

### МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ У СЕРЕДОВИЩІ З ТОНКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Mathematical model of nonstationary nonlinear heat conduction in two-dimensional space with thin inclusion is built in this paper. This model allows to take into account small thickness of thin inclusion. The Newton–Rafson method was used for the linearization of the problem. Discretization by the time variable is given according to the intermediate point scheme. Variational formulation of the problem is presented in the functional minimization form.

На основі варіаційного підходу побудовано математичну модель нестационарної нелінійної теплопровідності у двовимірному середовищі з тонким включенням. Ця модель дає змогу враховувати малу товщину тонкого включення. Для лінеаризації поставленої задачі застосовано метод Ньютона–Рафсона. Дискретизацію за часовою змінною подано згідно зі схемою проміжної точки. Варіаційне формулювання задачі наведено у формі мінімізації функціоналу.

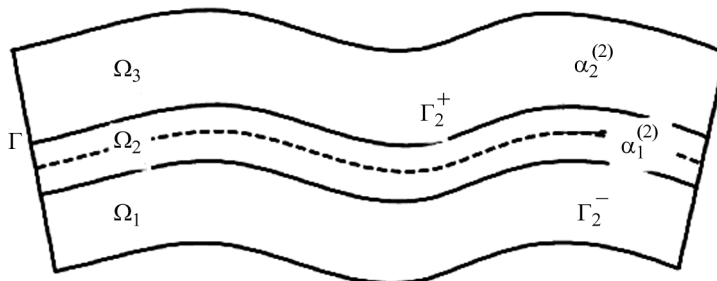
Сучасний розвиток техніки та новітніх обчислювальних засобів дає можливість використовувати нелінійні математичні моделі, які, як відомо, більш точно описують реальні фізичні процеси. Водночас зростає необхідність розробки та вдосконалення вже відомих якісних та кількісних методів з метою підвищення точності моделювання.

Зокрема, відомо, що у випадку областей з включеннями, коли один з характерних розмірів включення є значно меншим від інших, під час використання відомих числових методів виникають труднощі. Для подолання цієї проблеми існують різні підходи [1–3]. Лінійні моделі, запропоновані в роботах [3, 4] для врахування малої товщини включення використовують гетерогенний принцип. У цій роботі гетерогенний підхід набуває подальшого розвитку для випадку нелінійного квазістатичного процесу теплопровідності. Для дискретизації моделі за часовою змінною використано неявний метод проміжної точки, поданий у монографії [5].

**Формулювання задачі.** Дослідимо нестационарний процес дифузії у середовищі складної форми, яке займає область  $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ , де  $\Omega_1, \Omega_3$  – двовимірні області з Ліпшицевими границями.

$$\Omega_2 = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_l, -\frac{h}{2} \leq \alpha_2 \leq \frac{h}{2} \right\},$$

де  $h$  – товщина тонкого шару;  $\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}$  – криволінійні координати, прив'язані до серединної кривої області  $\Omega_2$  (див. рисунок).



Криволінійна область з тонким включенням.

Вважатимемо, що на границі контакту із зовнішнім середовищем задана крайова умова третього роду, а також відома початкова умова в момент часу  $\tau = 0$ .

Опишемо процес теплопровідності в  $\Omega$  рівняннями

$$c_i(T_i)\rho_i \frac{\partial T_i}{\partial \tau} = \text{div}(\lambda_i(T_i)\text{grad}T_i) + q_i, \quad i = \overline{1,3} \quad (1)$$

де  $c_i$  – питома теплоємність;  $\rho_i$  – густина маси;  $\lambda_i$  – коефіцієнт теплопровідності;  $q_i$  – об'ємна густина теплових джерел,  $T_i = T_i(\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \alpha_3^{(i)}, \tau)$  – функція розподілу температури в області  $\Omega_i$ .

Задамо також такі граничні та початкові умови

$$\left( -\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial n^{(i)}} - a_i(T_i - T_{c_i}) \right) \Big|_{\Gamma_i} = 0, \quad (2)$$

$$T_i|_{\tau=0} = T_i^0, \quad (3)$$

де  $n^{(i)}$  – зовнішня нормаль до поверхні  $\Gamma_i$ ;  $a_i$  – коефіцієнт теплообміну з середовищем, температура якого  $T_{c_i}$ ,  $T_i^0$  – розподіл температури в області  $\Omega_i$  у початковий момент часу  $\tau = 0$ .

На границі контакту областей задамо такі умови:

$$T_2|_{\Gamma_2^+} = T_3, \quad (4)$$

$$T_2|_{\Gamma_2^-} = T_1,$$

$$\lambda_2(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2^+} = \lambda_3(T_3) \frac{\partial T_3}{\partial n}, \quad (5)$$

$$\lambda_2(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2^-} = \lambda_1(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial n}. \quad (6)$$

Зведемо поставлену нестационарну задачу до послідовності стаціонарних задач, скориставшись різницевою схемою проміжної точки.

