УДК 519.7

З. Д. Коноплянко, К. П. Терещук

ДОСЛІДЖЕННЯ КЛАСУ ВПОРЯДКОВАНИХ ДВОМІСНИХ *k*-ЗНАЧНИХ ФУНКЦІЙ ВИДУ ($\varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2)$) *mod k*

Metric properties of dyadic multiple valued functions of *mod* type, that make logical basis of specialized computer engineering are investigated.

Досліджено метричні властивості двомісних *k*-значних комутаційних функцій виду *mod*, що становлять логічну основу проектування спеціалізованих обчислювальних засобів.

Ринкова економічна система призводить до різких коливань рівня розвитку економіки. Це нам показав нещодавній спад світового виробництва внаслідок економічної кризи. У цей період фірмам особливо важливо не допускати помилок у веденні підприємницької діяльності, адже їм доводиться балансувати між прибутками і збитками. Для оптимальних економічних результатів потрібно провести детальний аналіз ринку, який передбачає збір і обробку великої кількості економічної інформації. Існуючі сьогодні програмні засоби обробки економічної інформації потребують потужних обчислювальних систем, особливо, коли йдеться про моделювання прогнозування економічної ситуації на ринку, яке вимагає масштабних математичних розрахунків.

Розвиток методів штучного інтелекту, таких як нейронні мережі, дерева рішень тощо, спирається на удосконалення існуючої технічної бази, адже вирішення складних задач на сучасних персональних комп'ютерах потребує великих затрат часу, які вимірюються в тижнях, а інколи і в місяцях. Це означає, що вартість інформації є велика. Наявність та доступність потужніших комп'ютерів дасть змогу зменшити вартість інформації.

Одним із методів зменшення вартості інформації є розвиток та впровадження *k*-значної логіки у проектування обчислювальних механізмів.

Аналіз двомісних функцій *k*-значної логіки. У цій роботі розглядатимемо двомісні функції *k*-значної логіки $f(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$, де $\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)$ – функції, що реалізуються двовходовим універсальним елементом (мультиплексором) і пробігають усю множину функцій з P_k^1 однієї змінної, тобто їх можна записати у вигляді одновимірного кортежу. Усі функції визначені на E_k зі значеннями також у $E_k = \{0, 1, ..., k-1\}$. Деякі результати у цій сфері описані у роботах [1–10]. Саме ж застосування двомісних *k*-значних комутаційних функцій базується на пристрої [8], в основі якого лежить створення двовходового багатозначного логічного елемента, у якому уведення нових блоків, нових зв'язків та виконання їх на однотипних елементах кон'юнкції дає можливість забезпечити однорідність виконання й веде до підвищення технологічності пристрою в процесі мікроелектронної реалізації, а також підвищує швидкодію через паралелізм структури і однотактний режим роботи всіх уведених блоків [8].

Суперпозицію двомісної *k*-значної комутаційної функції можна записати у вигляді квадратної матриці (табл. 1).

Таблиця 1. Суперпозиція двомісної функції $f(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$

$f(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$		$\varphi_1(x_1)$			
		0	1	…	$(k-1)$
$\varphi_2(x_2)$	0	e_{00}	e_{01}	…	$e_{0(k-1)}$
	1	e_{10}	e_{11}	…	$e_{1(k-1)}$
	⋮	⋮	⋮	…	⋮
	$(k-1)$	$e_{(k-1)0}$	$e_{(k-1)1}$	…	$e_{(k-1)(k-1)}$

де e_{ij} – значення функції $f(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$ в точках, які визначаються функціями однієї змінної $\varphi_1(x_1)$, $\varphi_2(x_2)$.

У процесі розгортання суперпозиції функції двох змінних (функції однієї змінної набувають усіх можливих значень, визначених на $E_k = \{0, 1, ..., k-1\}$) породжується k^{2k} функцій, але не всі з них різні [1, 4]. Немає єдиної аналітичної залежності, яка б дозволила швидко підрахувати кількість різних функцій, які породжує довільна двомісна функція. Цю кількість в роботі позначимо N_p.

