УДК 519.6

О.М. ЛИТВИН, О.О. ЛИТВИН, І.С. ТОМАНОВА

РОЗВ'ЯЗАННЯ БІГАРМОНІЧНОЇ ЗАДАЧІ ПРО ЗГИН ПЛАСТИНИ МЕТОДОМ РІТЦА З ВИКОРИСТАННЯМ ЯВНИХ ФОРМУЛ ДЛЯ СПЛАЙНІВ П'ЯТОГО СТЕПЕНЯ

Анотація. Наведено алгоритм розв'язання бігармонічної задачі для жорстко защемленої пластини методом Рітца з використанням явних формул для сплайнів п'ятого степеня на трикутній сітці вузлів. Проведено обчислювальний експеримент із знаходження розв'язку задачі на квадратній області для різних схем розбиття.

Ключові слова: сплайни п'ятого степеня, бігармонічна задача, система Рітца, прямокутна пластина, жорстко защемлена пластина.

Перші змістовні роботи щодо використання трикутників як скінченних елементів були присвячені застосуванню трикутників першого порядку [1]. Потім з'явилися дані щодо застосування трикутників вищих порядків [2]: комплексних моделей Аргіріса, Белла, Богнера–Фокса–Шміта, Сіє–Клафа–Точера. У роботах [3, 4] отримано явні формули для сплайнів п'ятого степеня, які спрощують обчислення під час розв'язання багатьох задач прикладної математики. Наведено алгоритм побудови розв'язку бігармонічної задачі для жорстко защемленої прямокутної пластини за допомогою явних формул для сплайнів п'ятого степеня [5]. У роботах [6, 7] розглянуто розв'язання задач про коливання тонких пластин та оболонок методом скінченних елементів (з використанням трикутних та прямокутних елементів і кусково-поліноміальних базисів 2-, 3- та 5-го степенів), а також розв'язання часткової алгебраїчної проблеми власних значень, яка виникає в результаті дискретизації, методом ітерацій на підпросторі.

У цій роботі розглянуто застосування методу Рітца для розв'язання бігармонічної задачі для умов жорсткого защемлення по всій межі. Наведено схему побудови загального розв'язку методу Рітца у вигляді системи лінійних рівнянь. Представлено алгоритм побудови локальних та глобальних матриць.

Потрібно знайти розв'язок бігармонічної задачі

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)=\frac{q}{D},\ (x,\,y)\in G,\ D=\text{const},\ u\Big|_{\partial G}=0,\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial G}=0,$$

де G — опуклий багатокутник.

Для розв'язання цієї задачі скористаємося методом Рітца [8]. Як набір функцій $\{\varphi_k(x,\,y)\}$ для методу Рітца оберемо набір з 21-ї базисної функції, які ми використовували для побудови полінома 5-го степеня [5]. Для знаходження невідомих констант c_i, $i=\overline{1,21}$, підставимо u^* замість u у функціонал та прирівняємо похідну по c_i, $i=\overline{1,21}$, нулю. У результаті отримаємо систему рівнянь

$$\iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2}\right)-q\cdot\varphi_k\right]dxdy=$$

$$= \iint_G \left[\sum_{k=1}^{21} c_k \left(\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial y^2} \right) - q \cdot \varphi_s \right] dxdy = 0, \; s = \overline{1, 21}.$$

Враховуючи властивості інтегралів, маємо лінійну систему рівнянь відносно змінних c_i, $i = \overline{1, 21}$,

$$\iint_G \left[\sum_{k=1}^{21} c_k \left(\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial y^2} \right) \right] dxdy = \iint_G [q \cdot \varphi_s] \, dxdy, \; s = \overline{1, 21}.$$

Замінимо отриману систему рівнянь її матричним виглядом

$$A c = b,$$

$$A_{ij} = \iint_G [(\Phi_i^{(2,0)}(x, y) + \Phi_i^{(0,2)}(x, y)) (\Phi_j^{(2,0)}(x, y) + \Phi_j^{(0,2)}(x, y))] \, dxdy,$$

$$b_i = \iint_G [q(x, y) \cdot \Phi_i(x, y)] \, dxdy,$$

$$\Phi(x, y) = \left\{ \frac{\partial S_5 f(x, y)}{\partial c_i}, \; i = \overline{1, 21} \right\}, \; \Phi^{(2,0)}(x, y) = \left\{ \frac{\partial^2 \Phi_i f(x, y)}{\partial x^2}, \; i = \overline{1, 21} \right\},$$

$$\Phi^{(0,2)}(x, y) = \left\{ \frac{\partial^2 \Phi_i f(x, y)}{\partial y^2}, \; i = \overline{1, 21} \right\},$$

де $S_5 f(x, y)$ — сплайн на відповідному трикутнику, отриманий за допомогою явних формул, наведених у попередніх роботах авторів [5].

