

МОДЕЛЬ ВІБРАЦІЙНОГО ВІДГУКУ ВІД ТІЛА З ТРІЩИНОЮ

The new model for cracked detail vibration is proposed. The crack size influence on probabilistic characteristics of vibration response is carried out. The comparison of vibration signal mean components and variation components using as a diagnostic criteria is carried out.

Запропоновано нову модель для опису коливань деталі з тріщиною. Досліджено вплив розміру тріщини на імовірнісні характеристики вібраційного відгуку. Проведено порівняння використання як діагностичного критерію компонентів математичного сподівання та компонентів дисперсії вібраційного відгуку.

У процесі дослідження вібраційного відгуку складних механічних вузлів обертових та коливних систем елементи системи розглядають як сукупність елементарних частин, які взаємодіють між собою. У першому наближенні для опису їх взаємодії достатньо використати диференціальні рівняння 2-го порядку [2, 3]. Наявність дефектів у системі призводить до зміни параметрів цих диференціальних рівнянь і як результат до зміни вібраційного відгуку. Отож, досліджуючи характеристики вібраційного сигналу системи, можна оцінювати стан системи в цілому.

Упродовж дії зовнішньої сили тріщина періодично відкривається та закривається. У випадку закритої тріщини деталь поводить себе так, ніби тріщина відсутня, і її жорсткість є такою ж, як і у випадку бездефектної деталі. Проте, коли тріщина відкрита, то жорсткість деталі зменшується. Враховуючи це, таку коливну систему можна описати з допомогою системи диференціальних рівнянь другого порядку [3, 4]:

$$\begin{cases} X'' + 2\beta_c X' + \omega_c^2 X = f(t), & X \leq 0, \\ X'' + 2\beta_s X' + \omega_s^2 X = f(t), & X > 0, \end{cases} \quad (1)$$

де $\beta_c = k_c / 2m$, $\beta_s = k_s / 2m$, де k_c , k_s – жорсткості деталі, коли тріщина закрита та відкрита відповідно. ω_c , ω_s – власні частоти коливань деталі в моменти часу, коли тріщина закрита та відкрита відповідно; m – зведена маса деталі. Тобто тріщина в елементі системи призводить до моделі вібрації, побудованої на системі нелінійних диференціальних рівнянь. Проте слід звернути увагу, що більшість [2] авторів обмежуються розглядом лінійних систем, що не дає змоги зробити правильних висновків про реальний стан системи.

Метою цієї роботи є дослідження впливу наявності тріщини на характеристики вібраційного відгуку від прямокутної балки, на яку діє сума гармонічної і стохастичної сил. Якщо тріщина закрита (рис. 1), деталь поводить себе так, як і у випадку бездефектної деталі. Коли тріщина відкрита, то жорсткість деталі зменшується на величину Δk . Легко отримати наступне співвідношення, що зв'яже відносну довжину тріщини зі зміною жорсткості балки:

$$\Delta k / k_c \approx \Delta l / l, \quad (2)$$

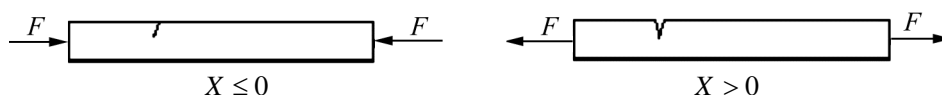


Рис. 1. Поведінка прямокутної деталі з тріщиною при циклічному навантаженні.

де Δl – довжина тріщини; l – розмір деталі в напрямку росту тріщини. Жорсткість деталі в момент, коли тріщина є відкритою, рівна $k_s = k_c - \Delta k$. Власну частоту коливань деталі без тріщини обчислюють за відомою формулою

$$\omega_c = \sqrt{\frac{k_c}{m}}. \quad (3)$$

Власну частоту коливань деталі при відкритій тріщині можна виразити через власну частоту коливань нетріснутої деталі так:

$$\omega_s = \omega_c \frac{2\sqrt{1 - \frac{\Delta k}{k}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{\Delta k}{k}}}. \quad (4)$$

Тоді систему рівнянь (1) перепишемо у формі

$$\begin{cases} X' = \mathfrak{G}; \\ \mathfrak{G}' = f(t) - 2\beta(X)\mathfrak{G} - \omega^2(X)X \end{cases}, \quad (5)$$

де $\beta(X) = \begin{cases} \beta_c, & X \leq 0, \\ \beta_s, & X > 0; \end{cases} \quad \omega(X) = \begin{cases} \omega_c, & X \leq 0, \\ \omega_s, & X > 0. \end{cases}$