Поділимо часовий інтервал  $[0, t]$  на підінтервали множиною точок  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_M = t$ . На інтервалі  $[\tau_m, \tau_{m+1}]$  замінимо  $\frac{\partial T_i}{\partial \tau}$  скінченною різницею

$$\frac{\partial T_i}{\partial \tau} = \frac{T_{im+1} - T_{im}}{\tau_{m+1} - \tau} = \frac{\Delta T_{im}}{\Delta \tau_m}, \quad (7)$$

де  $\Delta \tau_m = \tau_{m+1} - \tau_m$ ,  $T_{im} = T_i(\tau_m)$ .

Температуру на проміжку  $[\tau_m, \tau_{m+1}]$  задамо у вигляді

$$T_{im+\theta} = T_m + \theta \Delta T_m, \quad (8)$$

де  $\theta$  – заданий параметр,  $\theta \in [0, 5; 1)$ .

Підставляючи (7), (8) у рівняння (1), (2), отримаємо крайову задачу

$$\rho c(T_{im} + \theta \Delta T_{im}) \Delta T_{im} = \Delta \tau_m [\text{div}(\lambda_i(T_{im} + \theta \Delta T_{im}) \text{grad}(T_{im} + \theta \Delta T_{im})) + q_i], \quad (9)$$

$$-\lambda_i(T_{im} + \theta \Delta T_{im}) \frac{\partial (T_{im} + \theta \Delta T_{im})}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = a_i(T_{im} + \theta \Delta T_{im} - T_{icm+\theta}), \quad (10)$$

$$T_{i0} = T_i^0. \quad (11)$$

Лінеаризуємо задачу (9)–(11) за схемою ітераційного методу Ньютона–Рафсона [5]. При цьому розв’язок шукатимемо у вигляді

$$\square T_{im} = \square T_{im}^{(k)} + \delta T_{im}^{(k)}, \quad (12)$$

де  $\delta T_{im}^{(k)}$  – мала функція, в тому розумінні, що членами  $O((\delta T_{im}^{(k)})^2)$  можна знехтувати.

Отримаємо співвідношення

$$\begin{aligned} & \rho_i c_{m+\theta}^{(k)} \delta T_{im}^{(k)} - \Delta \tau_m \theta \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{\lambda_{im+\theta}^{(k)}}{H} \frac{\partial \delta T_{im}^{(k)}}{\partial \alpha_1} \right) - \Delta \tau_m \theta \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \lambda_{m+\theta}^{(k)} H \frac{\partial \delta T_{im}^{(k)}}{\partial \alpha_2} \right) = \\ & = \rho_i c_{im+\theta}^{(k)} \Delta T_{im}^{(k)} + \Delta \tau_m \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{\lambda_{im+\theta}^{(k)}}{H} \frac{\partial T_{im+\theta}^{(k)}}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \lambda_{im+\theta}^{(k)} H \frac{\partial T_{im+\theta}^{(k)}}{\partial \alpha_2} \right) + \end{aligned} \quad (13)$$

$$+ \Delta \tau_m q_{im+\theta},$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\theta \lambda_{im+\theta}^{(k)}}{H} \frac{\partial \delta T_{im}^{(k)}}{\partial \alpha_1} n_1 - \frac{\theta \lambda_{im+\theta}^{(k)}}{H} \frac{\partial \delta T_{im}^{(k)}}{\partial \alpha_2} n_2 \Big|_{\Gamma} = \\ & = \frac{\lambda_{im+\theta}^{(k)}}{H} \frac{\partial (T_{im}^{(k)} + \theta \Delta T_{im}^{(k)})}{\partial \alpha_1} n_1 + \frac{\lambda_{im+\theta}^{(k)}}{H} \frac{\partial (T_m^{(k)} + \theta \Delta T_{im}^{(k)})}{\partial \alpha_2} n_2 + \\ & + a_i (T_m^{(k)} + \theta \Delta T_{im}^{(k)} + \theta \delta T_{im}^{(k)} - T_{icm+\theta}). \end{aligned} \quad (14)$$

Перейдемо до варіаційного формулювання проблеми (13)–(14).