Методи синтезу k-значної логіки спираються на такі базові операції: $\min(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$, $\max(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$ та характеристичні функції $J_s(x)$, які можна задати у вигляді виразу $\neg f(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)) = k - f(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)) - 1$. Вони аналогічні до таких операцій: $\wedge$ (кон'юнкція), $\vee$ (диз'юнкція) та заперечення ($\neg$) двозначної (булевої) логіки. Хоча усі вирази булевої логіки можна записати тільки трьома зазначеними операціями, використовують також інші операції, які можуть зменшити розмір запису логічного виразу, наприклад, умовна диз'юнкція дорівнює виразу $A \oplus B = (A \vee B) \wedge \neg(A \vee B)$. У k-значній логіці також використовують додаткові операції, наприклад $(\varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2)) \bmod k$ (дальше *mod*), хоча її опис через базові операції є набагато складнішим. Ця функція детальніше описана нижче.

Кожна суперпозиція k-значних комутаційних функцій породжує певне число різних функцій (N_p), яке може відрізнятися від кількості породжених функцій суперпозицією іншої функції. Кількість усіх можливих двомісних k-значних комутаційних функцій дорівнює k^{k^2} і вже при $k = 3$ становить 19683 функцій. Кількість усіх можливих N_p при $k = 3$ дорівнює 45 [1, 4], причому однакову кількість різних функцій можуть породжувати зовсім різні за властивостями функції. Отже виникає потреба обчислення N_p будь-якої функції і необхідність застосування методу прямого перебору. Зі збільшенням k на 1 складність підрахунку напряму (аналізуючи кожну функцію) зростає, через зростання кількості функцій більш ніж у k^2 разів. Тому розробляли алгоритми обчислення N_p, які дозволяють приблизно у $(k/2)^{2k}$ разів скоротити перебір (для кожного типу функцій виграш від застосування алгоритму буде різний), а також проводили дослідження щодо впорядкованих функцій для яких спрощені виявлення, структурування та виведення формул для обчислення N_p у процесі аналізу комутаційних властивостей різних породжуючих функцій.

Алгоритм обчислення N_p. Ідея розроблення алгоритму обчислення N_p проста [1, 4–6]. Вона полягає у тому, що аналізувати і перевіряти на унікальність потрібно не кожну функцію, а групу подібних за властивостями функцій. Однією із таких властивостей є цифровість функцій однієї змінної (кількість чисел, використаних в окремо взятій функції).

Таблиця 2. Суперпозиція функції виду *mod*

$(\varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2))$ *mod k*		$\varphi_1(x_1)$		
		0	1	2
$\varphi_2(x_2)$	0	**0**	**1**	**2**
	1	**1**	**2**	**0**
	2	**2**	**0**	**1**

Розглянемо детальніше алгоритм обчислення N_p з використанням цієї властивості. При розгортанні суперпозиції двомісної функції посортуємо функції однієї змінної $\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)$ на 1-, 2-, ..., k-цифрові. У табл. 3 зображений приклад такого розгортання для функції $f(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)) = (\varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2)) \bmod k$ (дальше *mod*, див. табл. 2). Так можна сформувати таблицю з усіма групами породжених функцій (табл. 4 для функції *mod* та табл. 5 для довільної функції), у якій суперпозицій є набагато менше – $(\sum_{i=1}^{k} C_k^i)^2 = (2^k - 1)^2$ переформованих суперпозицій. Це означає, що перебір у процесі підрахунку N_p буде невеликим і зі зростанням k кількість операцій, яку повинен здійснити комп'ютер, зростатиме без комбінаторного вибуху, як при застосуванні методу прямого перебору.

Таблиця 3. Таблиця розгортання суперпозиції 3-значної функції виду *mod*, трансформована згідно із розбиттям на класи еквівалентності функцій однієї змінної

mod		1-цифрові			2-цифрові		...	3-цифрові
		0 0 0	1 1 1	2 2 2	0 0 1	0 1 0	...	0 1 2
1-цифрові	0	0 0 0	1 1 1	2 2 2	0 0 1	0 1 0		0 1 2
	0	0 0 0	1 1 1	2 2 2	0 0 1	0 1 0		0 1 2
	0	0 0 0	1 1 1	2 2 2	0 0 1	0 1 0		0 1 2
	1	1 1 1	2 2 2	0 0 0	1 1 2	1 2 1		1 2 0
	1	1 1 1	2 2 2	0 0 0	1 1 2	1 2 1		1 2 0
	1	1 1 1	2 2 2	0 0 0	1 1 2	1 2 1		1 2 0
...	⋮							
3-цифр.	0	0 0 0	1 1 1	2 2 2	0 0 1	0 1 0		0 1 2
	1	1 1 1	2 2 2	0 0 0	0 0 2	0 2 0		1 2 0
	2	2 2 2	0 0 0	1 1 1	0 0 0	0 0 0		2 0 1