Розв'язати аналітично систему рівнянь (5) досить складно. Тому для знаходження розв'язку було використано чисельні методи. Одним з найпростіших серед них є явний метод Ейлера [5]. В основі цього методу лежить така ітераційна процедура:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{G}_{n+1} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}_n \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\beta(x_n) & -\omega^2(x_n) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{G}_n \\ x_n \end{pmatrix} h + \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \end{pmatrix} h. \quad (6)$$

З метою уникнення накопичування похибки на кожному кроці чисельного інтегрування, тобто для забезпечення стійкості чисельного методу, необхідно правильно вибрати ітераційний крок h . А це означає, що власні значення матриці

$$A = \begin{pmatrix} -2\beta(x_n)h & -\omega^2(x_n)h \\ h & 0 \end{pmatrix}$$

повинні лежати в одиничному колі $(\operatorname{Re} \lambda + 1)^2 + (\operatorname{Im} \lambda)^2 \leq 1$ [5]. Знайшовши власні значення λ , можемо побудувати наступну умову вибору кроку h :

$$h \leq \frac{2\beta_c}{\omega_c}. \quad (7)$$

За допомогою комп'ютерної симуляції отримано вібраційні відгуки від тріснутої деталі для випадку, коли до її кінців прикладена змінна сила, яка виражається формулою

$$f(t) = \cos\left(\frac{2\pi t}{100}\right) + u(t), \quad (8)$$

де $u(t)$ – білий шум з дисперсією $D_u = 1$. Для симулювання були вибрані такі параметри: $k_c = 0,9$; $m = 10$, а крок інтегрування вибраний згідно з умовою (7) і дорівнює 0,5, кількість кроків інтегрування – 10^5 . Відносна довжина тріщини змінювалася в діапазоні від 0,05 до 0,95 з кроком 0,05.

Перейдемо до аналізу властивостей симульованих сигналів $X(t)$. Їх описуватимемо в рамках оцінок кореляційної функції і спектральної густини стаціонарного наближення, а також у рамках моделі у вигляді періодично корельованого випадкового процесу (ПКВП) [1]. Оцінки кореляційної функції і спектральної густини стаціонарного наближення сигналу відповідно мають вигляд

$$\hat{R}(jh) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} [\xi(kh) - \hat{m}] [\xi((k+j)h) - \hat{m}],$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{h}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(nh) \hat{R}(nh) e^{-i\omega nh},$$

де $\hat{m} = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \xi(kh)$; $h = \frac{\Theta}{K}$ – крок дискретизації; Θ – довжина реалізації; K – число вибірки; $k(nh)$ – кореляційне вікно. Під час розрахунків використовували вікно Хемінга

$$h(u) = \begin{cases} 0,54 + 0,46 \cos \frac{\pi u}{U_{\max}}, & |u| \leq U_{\max}; \\ 0, & |u| > U_{\max}, \end{cases}$$

яке є досить селективним і має невеликі додатні і від'ємні бокові пелюстки.

Клас ПКВП означили як клас випадкових процесів, математичне сподівання $m(t) = E\xi(t)$ і кореляційна функція $b(t,u) = E\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\xi}(t+u)$, $\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - m(t)$ якого є періодичними функціями часу:

$$m(t) = m(t+T), \quad b(t,u) = b(t+T,u).$$

Ці характеристики можуть бути подані у вигляді рядів Фур'є

$$m(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k e^{ik \frac{2\pi}{T} t},$$

$$b(t,u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k(u) e^{ik \frac{2\pi}{T} t}.$$

Коефіцієнти m_k і $B_k(u)$ визначають кореляційну структуру ПКВП, з їх використанням може бути оцінена міра нестационарності сигналу. Вони можуть бути обчислені з використанням статистик

$$\hat{m}_k = \frac{1}{\Theta} \int_0^{\Theta} \xi(t) e^{-ik \frac{2\pi}{T} t} dt, \quad (9)$$

$$\hat{B}_k(t,u) = \frac{1}{\Theta} \int_0^{\Theta} [\xi(t) - \hat{m}(t)] [\xi(t+u) - \hat{m}(t+u)] e^{-ik \frac{2\pi}{T} t} dt, \quad (10)$$

при цьому

$$\hat{m}(\hat{a}) = \sum_{k=-N_1}^{N_1} \hat{m}_k e^{ik \frac{2\pi}{T} \hat{a}},$$

а N_1 – номер найвищої гармонічної складової математичного сподівання. На основі виразу (10) також може бути збудована інтерполяційна формула для оцінки кореляційної функції:

$$\hat{b}(t, u) = \sum_{k=-N_2}^{N_2} \hat{B}_k(u) e^{ik \frac{2\pi}{T} t} \quad (11)$$

Тут N_2 – номер найвищої гармонічної складової кореляційної функції. Очевидно, що (11) при $u = 0$ описує часові зміни дисперсії.