Подамо його у формі мінімізації наступного функціоналу

$$I^\delta = \sum_{i=1}^3 I_i^\delta (T_{im}, \Delta T_{im}^{(k)}, \delta T_{im}^{(k)}). \quad (15)$$

Запишемо його у розгорненому вигляді:

$$\begin{aligned} I^\delta &= \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho c_{im+\theta}^{(k)} (\delta T_{im}^{(k)})^2 d\Omega + \frac{1}{2} \Delta \tau_m \theta \int_{\Omega} \left( \frac{\lambda_{im+\theta}^{(k)}}{H} \frac{\partial \delta T_{im}^{(k)}}{\partial \alpha_1} \right)^2 d\Omega + \right. \\ & + \frac{1}{2} \Delta \tau_m \theta \int_{\Omega} \frac{1}{H} \left( \lambda_{im+\theta}^{(k)} \frac{\partial \delta T_{im}^{(k)}}{\partial \alpha_2} \right)^2 d\Omega + \frac{1}{2} \Delta \tau_m \theta \int_{\Gamma_i} a_i (\delta T_{im}^{(k)})^2 d\Gamma + \\ & + \int_{\Omega} \rho c_{im+\theta}^{(k)} \Delta T_{im}^{(i)} \delta T_m^{(k)} d\Omega + \Delta \tau_m \int_{\Omega} \lambda_{im+\theta}^{(k)} \left( \frac{1}{H} \frac{\partial T_{im+\theta}^{(k)}}{\partial \alpha_1} \right) \left( \frac{1}{H} \frac{\partial \delta T_{im}^{(k)}}{\partial \alpha_1} \right) d\Omega + \\ & + \Delta \tau_m \int_{\Omega} \frac{1}{H} \lambda_{im+\theta}^{(k)} \left( \frac{\partial T_{im+\theta}^{(k)}}{\partial \alpha_2} \right) \left( \frac{\partial \delta T_{im}^{(k)}}{\partial \alpha_2} \right) d\Omega + \int_{\Gamma_i} a_i (T_{im}^{(k)} + \theta \Delta T_{im}^{(k)} - T_{icm+\theta}) \delta T_{im}^{(k)} d\Gamma - \\ & \left. - \Delta \tau_m \int_{\Omega} q_{m+\theta} \delta T_m^{(i)} d\Omega \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Функції  $\delta T_{im}^{(k)} \in H^1(\Omega_1)$ , яка надає функціоналу (16) стаціонарного значення, є узагальненим розв’язком крайової задачі (13)–(14). Зауважимо, що цей функціонал не враховує особливості області  $\Omega_2$ .

Перейдемо тепер до редукованої варіаційної задачі.

Припустимо, що в області  $\Omega_2$  функція розподілу температури є лінійною відносно товщини

$$T_2(\alpha_1, \alpha_2, \tau) = t_1(\alpha_1, \tau) + \frac{2\alpha_2}{h} t_2(\alpha_1, \tau). \quad (17)$$

Використаємо для області  $\Omega_2$  гетерогенний підхід, описаний в роботах [3–4]. Враховуючи малість товщини шару, вважатимемо, що

$$\begin{aligned} c_2^{(k)} \left( \alpha_1, (t_{1m}^{(k)} + \theta \Delta t_{1m}^{(k)}) + \frac{2\alpha_2}{h} (t_{2m}^{(k)} + \theta \Delta t_{2m}^{(k)}) \right) &\approx c_2^{(k)}(\alpha_1, (t_{1m}^{(k)} + \theta \Delta t_{1m}^{(k)})) + \frac{\partial c}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \alpha_2} \alpha_2 \approx \\ &\approx c_2^{(k)}(\alpha_1, (t_{1m}^{(k)} + \theta \Delta t_{1m}^{(k)})), \\ \lambda_2^{(k)} \left( \alpha_1, (t_{1m}^{(k)} + \theta \Delta t_{1m}^{(k)}) + \frac{2\alpha_2}{h} (t_{2m}^{(k)} + \theta \Delta t_{2m}^{(k)}) \right) &\approx \lambda_2^{(k)}(\alpha_1, (t_{1m}^{(k)} + \theta \Delta t_{1m}^{(k)})). \end{aligned}$$

