УДК 519.8

Т.В. БЕЛЫХ, Н.Г. ЖУРБЕНКО, И.Э. ШУЛИНОК

ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Приводится математическая модель динамических распределительных задач. Алгоритм решения задач большой размерности основан на использовании методов негладкой оптимизации.

Введение. В работе приводится математическая модель одного класса динамических распределительных задач. Математическая модель имеет приложения при решении практических задач оптимального материально-технического снабжения. Математическая модель задачи – переработанный вариант модели [1, 2].

Математическая модель динамических распределительных задач отражает требование возможно наиболее полного удовлетворения спроса потребителей высокого приоритета в отдельные интервалы планируемого периода. Условие баланса общих объемов производимой и требуемой продукции для отдельных интервалов и всего планового периода может не выполняться.

Математическая модель. Имеется m поставщиков (предприятий) и n потребителей (строек). Планируемый период разбит на T временных интервалов. Для краткости интервал планирования будем называть кварталом. Заданы величины:

a_{it} – максимально возможный объем продукции, производимый поставщиком i за квартал t, $t=\overline{1,T}$; $a_{it}>0$;

b_{jt} – объем спроса на продукцию потребителя j в квартале t, $t=\overline{1,T}$; $b_{jt}\ge 0$;

c_{ij} – стоимость перевозки единицы объема продукции от поставщика i к потребителю j; транспортные издержки не зависят от временного интервала доставки.

Введем обозначения:

β_{jt} – объем спроса потребителя j за первые t кварталов; $\beta_{jt} = \sum_{\tau=1}^{t} b_{j\tau}$, $t = \overline{1,T}$;

α_{it} – максимально возможный объем продукции предприятия i за первые t кварталов: $\alpha_{it} = \sum_{\tau=1}^{t} a_{i\tau}$, $t = \overline{1,T}$;

x_{ijt} – объем продукции, поставляемый предприятием i потребителю j за первые t кварталов, $t = \overline{1,T}$; величины x_{ijt} подлежат определению в результате решения задачи.

Заданы величины:

R_{jt} – величина штрафа за недопоставку единицы продукции j-му потребителю в конце квартала t, $t = \overline{1,T}$; R_{jt} задаются в соответствии с приоритетом потребителя j.

ℓ_{it} – величина штрафа за наличие единицы нераспределенной продукции у i-го поставщика в конце квартала t; $t = \overline{1,T}$.

Обозначим ω_{it} – объем нераспределенной продукции поставщика i в конце квартала t.

При построении математической модели существенна следующая целевая установка: потребители в течение всего планируемого периода должны по возможности получать продукцию лишь от одного поставщика. Это требование соответствует условию стабильности логистических связей между поставщиками и потребителями. В модели условие стабильности логистических связей учитывается следующим образом.

Пусть все $\beta_{jt} > 0$. Это ограничение, как будет видно из дальнейшего, не является существенным и введено лишь для простоты изложения. Окончательные результаты справедливы для общего случая $\beta_{jt} \ge 0$. Величину (x_{ijt}/β_{jt}) назовем степенью обеспеченности потребителя j поставщиком i за первые t кварталов, $t = \overline{1,T}$. В математической модели вводится условие не убывания степени обеспеченности потребителя (любым) поставщиком по интервалам планового периода:

$$x_{ijt}/\beta_{jt} \ge x_{ijt-1}/\beta_{jt-1}, \quad t = \overline{2,T}, \quad j = \overline{1,n}, \quad i = \overline{1,m}. \tag{1}$$

Математическая модель поставленной задачи представляется следующей задачей, линейного программирования:

$$\min\left[\sum_{j,i=1}^{n,m} c_{ij}x_{ijT} + \sum_{j,t=1}^{n,T} R_{jt}\left(\beta_{jt} - \sum_{i=1}^{m} x_{ijt}\right) + \sum_{i,t=1}^{m,T} \ell_{it}\omega_{it}\right]. \tag{2}$$

$$\beta_{jt-1}x_{ijt} \geq \beta_{jt}x_{ijt-1}, \quad i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n}, \quad t=\overline{2,T}, \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijt} + \omega_{it} = \alpha_{it}, \quad i=\overline{1,m}, \quad t=\overline{1,T}, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijt} \leq \beta_{jt}, \quad j=\overline{1,n}, \quad t=\overline{1,T}, \tag{5}$$

$$x_{ijt} \geq 0, \quad i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n}, \quad t=\overline{1,T}, \tag{6}$$

$$\omega_{it} \geq 0, \quad i=\overline{1,m}, \quad t=\overline{1,T}, \tag{7}$$

Замечания.