Дискретними аналогами співвідношень (9), (10) є вирази

$$\hat{m}_k = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \xi(nh) e^{-ik \frac{2\pi}{T} nh},$$

$$\hat{B}_k(u) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} [\xi(nh) - \hat{m}(nh)] [\xi(nh + u) - \hat{m}(nh + u)] e^{-ik \frac{2\pi}{T} nh}.$$

Вищенаведені формули були покладені в основу обробки симуляційних сигналів.

У випадку, коли відносна довжина тріщини дорівнює $\Delta l/l = 0,1$, вібраційний відгук від деталі має вигляд, показаний на рис. 2. Власні частоти коливань деталі обчислені згідно з виразами (2)–(4), і відповідно дорівнюють $\omega_c = 0,045547$ та $\omega_s = 0,045127$.

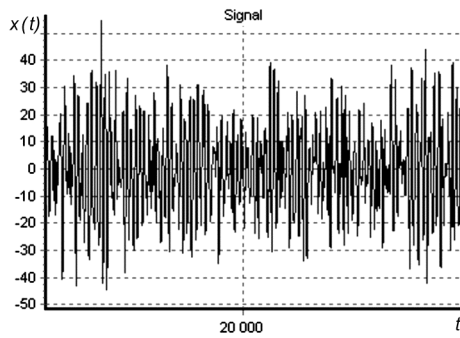


Рис. 2. Вигляд вібраційного сигналу.

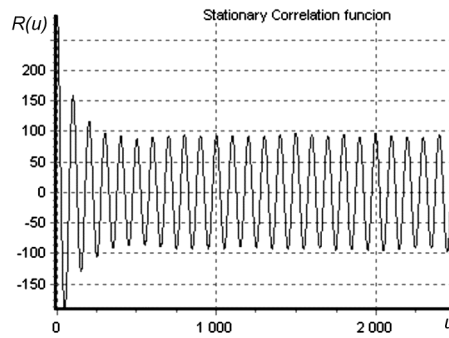


Рис. 3. Оцінка кореляційної функції стаціонарного наближення вібраційного сигналу.

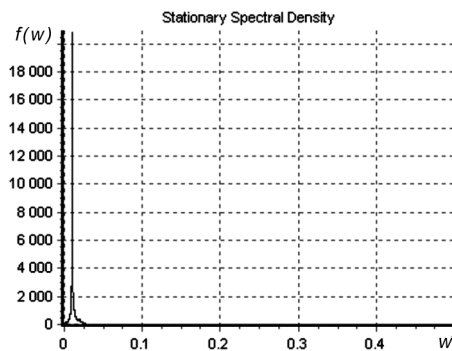


Рис. 4. Оцінка спектральної густини стаціонарного наближення вібраційного сигналу.

Як видно з рис. 3, оцінка кореляційної функції має незанимаючий хвіст, а це є свідченням того, що у вібраційному сигналі наявна періодична складова. Легко бачити, що її потужність становить 45% всієї потужності процесу. Це підтверджує графік оцінки спектральної густини потужності в стаціонарному наближенні (рис. 4), де помітне значне підняття на частоті вимушуючої сили та спостерігається підняття в околі частот 0,045. За допомогою методу найменших квадратів виділимо з вібросигналу періодичну і стохастичну складові (рис. 5) і (рис. 7)

відповідно. Оцінка коефіцієнтів розкладу в ряд Фур'є математичного сподівання сигналу показана на рис. 6. Як бачимо, значущою є амплітуда першої гармоніки, що свідчить про те, що система в цьому випадку є близькою до лінійної.

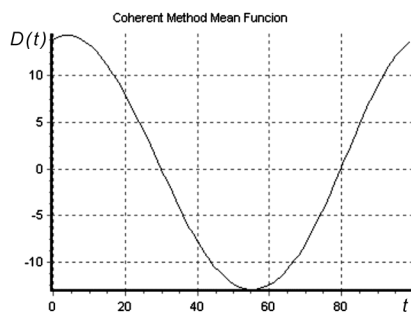


Рис. 5. Оцінка математичного сподівання.

