КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

Оптимизация вычислений

УДК 519.854

А.Ю. БРИЛА

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ПАРЕТІВСЬКОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ З ІНТЕРВАЛЬНИМИ ОЦІНКАМИ

Розглядається задача паретівської багатокритеріальної оптимізації, у якій альтернативи оцінюються за допомогою інтервальних оцінок. Вважаємо, що часткові цільові функції та обмеження є лінійними і містять інтервальні коефіцієнти. Для розв'язання цієї задачі запропоновано підхід, який грунтується на зведенні її до задачі скалярної оптимізації. На першому кроці розглядувана задача паретівської багатокритеріальної оптимізації зводиться до задачі Парето-лексикографічної оптимізації з лексикографічними обмеженнями. На другому кроці задача може бути зведена до задачі лексикографічної оптимізації з скалярними обмеженнями та задачі з скалярним критерієм.

Вступ. Багато задач прийняття рішень не можуть бути описані за допомогою засобів чіткої оптимізації у зв'язку з невизначеністю ознак, що впливають на кінцеве рішення. Тому на практиці часто у таких випадках застосовують засоби нечіткої оптимізації. Зокрема, широко поширеними є випадки, коли параметри, що описують досліджувану модель, можуть бути представлені за допомогою інтервальних оцінок.

Будемо вважати, що центр інтервалу представляє очікуване значення, а ширина інтервалу відображає невизначеність значення параметра. При порівнянні інтервальних оцінок будемо використовувати підхід, що запропоновано у [19]. Такий підхід дозволяє здійснювати порівняння інтервалів стосовно відношення прийнятності.

Розглядатимемо задачу прийняття рішень, у якій критеріальні функції є рівноважливими, часткові критерії та обмеження є лінійними і можуть містити інтервальні коефіцієнти. Дані припущення ускладнюють задачу прийняття рішень, оскільки не дозволяють використовувати для її розв'язання відомі методи чіткої багатокритеріальної оптимізації.

У даній статті для розв'язання розглядуваної задачі застосовано підхід, що ґрунтується на зведенні її до задачі Парето-лексикографічної оптимізації [1] з лексикографічними обмеженнями. А вона в свою чергу може бути розв'язана шляхом зведення її до задачі лексикографічної оптимізації або ж зведенням її до задачі скалярної оптимізації.

2. Правило порівняння інтервальних оцінок

Інтервальні оцінки розглядуваної задачі прийняття рішень характеризуються за допомогою пари чисел

$$A = \langle a_C, a_W \rangle,$$

де $a_C \in R$ є центром інтервалу, $a_W \in R,$ є шириною інтервалу. Центр інтервалу характеризує очікуване значення параметру, а ширина інтервалу відображає міру невизначеності параметру [19].

Будемо використовувати звичні операції інтервальної арифметики [10 – 20].

Нехай $A = \langle a_C, a_W \rangle$, $B = \langle b_C, b_W \rangle$, тоді

$$A + B = \langle a_C, a_W \rangle + \langle b_C, b_W \rangle = \langle a_C + b_C, a_W + b_W \rangle, \tag{1}$$

$$kA = k\langle a_C, a_W \rangle = \langle ka_C, |k| a_W \rangle.$$

Будемо вважати, що усі змінні є невід'ємними цілими числами, тому попередню операцію можна записати так:

$$kA = k\langle a_C, a_W \rangle = \langle ka_C, ka_W \rangle. \tag{2}$$

При порівнянні інтервальних оцінок будемо використовувати правило, запропоноване Hu і Wang [19].

Означення 1. Для будь-яких двох інтервальних оцінок $A = \langle a_C, a_W \rangle$ і $B = \langle b_C, b_W \rangle$.

$$A \prec_{=} B, \text{ якщо } \begin{cases} a_C < b_C, \text{ якщо } a_C \neq b_C; \\ a_W \geq b_W, \text{ якщо } a_C = b_C; \end{cases} \tag{3}$$

$$A = B, \text{ якщо } \begin{cases} a_C = b_C; \\ a_W = b_W; \end{cases} \tag{4}$$

$$A \prec B \text{ якщо } A \prec_{=} B \text{ і } A \neq B.$$

Відношення $A \prec_{=} B$ означає, що A є менш прийнятним ніж B. Очевидно, що у випадку, коли центри інтервалів є рівними, то особа, що приймає рішення віддасть перевагу інтервалу з меншою мірою невизначеності (меншою шириною інтервалу).

