

## Физико-математические аспекты затвердевания отливок разной геометрии в песчаной форме. Сообщение 2

Приведена математическая модель затвердевания отливок в песчаной форме и алгоритм расчета нестационарных температурных полей в системе отливка-форма-внешняя среда.

**Ключевые слова:** отливка, затвердевание, песчаная форма, температурное поле

Большинство задач затвердевания отливок разной массы и конфигурации не имеет строгого аналитического решения [1-3] в виде точных формул расчета температуры в любой точке отливки и формы для любого момента времени. Поэтому необходимо применять [4-8] приближенные численные методы расчета нестационарных температурных полей в затвердевающей отливке и теплоаккумулирующей форме с использованием персональных компьютеров. Моделирование теплофизических процессов литья численными методами в системе отливка-форма-окружающая среда весьма актуально.

Методом вычислительного эксперимента [9] можно получать численные решения сложных тепловых задач затвердевания отливок из стали, чугуна и других сплавов в податливых газопроницаемых песчаных формах. Численное решение задачи затвердевания отливок разной массы и геометрии может обеспечить достаточную для практики литейного производства и металлургии точность расчета нестационарных температурных полей в отливке и форме.

Чтобы разработать методику расчета нестационарных температурных полей при затвердевании и охлаждении отливок или их фрагментов (если отливка сложной конфигурации расчленена на простые геометрические тела), целесообразно упростить теплофизическую постановку задачи затвердевания фасонных отливок при нагреве расплавом стенок песчаной формы. Однако упрощенная математическая модель затвердевания должна адекватно отражать реальные процессы теплообмена в системе отливка-форма-окружающая среда.

Для математического моделирования процесса затвердевания отливок разной массы и геометрии в форме из кварцевого песка сформулированы дифференциальные уравнения нестационарной теплопроводности в отливке и форме. Уравнения распространения теплоты в объеме затвердевающей отливки и в стенках песчаной формы дополнены условиями начального распределения температуры по толщине отливки и формы и условиями внешнего теплообмена на границах теплового влияния формы на отливку и окружающей среды на форму. Разработанную математическую модель затвердевания отливок разной массы и геометрии в песчаной форме удобно представить в обобщенном виде:

– дифференциальные уравнения переноса тепла в отливке и форме:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_o \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} - \frac{\rho_f}{r} G_T \right), \quad 0 < r < R_o^-, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_\phi \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} - \frac{\rho_f}{r} G_T \right), \quad R_o^+ < r < R_\phi; \quad (2)$$

– начальные условия распределения температуры в отливке и форме:

$$T_o(r)|_{t=0} = T_P; \quad (3)$$

$$T_\phi(r)|_{t=0} = T_H; \quad (4)$$

– граничные условия теплообмена отливки с формой и внешней средой:

$$G_T|_{r=0} = 0; \quad (5)$$

$$\lambda_o G_T|_{r=R_o^-} = \alpha_1 \Delta T_K; \quad (6)$$

$$\lambda_\phi G_T|_{r=R_o^+} = \alpha_1 \Delta T_K; \quad (7)$$

$$\lambda_\phi G_T|_{r=R_\phi} = \alpha_2 \Delta T_C; \quad (8)$$

где:  $T$  – температура, °C;  $t$  – время, с;  $r$  – координата, м;  $R$  – полутолщина (радиус), м;  $\rho_f$  – параметр кривизны фронта солидуса ( $\rho_1 = 0$  для плоского фронта;  $\rho_2 = 1$  для цилиндрического фронта;  $\rho_3 = 2$  для сферического фронта);  $G_T = \left| \frac{\partial T}{\partial r} \right|$  – градиент температуры, °C/м;  $a_o = \lambda_o / C_o$  – температуропроводность, м<sup>2</sup>/с;  $\lambda_o = \varepsilon_n \lambda_T$  – теплопроводность, Вт/(м·K);  $\varepsilon_n$  – степень перемешивания расплава;  $\rho$  – плотность, кг/м<sup>3</sup>;  $c$  – удельная теплоемкость, Дж/(кг·K);  $C_o = (c + L_{кр} \theta_{кр})$  – объемная теплоемкость, Дж/(м<sup>3</sup>·K);  $\theta_{кр} = -(dg_T/dT)$  – температура кристаллизации, K<sup>-1</sup>;  $L_{кр}$  – теплота кристаллизации, кДж/кг;  $g_T$  – доля твердой фазы;  $\Delta T$  – температурный напор, °C;  $\alpha_1, \alpha_2$  – коэффициенты теплопередачи и теплоотдачи, Дж/(м<sup>2</sup>·с·K); индексы: о – отливка; ф – форма; с – среда; к – контакт;