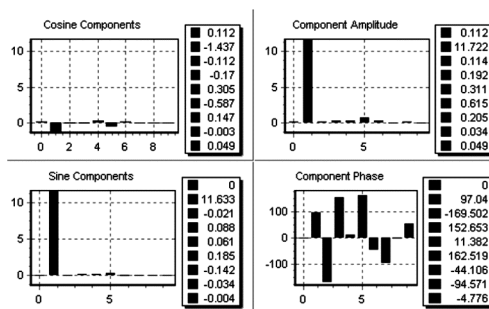


Рис. 6. Оцінка компонентів математичного сподівання.

У процесі дослідження випадкової складової сигналу видно, що її кореляційна функція (рис. 8) зникає, це є свідченням того, що ця складова сигналу не містить регулярних коливань. Наявність слабких коливань на хвості кореляційної функції пов'язане з похибкою чисельного методу.

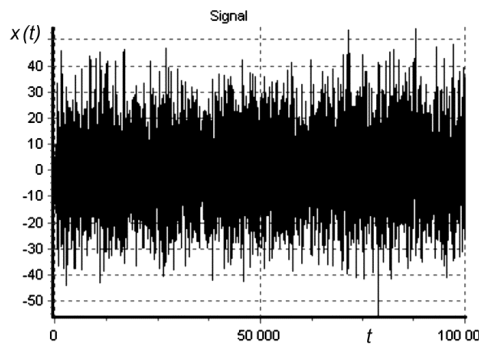


Рис. 7. Вигляд стохастичної складової вібраційного сигналу.

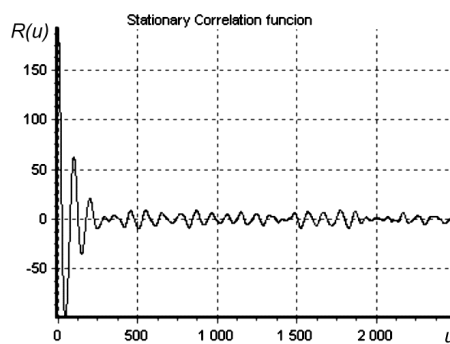


Рис. 8. Оцінка кореляційної функції стохастичної складової вібраційного сигналу.

На рис. 9 зображено оцінку дисперсії випадкової складової вібраційного сигналу, з якого видно, що співвідношення мінімальної потужності процесу на періоді до максимальної становить $D_{\min}/D_{\max} = 0,76$, а це свідчить про те, що процес є близьким до стаціонарного. Це підтверджує також аналіз компонент дисперсії випадкової складової (рис. 10), оскільки значущою є лише нульова компонента.

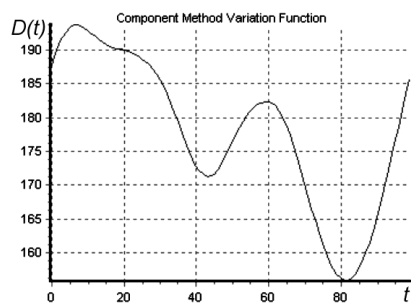


Рис. 9. Оцінка дисперсії випадкової складової сигналу.

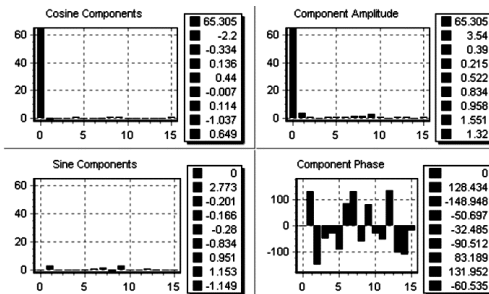


Рис. 10. Оцінка компонентів дисперсії.

Проаналізуємо зміни імовірнісних характеристик вібросигналу при збільшенні відносної довжини тріщини.

Розглянемо випадок, коли відносна довжина тріщини $\Delta/l = 0,3$, за таких умов власні частоти зміняться і становитимуть $\omega_c = 0,045547$ і $\omega_s = 0,042329$.

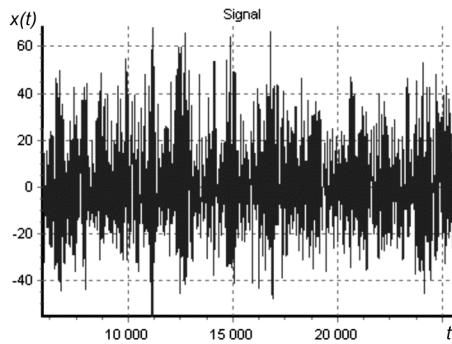


Рис. 11. Вигляд вібраційного сигналу.