3. Паретівська багатокритеріальна задача оптимізації з інтервальними оцінками

Розглянемо задачу оптимізації, у якій коефіцієнти є інтервальними оцінками:

$$\max{}^{P} F(x) = \left(f_1(x), f_2(x), ..., f_p(x) \right), \tag{5}$$

з обмеженнями

$$G_i(x) \prec_{=} B_i, \ i = 1, 2, ..., m, \tag{6}$$

$$x \geq 0, \tag{7}$$

$$x \in D \subset Z^n. \tag{8}$$

Де

$$f_i(x) = F_{i1}x_1 + F_{i2}x_2 + ... + F_{in}x_n,\ i = 1,2,..., p,$$

$$G_i(x) = A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + ... + A_{in}x_n,\ i = 1,2,..., m,$$

$$F_{ij} = \langle f_{ijC}, f_{ijW} \rangle,\ A_{ij} = \langle a_{ijC}, a_{ijW} \rangle,\ B_i = \langle b_{iC}, b_{iW} \rangle,$$

$D \subset Z^n$ задає множину можливих значень для цілочислових змінних задачі.

Позначимо множину допустимих розв'язків, що задається за допомогою обмежень (6) – (8) як X.

У даній задачі оптимізації використовуватимемо правило віддачі переваги, що задається означенням 1. Дамо означення оптимального розв'язку.

Означення 2. Допустимий розв'язок $x^* \in X$ є *оптимальним* (непокращуваним) розв'язком, якщо не існує такого $y \in X$, що

$$F\left(x^*\right) \prec_{=}^{P} F(y).$$

Це означає, що не існує такого $y \in X$, для якого

$$f_i\left(x^*\right) \prec_{=} f_i(y),\ i = 1,2,..., p,$$

і існує таке $k, (1 \le k \le p)$, що

$$f_k\left(x^*\right) \prec f_k(y).$$

4. Зведення паретівської задачі багатокритеріальної оптимізації з інтервальними оцінками до багатокритеріальної задачі Парето-лексикографічної оптимізації з лексикографічними обмеженнями

Для початку розглянемо зміст лексикографічних обмежень. Лексикографічні обмеження розгядаються в [1] і [6 – 9]. У загальному вони задаються за допомогою векторної нерівності

$$g(x) \le^L b,$$

де

$$g : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^q,$$

$$g(x) = \left(g_1(x), g_2(x), ..., g_q(x)\right),$$

$$g_i(x) : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R},\ i = 1,2,..., q,$$

$$b \in \mathrm{R}^q,\ b = \left(b_1, b_2, ..., b_q\right),$$

(нерівність "$\le^L$" означає, що вектори порівнюються з використанням правила лексикографічного порядку віддачі переваги [1 – 9]). Таким чином обмеження складається з $q, \left(q \ge 1\right)$ часткових скалярних обмежень:

$$g_1(x) \le b_1,$$
$$g_2(x) \le b_2,$$
$$\dots$$
$$g_q(x) \le b_q.$$

Альтернатива $x \in \mathrm{R}^n$ задовольняє це лексикографічне обмеження, якщо один із випадків має місце:

1) $g_1(x) < b_1$;

2) $g_1(x) = b_1$,

$g_2(x) < b_2$;

3) $g_1(x) = b_1$,

$g_2(x) = b_2$,

$g_3(x) < b_3$;

. . .

q) $g_1(x) = b_1$,

$g_2(x) = b_2$,

. . .

$g_{q-1}(x) = b_{q-1}$,

$g_q(x) < b_q$.

q+1) $g_i(x) = b_i$, $i = 1, 2, ..., q$.