Таблиця 4. Вигляд таблиці істинності 3-значної комутаційної функції *mod*, трансформованої згідно з розбиттям на класи еквівалентності функцій однієї змінної

		1-цифрові			2-цифрові			3-цифрові
		0	1	2	0 1	0 2	1 2	0 1 2
1– цифрові	0	0	1	2	0 1	0 2	1 2	0 1 2
	1	1	2	0	1 2	1 0	2 0	1 2 0
	2	2	0	1	2 0	2 1	0 1	2 0 1
2– цифрові	0 1	0 1	1 2	2 0	0 1 1 2	0 2 1 0	1 2 2 0	0 1 2 1 2 0
	0 2	0 2	1 0	2 1	0 1 2 0	0 2 2 1	1 2 0 1	0 1 2 2 0 1
	1 2	1 2	2 0	0 1	1 2 2 0	1 0 2 1	2 0 0 1	1 2 0 2 0 1
3– цифрові	0 1 2	0 1 2	1 2 0	2 0 1	0 1 1 2 2 0	0 2 1 0 2 4	1 2 2 0 0 1	0 1 2 1 2 0 2 0 1

У [1, 4] описана формула, яка дає змогу дозволяє комп'ютеру швидко обчислити кількість різних кортежів i-го класу. Це є підхід через число розміщень без повторень A_k^i та числа Стирлінга 2-го роду:

$$N_{\Sigma} = k^k = \sum_{i=1}^{k} A_k^i \Phi(k,i)\ ,$$

де $A_k^i = \dfrac{k!}{(k-i)!}$ – число розміщень довжиною із k значень E_k;

Таблиця 5. Вигляд таблиці істинності довільної *k*-значної комутаційної функції, трансформованої згідно з розбиттям на класи еквівалентності функцій однієї змінної