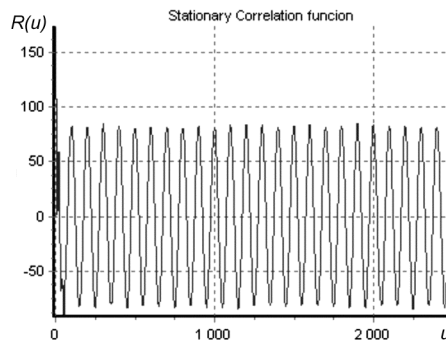


Рис. 12. Оцінка кореляційної функції вібраційного сигналу.

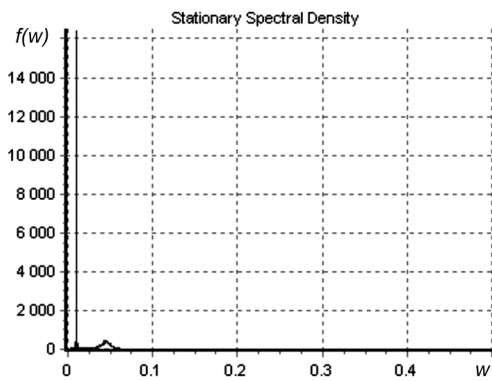


Рис. 13. Оцінка спектральної густини вібраційного сигналу.

При збільшенні відносної довжини тріщини Δ/l спектральна густина потужності вібраційного відгуку практично не змінилася, за винятком зростання енергії коливань на частоті вимушуючої сили (рис. 13). На графіку кореляційної функції сигналу (рис. 12) видно, що ріст тріщини призводить до зростання потужності випадкової складової сигналу. Судити про зміни характеристик вібраційного сигналу по вигляду регулярної (рис. 14) та випадкової (рис. 16) складових порівняно з попередніми результатами дуже важко, бо візуально практично нічого не змінилося.

Амплітуда оцінки математичного сподівання сигналу порівняно з попередніми даними дещо зросла, проте компоненти її розкладу в ряд Фур'є практично не змінилися. Значущою й далі залишається лише перша компонента.

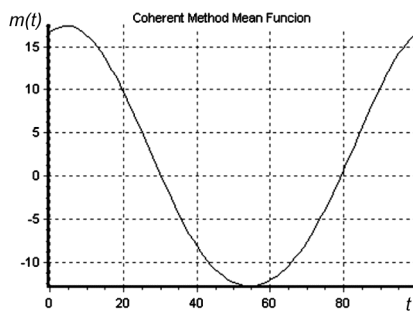


Рис. 14. Оцінка математичного сподівання.

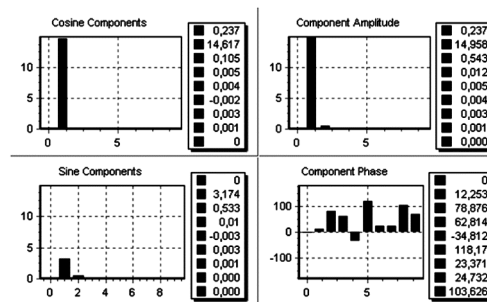


Рис. 15. Оцінка компонентів математичного сподівання.

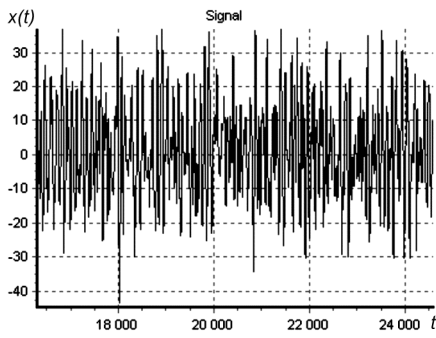


Рис. 16. Вигляд стохастичної складової віброцигналу.

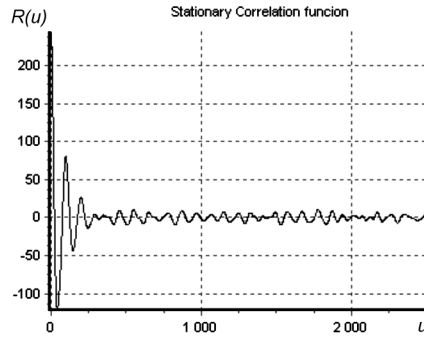


Рис. 17. Оцінка кореляційної функції залишку вібраційного сигналу.

Про якісне розділення сигналу на регулярну та випадкові складові свідчить зникаючий хвіст кореляційної функції залишку віброцигналу (рис. 17).

Пристаупаючи до аналізу оцінки дисперсії стохастичної складової (рис. 18), зауважимо, що її форма дещо змінилася та змінилося значення співвідношення D_{\min}/D_{\max} , яке тепер становить 0,64. Картина оцінок компонентів дисперсії (рис. 19) теж змінилася. Нульова компонента дисперсії зросла і значущою стала перша.