1. Ограничения (3), имеющие смысл и для $\beta_{jt}=0$, соответствуют вышеприведенному условию (1): степень обеспеченности потребителя любым поставщиком i $(i=\overline{1,m})$ не убывает со временем. Условие неубывания степени обеспеченности (3) запрещает прерывать обслуживание потребителя данным поставщиком в следующие периоды времени, если потребитель получал продукцию от этого поставщика в предыдущие периоды планируемого периода и его спрос не был полностью удовлетворен. Поэтому условие (3) отражает требование стабильности логистических связей между поставщиками и потребителями. Более строгая формулировка такого условия привела бы к задаче частично целочисленного программирования, но решение таких задач при большой размерности проблематично.

2. Хотя естественное условие $x_{ijt+1} \geq x_{ijt}$ $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n},\ t=\overline{1,T-1})$ не введено формально в список ограничений задачи, однако, это условие является следствием ограничений (3) и очевидных неравенств $\beta_{jt} \geq \beta_{jt-1} \geq 0$.

3. Ограничения (4) соответствуют балансу объемов производимой и поставляемой продукции для поставщиков.

4. Ограничения (5) отражают условие: потребители не получают излишка продукции (преждевременно произведенная поставщиком продукция хранится на его складах – величины ω_{it} уравнения (3)).

Введем переменные $y_{ij\tau}$:

$$x_{ijt} = \beta_{jt}\sum_{\tau=1}^{t} y_{ij\tau}, \quad j=\overline{1,n}, \quad i=\overline{1,m}, \quad t=\overline{1,T}. \tag{8}$$

Тогда задача (2) – (7) компактно представляется в следующем виде:

$$\min\left(\sum_{j,i=1}^{n,m} c_{ij}\beta_{jT}\sum_{\tau=1}^{T} y_{ij\tau} + \sum_{j,t=1}^{n,T} R_{jt}\beta_{jt}\left(1-\sum_{i,\tau=1}^{m,t} y_{ij\tau}\right) + \sum_{i,t=1}^{m,T} \ell_{it}\omega_{it}\right), \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{\tau=1}^{T} y_{ij\tau} \le 1, \quad j=\overline{1,n}, \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_{jt}\sum_{\tau=1}^{t} y_{ij\tau} + \omega_{it} = \alpha_{it}, \quad i=\overline{1,m}, \quad t=\overline{1,T}, \tag{11}$$

$$1 \ge y_{ijt} \ge 0, \ i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n}, \quad t=\overline{1,T}, \tag{12}$$

$$\alpha_{it} \ge \omega_{it} \ge 0, \ i=\overline{1,m}, \quad t=\overline{1,T}. \tag{13}$$

Нетрудно показать справедливость следующего утверждения.

Предложение 1. Задачи (2) – (7), (9) – (13) эквиваленты.

В силу простоты утверждения, его детальное доказательство не приводится. Достаточно следующих пояснений. Представление переменных x_{ijt} в форме (8) обеспечивает выполнение ограничений (3). Из ограничений (10), (12) получаем (5): $1 \ge \sum_{i=1}^{m}\sum_{\tau=1}^{T} y_{ij\tau} \ge \sum_{i=1}^{m}\sum_{\tau=1}^{t} y_{ij\tau}$ и, следовательно, ограничения (5).

Метод решения. Прикладные задачи рассматриваемого класса могут иметь достаточно большую размерность: $n \approx 1000$, $m \approx 100$, $T \approx 12$. Формально число переменных такой задачи ≈ 1000000. Использовать стандартные солверы задач линейного программирования для решения таких задач без учета их специфической структуры не рационально. Предлагаемый метод решения основан на применении алгоритмов негладкой оптимизации в сочетании со схемой декомпозиции по связывающим ограничениям задачи [2].

Пусть u_{it} – двойственные переменные относительно ограничений (11). Тогда двойственная задача будет состоять в следующем:

$$\max_{u} \psi(u), \tag{14}$$

где

$$\psi(u) = \min_{z \in D} L(z,u), \tag{15}$$

$L(z,u)$ – функция Лагранжа относительно ограничений (11);

z – совокупность переменных $(y_{ij\tau}, \omega_{it})$;

u – совокупность двойственных переменных u_{it};

D – множество, определенное системой ограничений (10), (12), (13).

Нетрудно видеть, что решение задачи минимизации (15) представляется в следующем виде:

$$\psi(u) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} R_{jt}\beta_{jt} + \sum_{j=1}^{n}\psi_j(u) + \varphi(u) - \sum_{i,t=1}^{m,T}\alpha_{it}u_{it}, \tag{16}$$

$$\psi_j(u) = \min \sum_{i,\tau=1}^{m,T} \tilde{c}_{ji\tau}(u) y_{ij\tau}, \ \ (j=\overline{1,n}), \tag{17}$$

$$\sum_{i,\tau=1}^{m,T} y_{ij\tau} \le 1, \quad y_{ij\tau} \ge 0,$$

$$\varphi(u) = \sum_{i,t=1}^{m,T} \min\{\tilde{\ell}_{it}(u)\omega_{it} : 0 \le \omega_{it} \le \alpha_{it}\}. \tag{18}$$