Алгоритм побудови розв'язку бігармонічної задачі для жорстко защемленої пластини є таким.

1. Розбиваємо область на N трикутників T_k, $k = \overline{1, N}$, та на кожному з них будуємо систему кусково-поліноміальних сплайнів [5].

2. Будуємо локальні матриці A_k та локальні вектори b_k для кожного з трикутників, $k = \overline{1, N}$.

3. Будуємо матриці переходу U_k, $k = \overline{1, N}$, для кожного з трикутників вигляду:

$$U_{ij} = \begin{cases} 1, & c_i^{T_k} = c_j, \\ 0, & c_i^{T_k} \neq c_j. \end{cases}$$

4. Будуємо розширені локальні матриці вигляду $A_k^* = U_k^{\mathrm{T}} A_k U_k$ та локальні вектори вигляду $b_k^* = U_k^{\mathrm{T}} b_k U_k$, $k = \overline{1, N}$.

5. Будуємо глобальну матрицю $A = \sum_{k=1}^{N} A_k^*$, та глобальний вектор $b = \sum_{k=1}^{N} b_k^*$.

6. Знаходимо невідомі параметри, розв'язавши систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка в матричній формі має вигляд

$$A c = b.$$

7. Підставляємо одержані значення у сплайни і отримуємо наближений розв'язок бігармонічної задачі для жорстко защемленої пластини на області G відповідно до заданого розбиття на трикутники. Загальний розв'язок задачі для всієї області G матиме вигляд

$$u(x,\ y) = S_k(x,\ y),\ (x,\ y) \in T_k\ .$$

Зауваження 1. Слід зазначити, що права частина рівняння повинна належати класу L_2.

Теорема 1 (про збіжність розв'язку дискретної задачі до неперервної). Якщо точний розв'язок $u(x,\ y)$ належить класу $C^6(G) \cap W_2^2(G)$, то процес знаходження наближеного розв'язку в енергетичній нормі до точного буде збігатися, тобто існують такі сталі, для яких виконується нерівність

$$\| u - u_h \| \le M \| u - u_\pi \|_{W_2^2},$$

де u — точний розв'язок задачі, u_h — наближений розв'язок, знайдений за допомогою сплайнів, u_π — інтерполянт розв'язку в нормі W_2^2.

Доведення. Згідно з визначенням норми Соболева

$$\| u - u_\pi \|_{W_2^2} = \left(\int_G \left[(u-u_\pi)^2 + \left(\frac{\partial (u-u_\pi)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial (u-u_\pi)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 (u-u_\pi)}{\partial x^2} \right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\left(\frac{\partial^2 (u-u_\pi)}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 (u-u_\pi)}{\partial y^2} \right)^2 \right] dxdy \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{T_i \subset G} \int_{T_i} \left[(u-S_i)^2 + \left(\frac{\partial (u-S_i)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial (u-S_i)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 (u-S_i)}{\partial x^2} \right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\left(\frac{\partial^2 (u-S_i)}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 (u-S_i)}{\partial y^2} \right)^2 \right] dxdy \right)^{1/2}.$$

Очевидно, що

$$\int_G (u-u_\pi)^2 dxdy \xrightarrow[h \to 0]{} O(h^{12}).$$

Аналогічно для останніх доданків

$$\int_G \left(\frac{\partial (u-u_\pi)}{\partial x} \right)^2 dxdy \xrightarrow[h \to 0]{} O(h^{10}),$$

$$\int_G \left(\frac{\partial (u-u_\pi)}{\partial y} \right)^2 dxdy \xrightarrow[h \to 0]{} O(h^{10}),$$

$$\int_G \left(\frac{\partial^2 (u-u_\pi)}{\partial x^2} \right)^2 dxdy \xrightarrow[h \to 0]{} O(h^{8}),$$

$$\int\limits_G \left(\frac{\partial^2 (u-u_\pi)}{\partial x \partial y} \right)^2 dxdy \xrightarrow[h\to 0]{} O(h^8),$$

$$\int\limits_G \left(\frac{\partial^2 (u-u_\pi)}{\partial y^2} \right)^2 dxdy \xrightarrow[h\to 0]{} O(h^8).$$

Враховуючи це, отримуємо

$$\| u-u_\pi \|_{W_2^2} \xrightarrow[h\to 0]{}$$

$$\left(\sum_{T_i \subset G} \int\limits_{T_i} [O(h^{12})+O(h^{10})+O(h^{10})+O(h^8)+O(h^8)+O(h^8)]\, dxdy \right)^{1/2} \approx$$

$$\approx \left(O(h^8) \sum_{T_i \subset G} \int\limits_{T_i} dxdy \right)^{1/2} = \left(O(h^8) \int\limits_G dxdy \right)^{1/2} \approx O(h^4).$$

Такий перехід можливий, бо для $h \to 0$ нескінченно малі більш високого порядку прямують до нуля з більшою швидкістю.