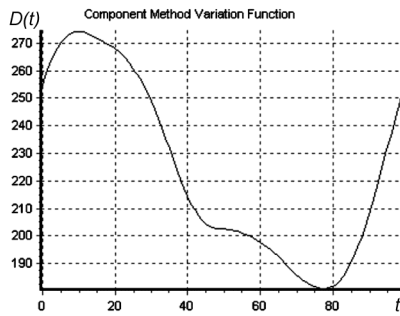


Рис. 18. Оцінка дисперсії випадкової складової сигналу.

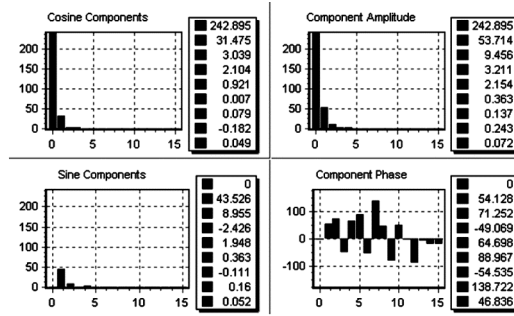


Рис. 19. Оцінка компонентів дисперсії випадкової складової сигналу.

Нехай тепер $\Delta/l = 0,7$. Тоді власні частоти: $\omega_c = 0,045547$ і $\omega_s = 0,031629$.

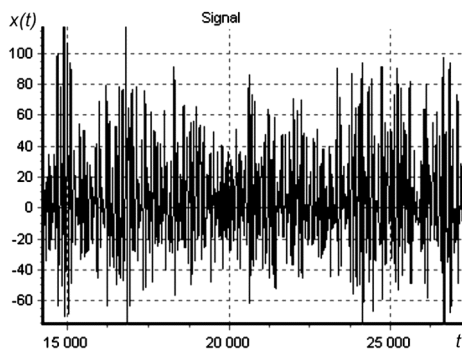


Рис. 20. Вигляд вібраційного сигналу.

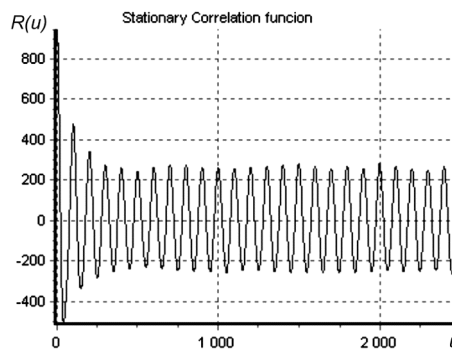


Рис. 21. Оцінка кореляційної функції вібраційного сигналу.

При даній довжині тріщини, як видно з графіка оцінки спектральної густини потужності (рис. 22), амплітуда коливань зросла ще більше, а на частоті 0,02 (подвоєна частота вимушуючої сили) з'явився невеликий пік, який пов'язаний з

нелінійністю системи. Потужність випадкової складової сигналу становить 60% від потужності вібраційного відгуку (рис. 21).

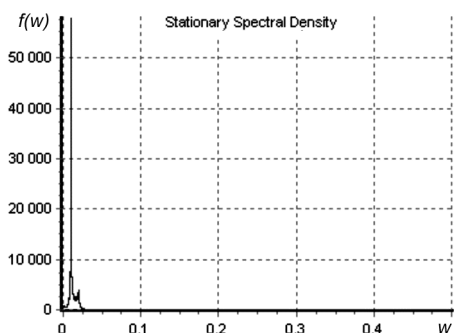


Рис. 22. Оцінка спектральної густини вібраційного сигналу.

З аналізу властивостей оцінки математичного сподівання вібраційного відгуку, отриманої при даній відносній довжині тріщини, випливає, що її амплітуда порівняно до останнього результату зростає більше, ніж вдвічі, та змінила форму (рис. 23). З рис. 24, на якому зображено оцінки компонентів математичного сподівання, видно, що перша компонента зростає майже вдвічі, значущими стали нульова та друга компоненти. Нульова компонента відповідає за стаціонарні властивості процесу, а друга – за нестаціонарні (вона пов'язана з нелінійністю системи).

ми).

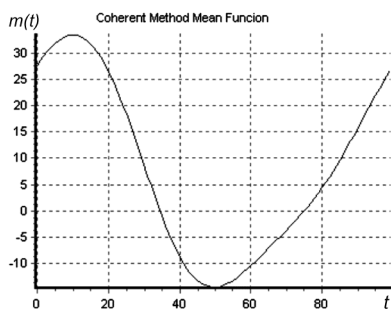


Рис. 23. Оцінка математичного сподівання.