Враховуючи властивості лексикографічних обмежень, правило віддачі переваги, яке задається означенням 1, може бути представлено за допомогою лексикографічного порядку віддачі переваги, тобто:

$$A \prec_{=} B \text{ якщо } \overline{A} \le^L \overline{B},$$

де

$$\overline{A} = (A_C, -A_W),$$
$$\overline{B} = (B_C, -B_W).$$

Використовуючи таке представлення паретівська задача багатокритеріальної оптимізації з інтервальними оцінками може бути зведена до багатокритеріальної задачі Парето-лексикографічної оптимізації з лексикографічними обмеженнями:

$$\max{}^{PL} \overline{F}(x) = \left(\overline{f}_1(x), \overline{f}_2(x), ..., \overline{f}_p(x)\right), \tag{9}$$

з обмеженнями

$$\overline{G}_i(x) \le^L \overline{B}_i, i = 1, 2, ..., m, \tag{10}$$

$$x \geq 0, x \in D \subset \mathrm{Z}^n, \tag{11}$$

де

$$\bar{f}_i(x) = \left(F_{iC}(x), -F_{iW}(x)\right),$$
$$F_{iC}(x) = f_{i1C}x_1 + f_{i2C}x_2 + \ldots + f_{inC}x_n,$$
$$F_{iW}(x) = f_{i1W}x_1 + f_{i2W}x_2 + \ldots + f_{inW}x_n,$$
$$\bar{G}_i(x) = \left(\bar{G}_{iC}(x), -\bar{G}_{iW}(x)\right),$$
$$\bar{G}_{iC}(x) = a_{i1C}x_1 + a_{i2C}x_2 + \ldots + a_{inC}x_n,$$
$$\bar{G}_{iW}(x) = a_{i1W}x_1 + a_{i2W}x_2 + \ldots + a_{inW}x_n,$$
$$\bar{B}_i = \left(b_{iC}, -b_{iW}\right).$$

Таким чином при заданому способі завдання і порівняння інтервальних оцінок паретівську задачу багатокритеріальної оптимізації з інтервальними оцінками (5) – (8) можемо звести до цілочислової задачі Парето-лексикографічної оптимізації з лексикографічними обмеженнями (9) – (11). Для її розв'язання можемо використати відомі методи [1].

5. Зведення цілочислової задачі Парето-лексикографічної оптимізації з лексикографічними обмеженнями до цілочислової лексикографічної задачі та цілочислової задачі з скалярною цільовою функцією

Використовуючи міркування аналогічні до [1], задача Парето-лексикографічної оптимізації з лексикографічними обмеженнями (9) – (11) може бути зведена до задачі лексикографічної оптимізації з лексикографічними обмеженнями

$$\max{}^L\, l(x) = \left(L_C, -L_W\right) = \lambda_1 \bar{f}_1(x) + \lambda_2 \bar{f}_2(x) + \ldots + \lambda_p \bar{f}_p(x), \tag{12}$$

з обмеженнями

$$\bar{G}_i(x) \leq^L \bar{B}_i, i = 1, 2, \ldots, m, \tag{13}$$

$$x \geq 0, x \in D \subset \mathbf{Z}^n, \tag{14}$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_q$ – деякі додатні числа,

$$L_C(x) = \lambda_1 F_{1C}(x) + \lambda_2 F_{2C}(x) + \ldots + \lambda_p F_{pC}(x) = l_{1C}x_1 + l_{2C}x_2 + \ldots + l_{nC}x_n,$$

$$l_{jC} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_{ijC},\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$L_W(x) = \lambda_1 F_{1W}(x) + \lambda_2 F_{2W}(x) + \ldots + \lambda_p F_{pW}(x) = l_{1W}x_1 + l_{2W}x_2 + \ldots + l_{nW}x_n,$$

$$l_{jW} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_{ijW},\ j = 1, 2, \ldots, n..$$

Нехай додатні коефіцієнти α_{i1}, α_{i2} ($1 \leq i \leq m$) знайдені за правилом:

$\alpha_{i2} > 0$ – деяке довільне додатне число; α_{i1} визначено згідно умови

$$\alpha_{i1} > \frac{1}{\mu_i} \alpha_{i2} M_{i2}, \tag{15}$$

де

$$M_{i2} \geq \max\left\{\left|b_{iW} - \bar{G}_{iW}(x)\right| : x \in D\right\}, i = 1, 2, ..., m, \quad (16)$$

$$0 < \mu_i \leq \inf_{\substack{x \in D \\ b_{iC} \neq \bar{G}_{iC}(x)}} \left|b_{iC} - \bar{G}_{iC}(x)\right|. \quad (17)$$

Якщо $a_{ijC} > 0,$ то у (16) можемо використати

$$M_{i2} \geq \max\left\{\left|b_{iW} - \bar{G}_{iW}(x)\right| : x \in D_i\right\}, i = 1, 2, ..., m, \quad (18)$$

або ж

$$M_{i2} \geq \max\left\{b_{iW}, \left|b_{iW} - \bar{G}_{iW}\left(\bar{d}_{i1}, \bar{d}_{i2}, ..., \bar{d}_{in}\right)\right|\right\}, i = 1, 2, ..., m, \quad (19)$$

де

$$D_i = \left\{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in Z^n : 0 \leq x_j \leq \bar{d}_{ij} = \left[\frac{b_{iC}}{a_{ijC}}\right], j = 1, 2, ..., n\right\}.$$

Зазначимо, що у випадку $x_j \in \{0,1\},\ j = 1, 2, ... n$ у (19) $\bar{d}_{ij} = 1.$

Також, у випадку, коли $a_{ijC} \in \mathbf{Z}$ $(1 \leq j \leq n)$ і $b_{iC} \in \mathbf{Z},$ то для спрощення можемо використати

$$\mu_i = 1. \quad (20)$$

Коефіцієнти α_{01}, α_{02} знайдемо згідно формул:

$\alpha_{02} > 0$ – деяке додатне число; α_{01} обчислимо згідно з умовою ([2])

$$\alpha_{01} > \frac{1}{\mu_0} \alpha_{02} M_{02}, \quad (21)$$

де

$$M_{02} \geq \max\left\{L_W(x) : x \in X\right\}, \quad (22)$$

$$0 < \mu_0 \leq \inf_{\substack{x, y \in X \\ L_C(x) \neq L_W(y)}} \left|L_C(x) - L_W(y)\right|. \quad (23)$$

Якщо $x_j \in \mathrm{Z}$ $(1 \leq j \leq n)$

$$\mu_0 \leq \min\left\{\left|l_{jC}\right| : 1 \leq j \leq n\right\}. \quad (24)$$

$$D_i = \left\{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in Z^n : 0 \leq x_j \leq \bar{d}_{ij} = \left[\frac{b_{iC}}{a_{ijC}}\right], j = 1, 2, ..., n\right\}.$$

Зазначимо також, що у випадку $x_j \in \{0,1\}$ $(1 \leq j \leq n)$ у (22) можна використати

$$M_{02} \geq L_W(1,1,...,1) = \sum_{j=1}^{n} l_{jW}.$$

Нехай

$$g_i(x) = \alpha_{i1}\bar{G}_{iC}(x) - \alpha_{i2}\bar{G}_{iW}, \quad (25)$$

$$b_i = \alpha_{i1} b_{iC} - \alpha_{i2} b_{iW}, \tag{26}$$

$$c(x) = \alpha_{01} L_C(x) - \alpha_{02} L_W(x). \tag{27}$$

Теорема. *Оптимальний розв'язок задачі*

$$\max\ c(x), \tag{28}$$

з обмеженнями

$$g_i(x) \le b_i,\ i = 1,2,...,m, \tag{29}$$

$$x \ge 0, x \in Z^n, \tag{30}$$

є оптимальним розв'язком задачі (5) – (8).