$f(*)$		1-цифрові				2-цифрові							...	k-цифрові			
		0	1	...	$(k\text{-}1)$	0	1	0	2	...	$(k\text{-}1)$	$(k\text{-}2)$		0	1	...	$(k\text{-}1)$
1-цифрові	0	e_{00}	e_{01}	...	$e_{0(k\text{-}1)}$	e_{00}	e_{01}	e_{00}	e_{02}	...	$e_{0(k\text{-}1)}$	$e_{0(k\text{-}2)}$		e_{00}	e_{01}	...	$e_{0(k\text{-}1)}$
	1	e_{10}	e_{11}	...	$e_{1(k\text{-}1)}$	e_{10}	e_{11}	e_{10}	e_{12}	...	$e_{1(k\text{-}1)}$	$e_{1(k\text{-}2)}$		e_{10}	e_{11}	...	$e_{1(k\text{-}1)}$
	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮		⋮	⋮	...	⋮
	$(k\text{-}1)$	$e_{(k\text{-}1)0}$	$e_{(k\text{-}1)1}$	...	$e_{(k\text{-}1)(k\text{-}1)}$	$e_{(k\text{-}1)0}$	$e_{(k\text{-}1)1}$	$e_{(k\text{-}1)0}$	$e_{(k\text{-}1)2}$	...	$e_{(k\text{-}1)(k\text{-}1)}$	$e_{(k\text{-}1)(k\text{-}2)}$		$e_{(k\text{-}1)0}$	$e_{(k\text{-}1)1}$	...	$e_{(k\text{-}1)(k\text{-}1)}$
2-цифрові	0	e_{00}	e_{01}	...	$e_{0(k\text{-}1)}$	e_{00}	e_{01}	e_{00}	e_{02}	...	$e_{0(k\text{-}1)}$	$e_{0(k\text{-}2)}$		e_{00}	e_{01}	...	$e_{0(k\text{-}1)}$
	1	e_{10}	e_{11}	...	$e_{1(k\text{-}1)}$	e_{10}	e_{11}	e_{10}	e_{12}	...	$e_{1(k\text{-}1)}$	$e_{1(k\text{-}2)}$		e_{10}	e_{11}	...	$e_{1(k\text{-}1)}$
	0	e_{00}	e_{01}	...	$e_{0(k\text{-}1)}$	e_{00}	e_{01}	e_{00}	e_{02}	...	$e_{0(k\text{-}1)}$	$e_{0(k\text{-}2)}$		e_{00}	e_{01}	...	$e_{0(k\text{-}1)}$
	2	e_{20}	e_{21}	...	$e_{2(k\text{-}1)}$	e_{20}	e_{21}	e_{20}	e_{22}	...	$e_{2(k\text{-}1)}$	$e_{2(k\text{-}2)}$		e_{20}	e_{21}	...	$e_{2(k\text{-}1)}$
	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮		⋮	⋮	...	⋮
	$(k\text{-}1)$	$e_{(k\text{-}1)0}$	$e_{(k\text{-}1)1}$	...	$e_{(k\text{-}1)(k\text{-}1)}$	$e_{(k\text{-}1)0}$	$e_{(k\text{-}1)1}$	$e_{(k\text{-}1)0}$	$e_{(k\text{-}1)2}$	...	$e_{(k\text{-}1)(k\text{-}1)}$	$e_{(k\text{-}1)(k\text{-}2)}$		$e_{(k\text{-}1)0}$	$e_{(k\text{-}1)1}$	...	$e_{(k\text{-}1)(k\text{-}1)}$
	$(k\text{-}2)$	$e_{(k\text{-}2)0}$	$e_{(k\text{-}2)1}$	...	$e_{(k\text{-}2)(k\text{-}1)}$	$e_{(k\text{-}2)0}$	$e_{(k\text{-}2)1}$	$e_{(k\text{-}2)0}$	$e_{(k\text{-}2)2}$	...	$e_{(k\text{-}2)(k\text{-}1)}$	$e_{(k\text{-}2)(k\text{-}2)}$		$e_{(k\text{-}2)0}$	$e_{(k\text{-}2)1}$	...	$e_{(k\text{-}2)(k\text{-}1)}$
...																	
k-цифрові	0	e_{00}	e_{01}	...	$e_{0(k\text{-}1)}$	e_{00}	e_{01}	e_{00}	e_{02}	...	$e_{0(k\text{-}1)}$	$e_{0(k\text{-}2)}$		e_{00}	e_{01}	...	$e_{0(k\text{-}1)}$
	1	e_{10}	e_{11}	...	$e_{1(k\text{-}1)}$	e_{10}	e_{11}	e_{10}	e_{12}	...	$e_{1(k\text{-}1)}$	$e_{1(k\text{-}2)}$		e_{10}	e_{11}	...	$e_{1(k\text{-}1)}$
	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮		⋮	⋮	...	⋮
	$(k\text{-}1)$	$e_{(k\text{-}1)0}$	$e_{(k\text{-}1)1}$	...	$e_{(k\text{-}1)(k\text{-}1)}$	$e_{(k\text{-}1)0}$	$e_{(k\text{-}1)1}$	$e_{(k\text{-}1)0}$	$e_{(k\text{-}1)2}$	...	$e_{(k\text{-}1)(k\text{-}1)}$	$e_{(k\text{-}1)(k\text{-}2)}$		$e_{(k\text{-}1)0}$	$e_{(k\text{-}1)1}$	...	$e_{(k\text{-}1)(k\text{-}1)}$

У [1, 4] описана формула підрахунку числа різних кортежів i-го класу. Це є підхід через число розміщень без повторень A_k^i та числа Стирлінга 2-го роду:

$$N_{\Sigma} = k^k = \sum_{i=1}^{k} A_k^i \Phi(k,i)\ ,$$

де $A_k^i = \dfrac{k!}{(k-i)!}$ – число розміщень довжиною із k значень E_k;

$\Phi(k,i) = \dfrac{1}{i} \sum\limits_{k_1,\ldots,k_k} \dfrac{k!}{k_1!k_2!\ldots k_k!}$ – числа Стирлінга 2-го роду (числа розбиттів k-елементної множини на i блоків), причому

$$\Phi(k,k) = 1, \text{ при } k > 0;$$

$$\Phi(k,0) = 0, \text{ при } k > 0;$$

$$\Phi(k,i) = \Phi(k-1,i-1) + i\Phi(k-1,i), \text{ при } 0 < i < k \text{ [1, 2].}$$

Але кожен i-цифровий клас може містити C_k^i підкласів, наприклад, при k=3, 2-цифрові кортежі можуть містити такі сполучення чисел: {0,1}, {0,2}, {1,2}. Отже, кількість кортежів розміру k, які можна утворити із i елементів, описується формулою:

$$\frac{\Phi(k,i)A_k^i}{C_k^i} = \Phi(k,i)\frac{\frac{k!}{(k-i)!}}{\frac{k!}{i!(k-i)!}} = \Phi(k,i)\frac{k!i!(k-i)!}{(k-i)!k!} = \Phi(k,i)i!\,.$$

За допомогою таких комбінаторних властивостей, а також інших особливостей класів породжуючих функцій, можна швидко обчислити N_p довільної функції.