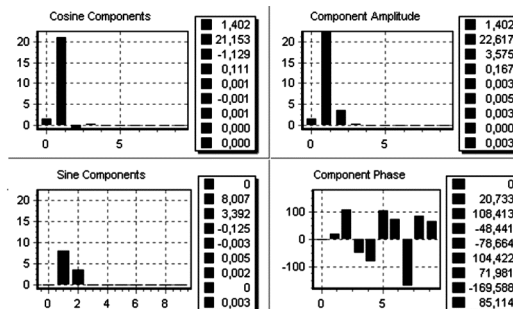


Рис. 24. Оцінка компонентів математичного сподівання.

Оцінка кореляційної функції випадкової складової вібраційного сигналу (рис. 26) теж має зникаючий хвіст, що, як зазначали, свідчить про те, що у цій складовій немає регулярних коливань.

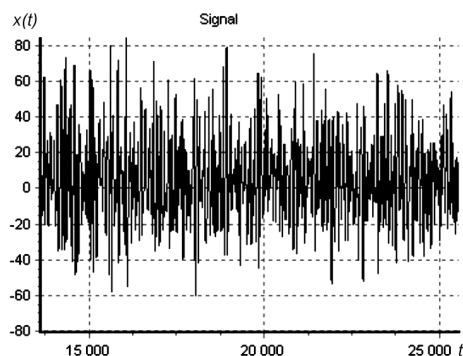


Рис. 25. Вигляд стохастичної складової вібраційного сигналу.

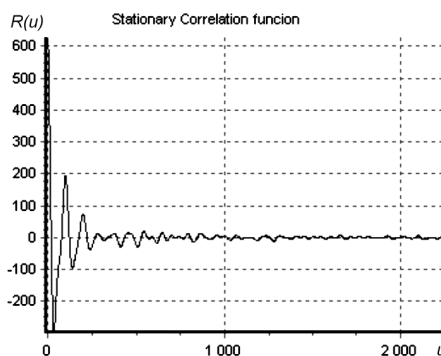


Рис. 26. Оцінка кореляційної функції випадкової складової вібраційного сигналу.

Форма дисперсії на періоді знову змінилася та набула вигляду (рис. 27). Розкид дисперсії випадкової складової становить $D_{\min}/D_{\max} = 0,24$. З рис. 28 бачи-

мо, що нульова та перша компоненти дисперсії різко зросли порівняно з попередніми дослідженнями.

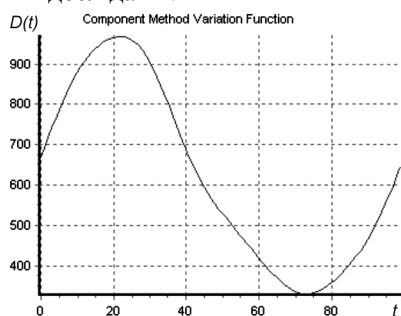


Рис. 27. Оцінка дисперсії випадкової складової сигналу.

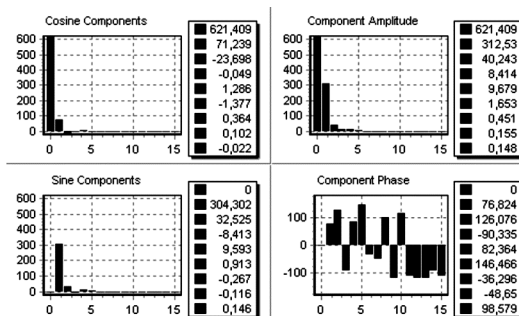


Рис. 28. Оцінка компонентів дисперсії випадкової складової сигналу.

Експериментальні дані свідчать, що з ростом тріщини змінюються імовірнісні характеристики вібраційного відгуку. На спектральній густині потужності це проявляється в розщепленні резонансного підняття, а також призводить до появи частот кратних до частоти вимушуючої сили. Також ріст тріщини проявляється в зростанні компонентів дисперсії випадкової складової процесу.

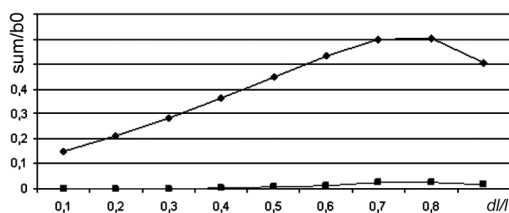


Рис. 29. Порівняння ефективності використання як діагностичного критерію оцінок компонентів дисперсії та компонентів математичного сподівання залишку вібраційного сигналу.