Тоді функціонал матиме вигляд

$$\begin{aligned} I_2^\delta &= \frac{1}{2} h \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \rho c_{2,m+\theta} A (\delta t_{1m}^{(k)})^2 d\alpha_1 + \frac{1}{2} \frac{h^2}{3} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \rho c_{2,m+\theta} k A (\delta t_{2m}^{(k)})^2 d\alpha_1 + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{h^2}{3} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \rho c_{2,m+\theta} k A (\delta t_{1m}^{(k)}) (\delta t_{2m}^{(k)}) d\alpha_1 + \frac{1}{2} \theta \Delta \tau_m h \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{\lambda_{2,m+\theta}^{(k)}}{A} \left( \frac{d\delta t_{1m}^{(k)}}{d\alpha_1} \right)^2 d\alpha_1 + \\ &+ \frac{1}{2} \theta \Delta \tau_m \frac{h^2}{3} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{\lambda_{2,m+\theta}^{(k)}}{A} \left( \frac{d\delta t_{2m}^{(k)}}{d\alpha_1} \right)^2 d\alpha_1 + \frac{1}{2} \theta \Delta \tau_m \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \lambda_{m+\theta}^{(i)} A (\delta t_{2m}^{(k)})^2 d\alpha_1 + \\ &+ \frac{1}{2} \theta \Delta \tau_m \frac{h^2}{3} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{\lambda_{2,m+\theta}^{(k)}}{A} \left( \frac{d\delta t_{1m}^{(k)}}{d\alpha_1} \right) \left( \frac{d\delta t_{2m}^{(k)}}{d\alpha_1} \right) d\alpha_1 + \\ &+ \frac{1}{2} \Delta \tau_m \theta \alpha h \left[ A (\delta t_{1m}^{(k)})^2 + \frac{h^2}{3} A (\delta t_{2m}^{(k)})^2 + k \frac{h^2}{3} A (\delta t_{1m}^{(k)}) (\delta t_{2m}^{(k)}) \right] \Bigg|_{\alpha_0}^{\alpha_1} + \\ &+ \Delta \tau_m h \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{\lambda_{2,m+\theta}^{(k)}}{A} \left( \frac{dt_{1,m+\theta}^{(k)}}{d\alpha_1} \right) \left( \frac{d\delta t_{1m}^{(k)}}{d\alpha_1} \right) d\alpha_1 + \\ &+ \Delta \tau_m \frac{h^2}{3} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{\lambda_{2,m+\theta}^{(k)}}{A} \left( \frac{dt_{2,m+\theta}^{(k)}}{d\alpha_1} \right) \left( \frac{d\delta t_{2m}^{(k)}}{d\alpha_1} \right) d\alpha_1 + \Delta \tau_m \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \lambda_{2,m+\theta}^{(k)} A (t_{2,m+\theta}^{(k)}) (\delta t_{2m}^{(k)}) d\alpha_1 + \\ &+ \Delta \tau_m \frac{h^2}{6} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{\lambda_{2,m+\theta}^{(k)}}{A} \left( \frac{dt_{1,m+\theta}^{(k)}}{d\alpha_1} \right) \left( \frac{d\delta t_{2m}^{(k)}}{d\alpha_1} \right) d\alpha_1 + \\ &+ \Delta \tau_m \frac{h^2}{6} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{\lambda_{2,m+\theta}^{(k)}}{A} \left( \frac{d\delta t_{1m}^{(k)}}{d\alpha_1} \right) \left( \frac{dt_{2,m+\theta}^{(k)}}{d\alpha_1} \right) d\alpha_1 - \\ &- 2h * \Delta \tau_m \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} q_2 A \delta t_{1m}^{(k)} d\alpha_1 - \frac{2h^2}{3} * \Delta \tau_m \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} q_2 A k \delta t_{2m}^{(k)} d\alpha_1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Delta \tau_m \alpha h \left[ A(t_{1,m+\theta}^{(k)}) (\delta t_{1m}^{(k)}) + \frac{h^2}{3} A(t_{2,m+\theta}^{(k)}) (\delta t_{2m}^{(k)}) + \right. \\
& \left. + \frac{h^2}{3} A(t_{2,m+\theta}^{(k)}) (\delta t_{2m}^{(k)}) + k \frac{h^2}{6} A(t_{1,m+\theta}^{(k)}) (\delta t_{2m}^{(k)}) + k \frac{h^2}{3} A(\delta t_{1m}^{(k)}) (t_{2,m+\theta}^{(k)}) \right] \Bigg|_{\alpha_0}^{\alpha_1}. \quad (18)
\end{aligned}$$

### ВИСНОВКИ

Варіаційне формулювання процесу теплопровідності у області з тонким включенням зводиться до мінімізації функціоналу (15), де доданок, який описує процес, у тонкому шарі, має вигляд (18). Таке формулювання дає змогу враховувати малість товщини шару включення, отже, й уникнути труднощів під час застосування відомих числових методів.

Для дискретизації розв'язку за просторовими змінними пропонуємо використовувати схему методу скінченних елементів як одного з найбільш ефективних методів розв'язування в криволінійних областях.

1. Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К.: Наук. думка, 1991. – 432 с.
2. Підстригач Я. С. Вибрані праці. – К.: Наук. думка, 1995. – 459 с.
3. Дяконюк Л., Кухарський В., Савула Я. Математичне моделювання процесів теплопровідності у багат шарових середовищах із тонкими включеннями // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. – Львів, 2000. – Т. 1. – С. 212–215.
4. Савула Я. Г., Мандзак Т. І. Гетерогенна крайова задача математичної моделі адвекції-дифузії у середовищі з включенням // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2006. – Вип. 3. – С. 150–158.
5. Муха І. С. Лінеаризовані задачі квазістатичного термов'язкопластичного деформування твердих тіл. – К.: ІСДО, 1995. – 52 с.