Проте при великих значеннях k (8 і більше) використання такого алгоритму потребує дуже багато часу. Отже, для того щоби остаточно уникнути перебору, потрібно формувати класи впорядкованих функцій та виводити унікальну для них формулу N_p.

Впорядковані *k*-значні комутаційні функції. Нижче наведені основні суттєво впорядковані k-значні комутаційні функції, часткова оцінка яких описана в літературах [1, 4, 7].

Почнемо з уже згаданої функції вигляду $(\varphi_1(x_1)+\varphi_2(x_2)) \bmod k$ (див. табл. 2). Її N_p обчислюють за формулою

$$N_p = \frac{(k^k)^2}{k},$$

N_p функції виду $f(\varphi_1(x_1),\varphi_2(x_2)) = \min(\varphi_1(x_1),\varphi_2(x_2))$ (дальше min, див. табл. 6) обчислюється за формулою

$$N_p = \sum_{i=1}^{k} (i^k - (i-1)^k)^2\,.$$

Таблиця 6. Суперпозиція функції виду min

min($\varphi_1(x_1)$, $\varphi_2(x_2)$)		$\varphi_1(x_1)$		
		0	1	2
$\varphi_2(x_2)$	0	**0**	**0**	**0**
	1	**0**	**1**	**1**
	2	**0**	**1**	**2**

Також є суттєво впорядковані двомісні функції, які залежать тільки від однієї змінної:

$$N_p = n^k,$$

де n – кількість різних елементів функції. Суперпозиції деяких із них зображені у табл. 7.

Таблиця 7. Суперпозиції залежних від однієї змінної двомісних функцій

$\varphi_2(x_2)$ *mod* 2		$\varphi_1(x_1)$		
		0	1	2
$\varphi_2(x_2)$	0	**0**	**0**	**0**
	1	**0**	**0**	**0**
	2	**1**	**1**	**1**

$\varphi_2(x_2)$		$\varphi_1(x_1)$		
		0	1	2
$\varphi_2(x_2)$	0	**0**	**0**	**0**
	1	**1**	**1**	**1**
	2	**2**	**2**	**2**

Усі інші двомісні k-значні комутаційні функції є складнішими. Їх оцінка потребує великих затрат часу. У результаті проведених досліджень було оцінено ряд k-значних двомісних функцій. На основі двох методів дослідження усі оцінені функції можна віднести до двох груп.

До першої групи належать функції, схожі за властивостями на інші суттєво впорядковані функції. Наприклад, суперпозиція функції

$$f(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)) = \min(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)) + \left\lfloor \frac{\min(k-\varphi_1(x_1), k-\varphi_2(x_2))}{k} \right\rfloor$$

відрізняється від $\min(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$ лише значенням при $f(0,0)$ (див табл. 6 і табл. 8). Тому формула обчислення N_p виведена із формули N_p для функції min:

$$N_p = \sum_{i=1}^{k} (i^k - (i-1)^k)^2 - 2(2^{k-1}-1)^2 .$$

Таблиця 8. Суперпозиція подібної до min функції

$f(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$		$\varphi_1(x_1)$		
		0	1	2
$\varphi_2(x_2)$	0	**1**	**0**	**0**
	1	**0**	**1**	**1**
	2	**0**	**1**	**2**

До іншої групи можна віднести ті функції, комутаційні властивості яких суттєво відрізняються від суттєво впорядкованих функцій. Формула обчислення N_p таких функцій виведена за допомогою описаного вище алгоритму обчислення N_p. Наприклад, суперпозиція функції (див. табл. 9)

$$f(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)) = \min(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)) \cdot \left\lfloor \frac{(k-\varphi_1(x_1)+\varphi_2(x_2)-1) \bmod k}{k-1} \right\rfloor$$

у процесі розгортання породжує таку кількість груп функцій, яку легко комбінаторно перелічити, виведена формула обчислення N_p повторює механізм описаного алгоритму:

$$N_p = k! + \sum_{i=1}^{k-1} (C_k^i (\Phi(k,i)i!)^2 + 2C_{k-1}^i \Phi(k,i)\Phi(k,i+1)i!(i+1)!) ,$$

де $\Phi(k,i)$ – числа Стирлінга 2 роду; C_k^i – кількість комбінацій з k елементів по i елементах.