Доведення. Згідно з [2] цільова функція $c(x)$ представляє лексикографічний порядок віддачі переваги на допустимій множині X. У роботі [12] доведено, що лексикографічні обмеження

$$\bar{G}_i(x) \le^L \bar{B}_i,\ 1 \le i \le m,$$

є еквівалентними обмеженням

$$g_i(x) \le b_i,\ 1 \le i \le m.$$

Аналогічно до [1], легко довести, що розв'язок задачі лексикографічної оптимізації (12) – (14) є розв'язком задачі Парето-лексикографічної оптимізації (9) – (11). А отже, оптимальний розв'язок задачі (28) – (30) – оптимальний розв'язок задачі (5) – (8).

Даний підхід аналогічно може бути використаним у таких випадках:

- тільки цільова функція містить інтервальні коефіцієнти (в цьому випадку задача (12) – (14) – це звичайна задача Парето-лексикографічної оптимізації і для її розв'язання можна використати відомі методи [1]);
- тільки множина допустимих розв'язків містить інтервальні коефіцієнти (тоді змінивши обмеження з використанням (15) – (19), ми знову ж таки приходимо до звичайної задачі паретівської оптимізації);
- не всі обмеження містять інтервальні коефіцієнти (тоді необхідно замінити тільки обмеження з інтервальними оцінками з використанням (15) – (19)).

6. Приклади

Не зменшуючи загальності міркувань, для ілюстрації підходу розглянемо приклади невеликої розмірності.

Приклад 1. Розглянемо задачу паретівської оптимізації, у якій часткові цільові функції містять інтервальні оцінки

$$\max^P F(x),\ x \in X, \tag{31}$$

де

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x)),$$

$$f_1(x) = \langle 5,2 \rangle x_1 + \langle 4,2 \rangle x_2 + \langle 3,3 \rangle x_3,$$

$$f_2(x) = \langle 7,4 \rangle x_1 + \langle 6,3 \rangle x_2 + \langle 4,2 \rangle x_3,$$

$$f_3(x) = \langle 3, 2.5\rangle x_1 + \langle 5,5\rangle x_2 + \langle 3,10\rangle x_3,$$

множина допустимих розв’язків X задається за допомогою обмежень

$$4.6x_1 + 7.6x_2 + 3.6x_3 \le 21,$$
$$5.8x_1 + 3.6x_2 + 7.8 \le 31,$$
$$7.5x_1 + 6.5x_2 + 6.8x_3 \le 41,$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,$$
$$x_j \in \mathbf{Z},\ j = 1,2,3.$$

Враховуючи представлення порядку віддачі переваги (3) – (4) за допомогою лексикографічного порядку віддачі переваги перейдемо до задачі Парето-лексикографічної оптимізації

$$\max{}^{PL}\, \overline{F}(x) = \left(\overline{f}_1(x), \overline{f}_2(x), \overline{f}_3(x)\right),\ x \in X,$$

де

$$\overline{f}_1(x) = \left(F_{1C}(x), -F_{1W}(x)\right) = \left(5x_1 + 4x_2 + 3x_3, -\left(2x_1 + 2x_2 + 3x_3\right)\right),$$
$$\overline{f}_2(x) = \left(F_{2C}(x), -F_{2W}(x)\right) = \left(7x_1 + 6x_2 + 4x_3, -\left(4x_1 + 3x_2 + 2x_3\right)\right),$$
$$\overline{f}_3(x) = \left(F_{3C}(x), -F_{3W}(x)\right) = \left(3x_1 + 5x_2 + 3x_3, -\left(2.5x_1 + 5x_2 + 10x_3\right)\right).$$

Згідно з [1] перейдемо до задачі лексикографічної оптимізації, вибравши коефіцієнти

$$\lambda_i = 1, i = 1,2,3. \tag{32}$$

$$\max{}^{L}\, l(x) = \left(L_C(x), -L_W(x)\right) = \lambda_1 \overline{f}_1(x) + \lambda_2 \overline{f}_2(x) + \lambda_3 \overline{f}_3(x) =$$
$$= \left(15x_1 + 15x_2 + 10x_3, -\left(8.5x_1 + 10x_2 + 15x_3\right)\right),\ x \in X.$$

Таким чином задачу (31) зведено до задачі лексикографічної оптимізації, яка може бути розв’язана відомими методами [1]. Зведемо дану задачу до задачі з скалярною цільовою функцією, використовуючи (15) – (18).