Теорему доведено.

Завдяки застосуванню явних формул для сплайнів п'ятого степеня значно зменшуються обчислювальні витрати під час розв'язання багатьох задач прикладної математики та механіки. Цю роботу присвячено розробленню алгоритму знаходження розв'язку бігармонічної задачі для жорстко защемленої пластини за допомогою явних формул для сплайнів п'ятого степеня методом Рітца. Наведено формули для побудови локальних та глобальних матриць Рітца.

У результаті застосування явних формул для базисних інтерполяційних поліномів 5-го степеня автоматично забезпечується неперервність самої функції та її частинних похідних першого порядку [5]. При цьому порядок системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) буде істотно нижчим, ніж у разі розв'язання системи, яка має 21 невідому в кожному трикутнику і забезпечує неперервність самої функції та її перших похідних по нормалі між трикутниками. Наприклад, для розбиття на чотири трикутники за допомогою запропонованого методу порядок СЛАР буде 14, а у стандартному випадку — $21 \times 4 = 84$. У разі інших варіантів розбиття ситуації аналогічні.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Оден Д. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. Москва: Мир, 1976. 464 с.
2. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. Москва: Мир, 1980. 512 с.
3. Сергиенко И.В., Литвин О.Н., Литвин О.О., Денисова О.И. Явные формулы для интерполяционных сплайнов 5-й степени на треугольнике. *Кибернетика и системный анализ*. 2014. Т. 50, № 5. С. 17–33.
4. Zlamal M., Zenesek A., Kolar V., Kratochvil J. Mathematical aspect of the finite element method. *Tech. Phys. and Math. Principles Finite Element Method*. 1971. Vol. 1. P.15–39.
5. Литвин О.М., Томанова І.С. Розв'язання задачі про згин пластини методом скінченних елементів з використанням сплайнів п'ятого степеня на трикутній сітці. *Проблемы машиностроения*. 2017. Т. 20, № 1. С. 52–61.

6. Молчанов И.Н., Попов А.В., Химич А.Н. Алгоритм решения частичной проблемы собственных значений для больших профильных матриц. *Кибернетика и системный анализ*. 1992. № 2, С. 141–147.
7. Ляшко И.И., Молчанов И.Н., Попов А.В. Численное решение одной задачи о колебаниях тонких пластин методом конечных элементов. *Численные методы решения задач теории упругости и пластичности:* Материалы IV Всесоюзной конф. 1976. С. 97–104.
8. Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Москва: Наука, 1965. 384 с.

Надійшла до редакції 29.06.2017

О.Н. Литвин, О.О. Литвин, И.С. Томанова

РЕШЕНИЕ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ О СГИБЕ ПЛАСТИНЫ МЕТОДОМ РИТЦА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЯВНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ СПЛАЙНОВ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

Аннотация. Приведен алгоритм решения бигармонической задачи для жестко защемленной пластины методом Ритца с использованием явных формул для сплайнов пятой степени на треугольной сетке узлов. Проведен вычислительный эксперимент по нахождению решения задачи на квадратной области для различных схем разбиения.

Ключевые слова: сплайны пятой степени, бигармоническая задача, система Ритца, прямоугольная пластина, жестко защемленная пластина.

O.M. Lytvyn, O.O. Lytvyn, I.S. Tomanova

SOLVING THE BIHARMONIC PROBLEM OF A CLOSED CLAMPED PLATE BY THE RITZ METHOD USING EXPLICIT FORMULAS FOR SPLINE OF THE FIFTH DEGREE

Abstract. An algorithm is represented to solve biharmonic problems for a closed clamped plate by the Ritz method using explicit formulas for splines of the fifth degree on a triangular grid of nodes. A computational experiment is performed to find the solution of the problem on a square domain for various partition schemes.

Keywords: splines of the fifth degree, biharmonic problem, Ritz system, rectangular plate, closed clamped plate.

Литвин Олег Миколайович,
доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри Української інженерно-педагогічної академії, Харків, e-mail: academ_mail@ukr.net.

Литвин Олег Олегович,
доктор фіз.-мат. наук, доцент кафедри Української інженерно-педагогічної академії, Харків, e-mail: Olegolitvin55@gmail.com.

Томанова Ірина Сергіївна,
аспірантка кафедри Української інженерно-педагогічної академії, Харків, e-mail: tomanova.iryna@gmail.com.