Як видно, формальний опис цих функцій є об’ємним, проте оцінка впорядкованих двомісних k-значних функцій дасть можливість оптимізувати роботу комутаційного обладнання, зокрема забезпечення необхідного обсягу пам’яті для здійснення відповідного числа комутацій під час обслуговування процесів обміну даними.

Таблиця 9. Суперпозиція функції, не подібної за властивостями на впорядковані функції

$f(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$		$\varphi_1(x_1)$		
		0	1	2
$\varphi_2(x_2)$	0	**0**	**0**	**0**
	1	**0**	**1**	**0**
	2	**0**	**0**	**2**

Властивості N_p двомісних k-значних комутаційних функцій. На основі властивостей описаних вище функцій можна сформувати класи функцій. Розглянемо основні властивості двомісних функцій, за якими можна поділити усі функції на класи еквівалентності.

За критерієм N_p функції еквівалентні, якщо у породжуючій таблиці істинності:

1) переставляти місцями рядки (стовпці) функції;

2) транспонувати функцію, за аналогією з механізмами теорії матриць;

3) здійснювати заміни елементів функції.

За цими ознаками введено число N_f – числа різних функцій, які можна утворити з однієї шляхом перестановок рядків (стовпців), транспонування та заміни елементів функції. Шляхом прямого перебору поділено усі 3-значні двомісні комутаційні функції на 75 класів еквівалентності. Із отриманих результатів видно, що існує декілька класів еквівалентності, функції яких породжують однакову кількість різних суперпозицій, тобто немає чіткої залежність між виглядом суперпозиції та її N_p.

Тепер детальніше розглянемо властивості N_f.

Розглянемо *першу властивість*. Позначимо кожен рядок (стовпець) відповідним числом. Тоді, якщо усі рядки (стовпці) у таблиці істинності різні, отримуємо кортеж із різними числами (0, 1, 2, …, k-1). Таких перестановок буде k!. Але якщо не всі рядки (стовпці) різні, наприклад, тільки 2 рядки, яких можна записати, наприклад, кортежем <0, 0, 1> чи <0, 1, 1>, то кількість таких розміщень буде $\Phi(3,2)\cdot 2! = 3\cdot 2 = 6$, тобто

$$(0\quad 0\quad 1),\ (0\quad 1\quad 0),\ (0\quad 1\quad 1),\ (1\quad 0\quad 0),\ (1\quad 0\quad 1),\ (1\quad 1\quad 0),$$

або для загального варіанту $\Phi(k,i)i!$ (кількість розміщень i визначених елементів у кортежі розміру k), де $\Phi(k,i)$ – числа Стирлінга 2-го роду (числа розбиттів k-елементної множини на i блоків).

Тож тільки за цією ознакою знайдеться певна кількість функцій яких об'єднує те, що кожну з них можна звести до однієї за допомогою перестановок рядків (стовпців). Число таких функцій залежатиме від самого виду функції, з якої можна утворити ці функції шляхом перестановок рядків і перестановок стовпців, але не перевищуватиме добуток кількості можливих розміщень рядків на кількість можливих розміщень стовпців.

Друга властивість передбачає транспонування суперпозиції функції. Коли ми хочемо знайти N_f, тоді, якщо функцію не можна транспонувати за допомогою перестановок рядків чи перестановок стовпців, то у процесі обчислення N_f нам потрібно враховувати транспонування шляхом множення результату кількості функцій, отриманих із першої властивості, на 2, а інакше транспонування не враховуємо.

Третя властивість полягає у тому, що одні елементи можна замінювати на інші. Цю властивість враховуємо під час обчислення N_f тоді, коли одні елементи не можна замінити на інші за допомогою двох перших властивостей (шляхом перестановок рядків (стовпців) чи транспонування). Наприклад, у функції $f((\varphi_1(x_1),\varphi_2(x_2)) = \min(\varphi_1(x_1),\varphi_2(x_2)$ число нулів не дорівнює числу одиниць чи двійок і кількість одиниць не дорівнює кількості двійок, тобто існує k елементів із різною їх кількістю (необхідна, але недостатня умова для врахування цієї властивості при обчисленні N_f). Тому із функції $\min(\varphi_1(x_1),\varphi_2(x_2)$ за цією властивістю можна утворити $A_k^k = k!$ різних функцій.