Зазначимо, що

$$0 \le x_1 \le \min\left\{\frac{21}{4.6}, \frac{31}{5.8}, \frac{41}{7.5}\right\} = \frac{21}{4.6} \Rightarrow 0 \le x_1 \le 4 = d_1,$$
$$0 \le x_2 \le \min\left\{\frac{21}{7.6}, \frac{31}{3.6}, \frac{41}{6.5}\right\} = \frac{21}{7.6} \Rightarrow 0 \le x_2 \le 2 = d_2,$$
$$0 \le x_3 \le \min\left\{\frac{21}{3.6}, \frac{31}{7.8}, \frac{41}{6.8}\right\} = \frac{31}{7.8} \Rightarrow 0 \le x_3 \le 3 = d_3.$$
$$\alpha_{02} = 1,$$
$$M_{02} = F_W(d_1, d_2, d_3) = F_W(4,2,3) = 8.5*4 + 10*2 + 15*3 = 99 \ge \max_{x \in X}\left\{L_W(x) : x \in X\right\},$$
$$\mu_0 = \min\{15,15,10\} = 10,$$
$$\alpha_{01} = 10 > \frac{1}{\mu_0} M_{02} = \frac{1}{10} 99 = 9.9.$$

Використовуючи ці коефіцієнти, отримаємо задачу оптимізації

$$\max\ c(x) = \alpha_{01} L_C(x) - \alpha_{02} L_W(x) = 141.5x_1 + 140x_2 + 85x_3,\ x \in X.$$

Таким чином задачу паретівської оптимізації з інтервальними оцінками з відповідним набором коефіцієнтів (32) можна звести до задачі скалярної оптимізації. $x^* = (4,0,0)$ – оптимальний розв'язок задачі. Аналогічно, як і при розв'язанні звичайної задачі паретівської оптизації, вибравши інший набір коефіцієнтів λ_i в (32), можемо одержати інші оптимальні розв'язки.

Приклад 2. Розглянемо задачу оптимізації з інтервальними оцінками як у цільовій функції, так і в обмеженнях.

$$\max^P F(x),\ x \in X, \tag{33}$$

де

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x)),$$
$$f_1(x) = \langle 2,7\rangle x_1 + \langle 7,4\rangle x_2 + \langle 9,2\rangle x_3,$$
$$f_2(x) = \langle 2,2\rangle x_1 + \langle 2,4\rangle x_2 + \langle 4,2\rangle x_3,$$

множина допустимих розв'язків X задається за допомогою обмежень

$$G_1(x) = \langle 2,2\rangle x_1 + \langle 1,3\rangle x_2 + \langle 5,2\rangle x_3 \prec_= \langle 7,5\rangle,$$
$$G_2(x) = \langle 3,2\rangle x_1 + \langle 8,6\rangle x_2 + \langle 4,2\rangle x_3 \prec_= \langle 13,9\rangle,$$
$$x_j \in \{0,1\},\ j = 1,2,3.$$

Враховуючи представлення порядку віддачі переваги (3) – (4) за допомогою лексикографічного порядку віддачі переваги перейдемо до задачі Парето-лексикографічної оптимізації

$$\max^{PL} \bar{F}(x) = (\bar{f}_1(x), \bar{f}_2(x)),\ x \in \bar{X},$$

де

$$\bar{f}_1(x) = (F_{1C}(x), -F_{1W}(x)) = (2x_1 + 7x_2 + 9x_3, -(7x_1 + 4x_2 + 2x_3)),$$
$$\bar{f}_2(x) = (F_{2C}(x), -F_{2W}(x)) = (2x_1 + 2x_2 + 4x_3, -(2x_1 + 4x_2 + 2x_3)),$$