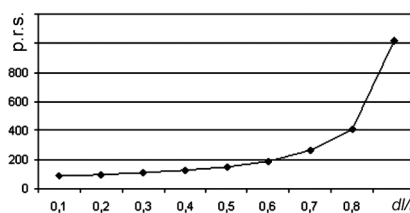


Рис. 30. Залежність потужності регулярних коливань від відносної довжини тріщини.

На графіку (рис. 29) наведено порівняння ефективності використання як діагностичного критерію оцінок компонентів дисперсії та компонентів математичного сподівання вібраційного залишку сигналу. Оцінки компонентів дисперсії з ростом тріщини зростають значно швидше, ніж оцінки компонентів математичного сподівання. Це свідчить про те, що за зростанням компонентів дисперсії можна виявити тріщину в деталі на ранній стадії зародження. Тобто її можна виявити ще до того моменту, коли в стаціонарному спектрі потужності від неї з'явиться характерна лінія. Це одна з основних переваг нестаціонарних методів діагностики перед стаціонарними.

Залежність потужності регулярних коливань від відносної довжини тріщини наведено на рис. 30. Як видно з графіка, енергія коливань постійно зростає. При малих довжинах тріщини, тобто на ранніх стадіях зародження, вона зростає повільно, проте, починаючи з $\Delta l/l = 0,5$, зростає досить стрімко.

Аналізуючи зміну відношення потужності регулярної складової коливань до коливної потужності зі зміною відносної довжини тріщини (рис. 31), робимо висновок, що до $\Delta l/l = 0,7$ воно плавно зростає, а потім різко падає.

З графіків, показаних на (рис. 31) та (рис. 29), видно, що в точці є характерне заломлення, тому виникає підозра про недоцільність використання даних моделювання з більшою відносною довжиною тріщини.

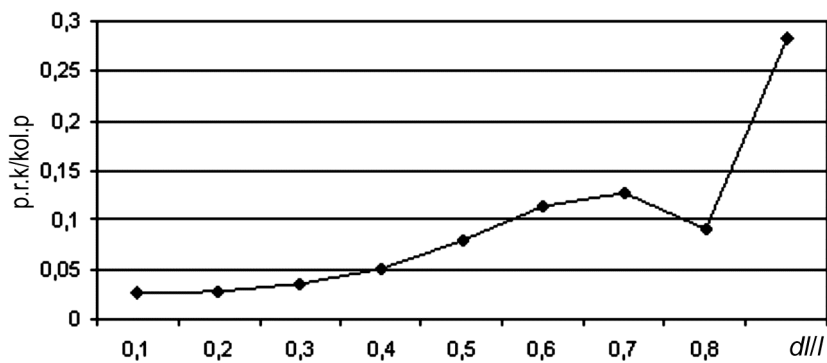


Рис. 31. Залежність відношення потужності регулярної складової коливань до коливної потужності від відносної довжини тріщини.

Отже, вібраційний відгук від дефектної деталі, на яку діє змінна сила, можна описати моделлю у вигляді періодично корельованого випадкового процесу. Як впливає з проведеного аналізу, тріщина призводить до нелінійності в системі, яка збільшується з її ростом. Досліджено зміну імовірнісних характеристик вібраційного сигналу від дефектної деталі з ростом тріщини. Порівняння ефективності використання цього підходу до задач ранньої діагностики свідчить про переваги над стаціонарними методами.

1. Драган Я. П., Рожков В. А., Яворський І. Н. Методы вероятностного анализа ритмики океанологических процессов. – Л.: Гидрометеиздат, 1987. – 319 с.
2. Tandon N., Choudry A., An Analytical Model of The Vibration Response Of Rolling Element Bearings Due to a Localized Defect // Journal of Sounds and Vibration. – 205 (3) – 1997 – P. 275–292.
3. Gelman L., Gorpnich S. Non-linear Vibroacoustical Free Oscillation Method For Crack Detection And Evaluation // Mechanical Systems and Signal Processing. – 14(3) – 2000 – P. 343–351.
4. Гельман Л. М., Зиньковський Ю. Ф., Петрунин І. В. Ефективність використання действительной и мнимой составляющих преобразования Фурье для диагностики усталостных трещин // Техническая диагностика и неразрушающий контроль. – 2001. – № 3. – С. 21–23.
5. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. – М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 600 с.

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів
 Інститут телекомунікацій Технологічно-природничого університету, Бидгощ, Польща
 Львівський державний інститут новітніх технологій та управління
 імені В. Чорновола МОіНУ

Одержано
 05.09.2008