Розглянемо тепер N_f функції *mod* (табл. 2). Число функцій цього виду є N_f = = 12 при k=3. Таке мале число функцій пояснюється тим, що усі елементи суперпозиції функції *mod* (див. табл. 2) можна замінити за допомогою перестановок рядків (стовпців), через що не враховуємо третю властивість N_p, а також і тим, що кожен рядок функції дорівнює відповідному стовпцю і має у своєму складі усі k елементів, що призводить до того, що якщо ми зробимо $k!$ перестановок рядків і $k!$ перестановок стовпців (разом $(k!)^2$), то усі згенеровані функції будуть повторюватись рівно k разів. Звідси $N_f = \frac{(k!)^2}{k}$.

ВИСНОВКИ

Суть алгоритму обчислення N_p полягає у тому, що аналізувати і перевіряти на унікальність потрібно не кожну функцію, а групу подібних за властивостями функцій, щоб значно прискорити процедуру підрахунку N_p.

Існують упорядковані функції, для яких відома формула обчислення N_p. Дослідження були спрямовані на пошук нових упорядкованих функцій та їх оцінку.

У результаті досліджень, шляхом прямого перебору, поділено усі 3-значні двомісні комутаційні функції за властивостями N_f на 75 класів еквівалентності, хоча кількість усіх можливих значень N_p при k=3 дорівнює 45. Це свідчить про те, що однакову кількість різних функцій можуть породжувати зовсім різні за властивостями функції.

Кількість двомісних k-значних функцій, які входять до класу функцій виду *mod*, обчислюють за формулою $N_f = \frac{(k!)^2}{k}$.

1. *Бондаренко М. Ф., Коноплянко З. Д., Четвериков Г. Г.* Основи теорії багатозначних структур і кодування в системах штучного інтелекту. – Х.: Фактор-Друк, 2003. – 336 с.
2. *Коноплянко З. Д.* Двовходовий багатозначний логічний елемент: Заявка N 97031289 від 21.03.97 р., Патент N20462 від 15.07.97 р. МПК^5 Н03К 19/02.
3. *Коноплянко З. Д., Вєніков Д. П.* Концепції організації інформаційно-інтелектуальних технологій та інтелектуальної підтримки суспільно-економічних процесів // Вісник УБС НБУ. – 2008. – № 1. – С. 180–182.
4. *Коноплянко З. Д., Чаплига В. М., Чаплига М. В.* Багатозначні структури та кодування систем економічної кібернетики // Монографія. – Львів: ЛБІ НБУ, 2004. – 314 с.
5. *Коноплянко З. Д., Терещук К. П.* Дослідження метричних властивостей *k*-значних функцій // Междун. науч.-практ. конф. “Современные направления теоретических и прикладных исследований’2008” 15–25 марта 2008 г. – Одеса, Україна. – С. 37–42.
6. *Коноплянко З. Д., Терещук К. П.* Алгоритм обчислення N_p у сфері досліджень метричних властивостей *k*-значних функцій // Междун. науч.-практ. конф. “Современные направления теоретических и прикладных исследований’2008”, 15–25 марта 2008 г. – Одеса, Україна. – С. 42–46.
7. *Реализация* многозначных структур автоматики / Под ред. М. А. Ракова. – К.: Наук. думка, 1976. – 350 с.
8. *Патент 20462 Україна*, МКВ Н03*К* 19/08. Двовходовий багатозначний логічний елемент / М. Ф. Бондаренко, З. Д. Коноплянко, Г. Г. Четвериков. – №97031289/24; Заявлено 20.03.97; Опубл. 15.07.97; Бюл. № 3. – 5 с.
9. *Бондаренко М. Ф., Коноплянко З. Д., Четвериков Г. Г.* Методи завадостійкого *k*-значного кодування та захисту інформації в україномовних інтерфейсах систем штучного інтелекту // Відбір та обробка інформації. – 1998. – Вип. 12 (89). – С. 86–89.
10. *Коноплянко З. Д.* Стратегія розвитку *k*-значної схемотехніки // Там же. – 1996. – Вип. 10 (86). – С. 89–97.

Львівський інститут банківської справи
Університету банківської справи Національного банку України

Одержано
21.01.2009