Теорія оптимальних рішень

УДК 519.8

А.М. НАГІРНА

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА МНОЖИНІ СПОЛУЧЕНЬ

Розглянуто алгоритм знаходження максимального значення цільової функції з урахуванням додаткових лінійних обмежень на множині сполучень. Продемонстровано застосування алгоритму на числовому прикладі.

Вступ. При моделюванні різного роду процесів та явищ у різних сферах діяльності людини, досить часто застосовуються моделі, що являють собою задачі умовної оптимізації.

Особливої уваги заслуговують моделі таких задач, розглянутих на комбінаторних множинах.

На сьогодні значна кількість робіт присвячена вивченню та дослідженню моделям комбінаторної природи [1 – 10].

Дані моделі широко використовуються в комп'ютерних технологіях, машинобудуванні, логістиці, кристалографії, біології, хімії, медицині, при комплексній розробці систем захисту інформаційних потоків на підприємстві й т. п.

Не зважаючи на просту побудову комбінаторних множин, задачі комбінаторної оптимізації є складними і трудомісткими з обчислювальної точки зору, тому виникає потреба у розробці нових методів та алгоритмів їх розв'язання.

В даній роботі представлено новий підхід для пошуку максимального значення цільової функції, з урахуванням додаткових лінійних обмежень на комбінаторній множині сполучень.

Основна ідея алгоритму полягає у дослідженні приростів цільової функції та додаткових лінійних обмежень для знаходження першого опорного розв'язку та його покращення до оптимального.

1. Постановка задачі. Розглянемо означення, необхідне для постановки задачі умовної оптимізації на множині сполучень.

Означення 1. Нехай задано множину $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $(n \in N)$. Сполучення без повторень з n елементів по k $(n \le k)$ називається k-елементна підмножина C множини A. Порядок запису елементів множини неістотний, тому, як правило, елементи в кожному сполученні записуються у порядку зростання.

Розглянемо сполучення $(a_1, a_2, ..., a_k)$, як рядок чисел $a_1, a_2, ..., a_k$, де $a_1 < a_2 < ... < a_k$. Тоді C_n^k – кількість усіх сполучень без повторень з n елементів по k, де $(n \le k)$, $n > 0$, $k > 0$ [2]:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1}$$

За даним сполученням можна знайти наступне відповідно до лексикографічного порядку [6].

Розглянемо оптимізаційну задачу вигляду:

$$Z(\Phi, C_n^k(A)) : \max\{\Phi(\text{a}) \mid \text{a} \in C_n^k\}, \tag{2}$$

$$D = \{x \in R^n \mid Gx \le (\ge) b\}, \text{ де } G \in R^{m \times n},\ b \in R^m, \tag{3}$$

де $\Phi(\text{a}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ – цільова функція на комбінаторній множині сполучень C_n^k.

2. Алгоритм розв'язування задачі умовної оптимізації на множині сполучень. Запропонований алгоритм складається із трьох кроків, які забезпечують знаходження оптимального розв'язку максимізації оптимізаційної задачі з додатковими лінійними обмеженнями на множині сполучень.

Крок 1. Знаходження першого опорного розв'язку. Згідно означення 1, елементи множини сполучень впорядковані за зростанням, тому за початкову точку беремо максимальний елемент множини сполучень $(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n)$, де $(x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n)$. Далі здійснюємо перевірку обмежень (3).

Якщо обмеження виконуються, то переходимо до виконання кроку 2. В іншому випадку вибираємо за спаданням наступну точку множини сполучень і повторюємо крок 1.

Крок 2. Формування початкових умов. Точка множини сполучень, що задовольняє всі обмеження (3) буде першим опорним розв'язком. Тоді для подальшого пошуку оптимального розв'язку формуються наступні умови:

$$f^{\text{поч}}(x_1, x_2, ..., x_n) = b,$$

$$\begin{cases} \Delta g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \le \Delta b_1, \\ \Delta g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \le \Delta b_2, \\ ...., \\ \Delta g_n(x_1, x_2, ..., x_n) \le \Delta b_n, \end{cases} \tag{4}$$

де

$$\Delta b_n = b_n - g_n(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{5}$$

Крок 3. Покращення опорного розв'язку. Розглядається точка за спаданням після першого опорного розв'язку множини сполучень. Знаходимо приріст цільової функції:

$$\Delta f = \Delta f_2 - \Delta f_1 = \left(x_i^{f_2} * c_j + x_j^{f_2} * c_i\right) - \left(x_j^{f_1} * c_j + x_i^{f_1} * c_i\right). \tag{6}$$

Оскільки необхідно знайти максимальне значення цільової функції, то необхідною умовою покращення першого опорного розв'язку, є умова:

$$\Delta f^{\max} > 0\,. \tag{7}$$

Якщо (7) не виконується, то розглядається наступна точка за спаданням.

При виконанні необхідної умови знаходимо прирости додаткових обмежень та здійснюємо перевірку кроку 2, тобто умов (4). У випадку не виконання (4), розглядаємо наступну точку за спаданням і перевіряємо виконання (7).

Слід відмітити, що умови (4) є достатніми для знаходження оптимального розв'язку, а умова (7) необхідною для його пошуку.

3. Приклад. Задано цільову функцію вигляду $f(x) = -2x_1 + 4x_2 + 11x_3$ на множині сполучень C_5^3, де A = (1, 2, 3, 4, 5) та додаткові лінійні обмеження:

$$\begin{cases} g_1 = 4x_1 + x_2 - 3x_3 \le 10, \\ g_2 = -6x_1 + 9x_2 - 2x_3 \ge 7, \\ g_3 = -x_1 + 7x_2 + 5x_3 \ge 25. \end{cases}$$

Необхідно знайти максимальне значення даної цільової функції з урахуванням заданих додаткових лінійних обмежень.