Коэффициенты $\tilde{c}_{ji\tau}(u)$ и $\tilde{\ell}_{i\tau}(u)$ определяются формулами:

$$\tilde{c}_{ji\tau}(u) = c_{ij}\beta_{jT} - \sum_{t=\tau}^{T} R_{j\tau}\beta_{j\tau} + \sum_{t=\tau}^{T} u_{i\tau}\beta_{j\tau}.$$

$$\tilde{\ell}_{it}(u) = \ell_{it} + u_{it}.$$

Решение задачи минимизации (17) $y_{ij\tau}(u)$, как легко видеть, задается формулой:

$$y_{ij\tau}(u) = \begin{cases} 1, & (i = i^*(j)) \wedge (\tau = \tau^*(j)) \wedge (\tilde{c}_{ji\tau}(u) < 0), \\ 0, & (i \ne i^*(j)) \vee (\tau \ne \tau^*(j)) \vee (\tilde{c}_{ji\tau}(u) \ge 0), \end{cases} \tag{19}$$

где $i^*(j)$, $\tau^*(j)$ какая-нибудь (она может быть не единственной) пара индексов, при которых достигается минимум в выражении

$$\{i^*(j), \tau^*(j)\} = arc\min_{i,\tau} \tilde{c}_{ji\tau}(u). \tag{20}$$

Решение задач минимизации (18) определяется, очевидно, формулой

$$\omega_{it}(u) = \begin{cases} \alpha_{it}, & \tilde{\ell}_{it}(u) < 0 \\ 0, & \tilde{\ell}_{it}(u) \ge 0 \end{cases}.$$

Обобщенные градиенты функции $\psi(u)$ определяются формулами

$$\psi'_{u_{it}}(u) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{jt} \sum_{\tau=1}^{t} y_{ij\tau}(u) + \omega_{it}(u) - \alpha_{it}.$$

Таким образом, решение двойственной задачи сводится к задаче безусловной максимизации кусочно-линейной вогнутой функции $\psi(u)$. Отметим малую трудоемкость приведенных алгоритмов вычисления значений и обобщенных градиентов функции $\psi(u)$.

Решение задачи состоит из двух этапов. На первом этапе на основе использования $r(\sigma)$-алгоритма [3] решается двойственная задача (14). $r(\sigma)$-алгоритм – это модификация r-алгоритма [4] с программным управлением значениями коэффициентов растяжения пространства.

Обозначим J_1 множество потребителей, для которых минимум в (20) достигается только для одной пары индексов (при полученных оптимальных значениях двойственных переменных). Для таких потребителей оптимальные поставки определяются непосредственно в результате решения двойственной задачи согласно (8).

На втором этапе решается задача для остальных потребителей J_2. Обозначим n_2 – число потребителей из J_2. Если исходная задача (2) – (7) имеет единственное решение, то для числа потребителей n_2 справедлива оценка $n_2 \le mT$ (единственность решения обеспечивается малыми случайными возмущениями констант тарифов перевозки c_{ij}). Таким образом задача второго этапа имеет сравнительно небольшую размерность. Для ее решения можно использовать стандартные пакеты линейного программирования или алгоритмы восстановления решения исходной задачи на основе решения ей двойственной [1, 2] (алгоритм усреднения субградиентов, квадратичное возмущение задачи).

Работа выполнена при частичной поддержке Volkswagen Foundation (грант No 90 306 – Н. Г. Журбенко).

Т.В. Бєлих, М.Г. Журбенко, І.Е. Шулінок

ДИНАМІЧНІ ВИРОБНИЧО-РОЗПОДІЛЬНІ ЗАДАЧІ

Наводиться математична модель динамічних розподільних задач. Алгоритм розв'язання задач великої розмірності заснований на використанні методів негладкої оптимізації.

T.V. Belykh, N.G. Zhurbenko, I.E. Shulinok

DYNAMIC INDUSTRIAL-DISTRIBUTIVE PROBLEMS

A mathematical model of dynamic distribution problems is given. The algorithm for solving large-scale problems is based on the use of nonsmooth optimization methods.

Список литературы

1. Беляева Л.В., Журбенко Н.Г., Шор Н.З. О методе решения одного класса динамических распределительных задач. *Экономика и математические методы*. 1978. Т. XIY. вып. 1.
2. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их применение. Киев: Наук. думка, 1979. 200 с.
3. Журбенко Н.Г. Численная эффективность одной модификации *r*-алгоритма. *Теорія оптимальних рішень*. Київ: Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2017. С. 33 – 38.
4. Шор Н.З., Журбенко Н.Г. Метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градиентов. *Кибернетика*. 1971. № 3. С. 51 – 59.

Получено 04.03.2019