множина допустимих розв'язків $\bar{X}$ задається за допомогою обмежень

$$\bar{G}_1(x) = (\bar{G}_{1C}, -\bar{G}_{1W}) = (2x_1 + 1x_2 + 5x_3, -(2x_1 + 3x_2 + 2x_3)) \le^L (7,-5),$$
$$\bar{G}_2(x) = (\bar{G}_{2C}, -\bar{G}_{2W}) = (3x_1 + 8x_2 + 4x_3, -(2x_1 + 6x_2 + 2x_3)) \le^L (13,-9),$$
$$x_j \in \{0,1\},\ j = 1,2,3.$$

Згідно з [1] перейдемо до задачі лексикографічної оптимізації, вибравши коефіцієнти

$$\lambda_1 = 0.2,\ \lambda_2 = 0.8. \tag{34}$$

$$\max^L l(x) = (L_C(x), -L_W(x)) = \lambda_1 \bar{f}_1(x) + \lambda_2 \bar{f}_2(x) =$$
$$= (2x_1 + 3x_2 + 5x_3, -(3x_1 + 4x_2 + 2x_3)),\ x \in \bar{X}.$$

Таким чином задачу (33) зведено до задачі лексикографічної оптимізації з лексикографічними обмеженнями, яка може бути розв’язана відомими методами [1]. Зведемо дану задачу до задачі з скалярною цільовою функцією, використовуючи (15) – (24).

$$\alpha_{02} = 1,$$

$$M_{02} = 9 = \sum_{j=1}^{3} l_{jW} = 3 + 4 + 2,$$

$$\mu_0 = 2 \le \min\{2,3,5\},$$

$$\alpha_{01} = 5 > \frac{1}{\mu_0}\alpha_{02}M_{02},$$

$$\alpha_{12} = 1,$$

$$M_{12} = 5 \ge \max\{5, |5-(2+3+2)|\},$$

$$\mu_1 = 1,$$

$$\alpha_{11} = 6 > \frac{1}{\mu_1}\alpha_{12}M_{12} = 5,$$

$$\alpha_{22} = 1,$$

$$M_{22} = 9 \ge \max\{9, |9-(2+6+2)|\},$$

$$\mu_2 = 1,$$

$$\alpha_{21} = 10 > \frac{1}{\mu_2}\alpha_{22}M_{22} = 9.$$

Використовуючи ці коефіцієнти отримаємо задачу

$$\max c(x) = \alpha_{01}L_C(x) - \alpha_{02}L_W(x) = 7x_1 + 11x_2 + 23x_3$$

з обмеженнями

$$g_1(x) = 10x_1 + 3x_2 + 28x_3 \le 37,$$

$$g_2(x) = 28x_1 + 74x_2 + 38x_3 \le 121,$$

$$x_j \in \{0,1\},\ j = 1,2,3.$$

Розв’язком цієї задачі є $x^* = (0,1,1)$. Інші розв’язки можемо отримати, вибравши інший набір коефіцієнтів λ_i у (34).

Висновки. У роботі розглянуто одну задачу паретівської оптимізації, яка містить інтервальні оцінки. Ця задача може бути зведена до задачі Парето-лексикографічної оптимізації з лексикографічними обмеженнями, яка у свою чергу може бути зведена до задачі лексикографічної оптимізації із скалярними обмеженнями. Перевагою такого підходу є можливість застосування відомих методів лексикографічної оптимізації.

А.Ю. Брила

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПАРЕТОВСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ОЦЕНКАМИ

Рассматривается задача паретовской многокритериальной оптимизации, в которой альтернативы оцениваются с помощью интервальных оценок. Мы считаем, что частичные целевые функции и ограничения линейны и содержат интервальные коэффициенты. Для решения этой задачи предложен подход, который основан на сведении её к задаче скалярной оптимизации. На первом шаге рассматриваемая задача паретовской многокритериальной оптимизации сводится к задаче Парето-лексикографической оптимизации с лексикографическими ограничениями. На втором шаге задача может быть сведена к задаче лексикографической оптимизации с скалярными ограничениями и задаче с скалярным критерием.