Розв'язання.

Оскільки, елементи множини сполучень впорядковані за зростанням, тому початковою точкою буде максимальний елемент множини сполучень (345), відповідно $f_1^{\max}(345) = 65$.

Перевіряємо виконання додаткових обмежень: $g_1'(345) = 1 \le 10$, $g_2'(345) = 8 \ge 7$, $g_3'(345) = 50 \ge 25$. Всі нерівності виконуються, тому дана точка є першим опорним розв'язком.

Сформуємо початкові умови для подальшого покращення першого опорного розв'язку:

$$f^{поч}(345) = 65,$$

$$\begin{cases} \Delta g_1'(345) \le 9, \\ \Delta g_2'(345) \ge -1, \\ \Delta g_3'(345) \ge -17. \end{cases}$$

Розглянемо наступну точку множини сполучень (245): $\Delta f_1 = -2*2 + +2*3 = 2 > 0,$ отже, значення цільової функції збільшиться на 2 одиниці, тому необхідно перевірити прирости додаткових обмежень.

Для першого обмеження: $\Delta g_1'(245) = -4 < 9,$ нерівність справджується.

Для другого обмеження: $\Delta g_2'(245) = -4 < -1,$ нерівність не справджується. Тому, дана точка не є покращенням першого опорного розв'язку.

Аналогічно попереднім діям, розглянемо точку (145): $\Delta f_2 = -2*1 + +2*3 = 4 > 0,$ отже, значення цільової функції зростає на 4 одиниці. Здійснюємо перевірку приростів додаткових обмежень: $\Delta g_1'(145) = -8 < 9,$ $\Delta g_2'(145) = 12 > -1,$ $\Delta g_3'(145) = 2 > -17.$

Отже, всі додаткові обмеження справджуються, то знайдено другий опорний розв'язок, кращий за попередній: (145).

Розглянемо наступну точку множини сполучень (135): $\Delta f_3 = -1 < 0.$ Відповідно, значення цільової функції зменшується на 1 одиницю, тобто спадає. Враховуючи те, що елементи розглядаються за спаданням, то не має сенсу розглядати наступну точку множини сполучень.

Оптимальним розв'язком буде точка множини сполучень (145): $f^{\max} = = f_1 + \Delta f_2 = 65 + 4 = 69.$

Отже, $f^{\max}(1,4,5) = 69.$

Висновок. В статті представлено новий алгоритм знаходження максимального значення цільової функції на множині сполучень з урахуванням додаткових лінійних обмежень.

Пошук оптимального розв'язку складається із трьох кроків. На першому кроці формуються початкові умови подальшого пошуку точок множини сполучень, що претендують на оптимальність. Необхідною умовою покращення існуючого опорного розв'язку є зростання приросту функції цілі, при обов'язковому виконанні обмежень. Слід відмітити, що не потрібно робити складні розрахунки функції цілі та додаткових лінійних обмежень при розгляді точок множини сполучень, достатньо знайти та дослідити їхні прирости.

Подальші дослідження будуть спрямовані на адаптацію даного алгоритму на інші комбінаторні множини та проведення обчислювального експерименту, при значному збільшенні потужності комбінаторних множин.

А.Н. Нагорная

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА МНОЖЕСТВЕ СОЧЕТАНИЙ

Рассмотрен алгоритм нахождения максимального значения целевой функции с учетом дополнительных линейных ограничений на множестве сочетаний. Представлено практическое применение алгоритма.

A.N. Nahirna

SOLUTION OF THE TASK OF CONDITIONAL OPTIMIZATION ON A SET OF COMBINATIONS

The algorithm for finding the maximum value of the objective function is considered taking into account additional linear constraints on a set of combinations.The practical application of the algorithm is considered.

Список літератури

1. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. Киев.: Наук. думка, 2003. 264 с.
2. Донець Г.П., Колєчкіна Л.М. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2011. 309 с.
3. Korte B., Vygen J. Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms. Berlin: Springer, 2018. 698 p.
4. Koliechkina L.N., Dvirna O.A., Nagornaya A. N. Modified Coordinate Method to Solve Multicriteria Optimization Problems on Combinatorial Configurations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 59, Issue 4. P. 620 – 626.
5. Пічугіна О.С., Колєчкіна Л.М. Двокритеріальна комбінаторна модель оптимізації телекомунікаційних мереж. *Математичні машини і системи*. 2017. № 4. С. 129 – 144.
6. Нагірна А.М. Локалізація значення лінійної функції, заданої на множині сполучень. *Математичні машини і системи*. 2014. № 5. С. 153 – 156.
7. Донец Г.А., Колєчкіна Л.М. Построение гамильтонова пути в графах перестановочных многогранников. *Кибернетика и системный анализ*. 2010. № 1. С. 10 – 16.
8. Донець Г.П., Нагірна А.М. Оптимізація квадратичної функції на множині розміщень. *Теорія оптимальних рішень*. 2017. С. 15 – 21.
9. Донець Г.П., Нагірна А.М. Умовна оптимізація лінійної функції на перестановках. *Теорія оптимальних рішень*. 2014. С. 16 – 23.
10. Колєчкіна Л.М., Нагірна А.М. Комбінаторна математична модель багатокритеріальної оптимізації при побудові комп'ютерних мереж. *Математичні машини і системи.* 2016. № 6. С. 26 – 41.

Одержано 29.03.2019