – найпростіший спосіб для практичної реалізації, а відповідь на запитання, скільки включень необхідно помістити в цю область, дають результати числових розрахунків. Інженерні проблеми, як розмістити в цій області велику кількість включень малого радіуса і як забезпечити на їх поверхні заданий імпеданс  $\zeta = \frac{h(x)}{a^\kappa}$ , вимагають окремого технологічного вирішення.

Оптимальні значення  $\mu$  для  $l_D = 0,5$

$a$	$N(\Delta_p)$	$\mu$
0,02	92	$4 \leq \mu \leq 5$
0,01	198	$5 \leq \mu \leq 6$
0,008	253	$6 \leq \mu \leq 7$
0,005	425	$7 \leq \mu \leq 8$
0,001	2494	$13 \leq \mu \leq 14$

*Автор висловлює подяку професорові О. Г. Рамму (Університет штату Канзас, США) за постановку задачі та активне обговорення результатів.*

1. *Lyshevski S. E.* MEMS and NEMS: Systems, Devices and Structures // CRC Press, Boca Raton, FL, 2002. – 722 p.
2. *Ramm A. G.* Wave scattering by Small Bodies of Arbitrary Shapes // World Scientific. – Singapore, 2005. – 294 p.
3. *Ramm A. G.* Inverse Problem // Springer. – Berlin, 2005. – 286 p.
4. *Properties of left-handed metamaterials: negative refraction, and focusing* / T. M. Gregorczyk, C. D. Moss, Lu Jie, Chen Xudong, J. (Jr.) Pacheco, Jin Au Kong // Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on. – 2005. – **53**, № 9. – P. 2956–2967.
5. *Hansen R. C.* Negative refraction without negative index // Antennas and Propagation, IEEE Transactions on. – 2008. – **56**, № 2. – P. 402–404.
6. *Ramm A. G.* Many Body Wave Scattering by Small Bodies and Applications // J. Math. Phys. – 2007. – **48**, № 10. – P. 103–111.
7. *Ramm A. G.* Wave Scattering by Many Small Particles Embedded in a Medium // Physics Letters A. – 2008. – **372**. – P. 3064–3070.
8. *Ramm A. G.* A Collocation Method for Solving Integral Equations // Intern. J. Comput. Sci. and Mathem. – 2009. – **3**, № 2. – P. 222–228.
9. *Andriychuk M. I., Ramm A. G.* Numerical solution of many-body wave scattering problem for small particles // Proc. of XIV<sup>th</sup> Int. Seminar / Workshop DIPED-2009. Lviv, Ukraine, September 21–24, 2009. – Lviv, 2009. – P. 77–81.