A.Yu. Bryla

A PARETO OPTIMIZATION PROBLEM WITH INTERVAL PARAMETERS

A decision-making problem, where alternatives are estimated with interval parameters and the feasible set is defined using interval constraints is considered. Based on the assumption that the objective functions and constraints are linear, a linear Pareto optimization problem with interval coefficients in the objective functions and constraints is defined. For solving this problem, an approach to its reduction to the optimization problem with a scalar objective function and scalar constraints is proposed. This approach consists of two steps. At the first step, we reduce the problem with interval coefficients to a Pareto-lexicographical optimization problem with lexicographical constraints. At the second step, we reduce this lexicographic optimization problem to a problem with a single scalar objective function and scalar constraints. This makes it possible to use well-known classical methods of crisp optimization.

Список літератури

1. Hu B.Q., Wang S. A novel approach in uncertain programming Part I: New arithmetic and order relation for interval numbers, *J. Ind. Manag. Optim*. 2006. 2(4). P. 351 – 371.
2. Червак Ю.Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір. Ужгород: Ужгород. нац. ун т, 2002. 312 с.
3. Alefeld G., Herzberger J. Introduction to Interval Computations (Translated by J. Rokne), Academic Press, New York, 1983.
4. LodwickW.A. Interval and fuzzy analysis: An unifsed approach. Advances in Imagining and Electronic Physics, P.W. Hawkes, Editor. Elsevier Press. 2007. Vol. 148, P. 75 – 192.
5. Lodwick W.A., Jamison K. D. Interval methods and fuzzy optimization. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems.* 1997. Vol. 5, N 3. P. 239 – 249.
6. Lodwick W.A., Neumaier A., Newman F. Optimization under uncertainty: methods & applications in radiation therapy, in: Proceedings of the 10th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, December 2–5, 2001, Melbourne, Australia, 2001. P. 1219 – 1222.
7. Neumaier. Introduction to Numerical Analysis, Cambridge University Press, Cambridge. 2001.
8. Ramon E., Moore R., Baker Kearfott, Michael J. Cloud Introduction to Interval Analysis. *Society for Industrial and Applied Mathematics*. Philadelphia, 2009.
9. Moore R.E. Methods and Applications of Interval Analysis, SIAM. Philadelphia, 1979.
10. Delgado M., Kacprzyk J., Verdegay J.L., Vila M.A. Fuzzy Optimization: Recent Advances, Physica-Verlag, New York. 1994.

11. Karmakar S., Bhunia A.K. An alternative optimization technique for interval objective constrained optimization problems via multiobjective programming. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*. 2014. 22. P. 292 – 303.
12. Bryla A. On Solving an Optimization Problem with Interval Coefficients. Optimization Methods and Applications. 2017. Vol. 130. P. 57 – 74.
13. Borning A., Freeman-Benson, B., & Wilson M. *Constraint hierarchies*. *LISP and Symbolic Computation.* 1992. Vol. 5(3). P. 223 – 270.
14. Freuder E., Heffernan R., Wallace R., Wilson N. Lexicographically-ordered constraint satisfaction problems. *Constraints*. 2010. Vol. 15(1). P. 1 – 28.
15. Argelich J., Lynce I., Marques-Silva J. On solving Boolean multilevel optimization problems. InInternational Joint Conference on Artificial Intelligence. July 2009. P. 393 – 398.
16. Noghin V. Relative importance of criteria: A quantitative approach. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis.* 1997. 6. P. 355 – 363.
17. Подиновский В.В. Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 64 с.
18. Подиновский В.В., Гаврилов В.М. Оптимизация по последовательно применяемым критериям. М.: Сов. радио, 1975. 115 с.
19. Брила А.Ю. Достижимость оптимальных решений линейной задачи многокритериальной оптимизации по взвешенной сумме критериев разной важности в транзитивной субординации. *Кибернетика и системный анализ.* 2008. № 5. С. 135 – 138.

Одержано 04.10.2018

Про автора:

Брила Андрій Юрійович,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри системного аналізу і теорії оптимізації
Вищого державного навчального закладу «Ужгородський національний університет».
E-mail: bryla.andrii@gmail.com