н – начальный; р – расплав; п – перемешивание; ж – жидкий; т – твердый; кр – кристаллизация; э – эффективный;  $f$  – фронт; (-) – слева; (+) – справа.

В дифференциальных уравнениях математической модели затвердевания отливок разной геометрии в обычной (сухой или сырой) и низкотемпературной (охлажденной или замороженной) песчаных формах учтены тепловые эффекты фазовых переходов: теплота кристаллизации стали и чугуна в отливке, теплота плавления прослоек льда и теплота испарения пленок воды в замороженной форме. Темп кристаллизации в выражении объемной теплоемкости двухфазной зоны отливки отражает процесс фазового перехода при затвердевании расплава.

Теплофизическое воздействие вынужденной и естественной (тепловой) конвекции расплава [10, 11] в жидкой сердцевине затвердевающих отливок разной массы на их температурное состояние учтено с помощью коэффициента перемешивания расплава. Это необходимо для количественной оценки степени влияния эффективной теплопроводности [12] жидкого и кристаллизующегося металла на процесс затвердевания отливок в песчаной форме.

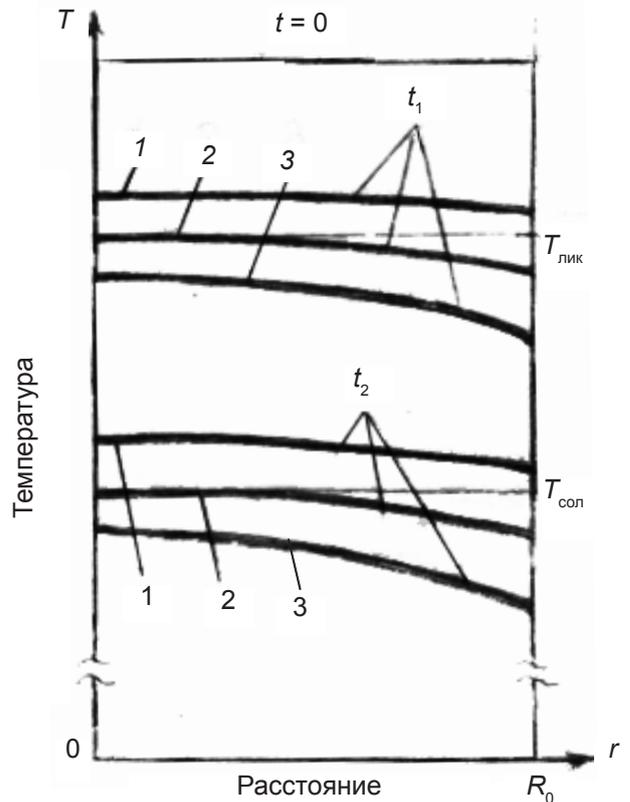
Реализация на ПК математической модели (1)-(8) затвердевания отливок разной геометрии в форме из кварцевого песка позволяет исследовать степень влияния геометрического фактора (параметр кривизны [13] подвижного фронта солидус) и теплофизического фактора (эффективная теплопроводность двухфазной зоны с учетом темпа кристаллизации [14] железоуглеродистого сплава) на кинетику затвердевания стальной или чугунной отливки.

При разбивке отливок разной массы и геометрии и стенок формы на расчетные слои можно вычислять температуру в  $j$ -х точках (дискретных узлах) на границах этих слоев и в расположенных между ними  $i$ -х точках (узлах) системы отливка-форма в последовательные моменты времени  $t_{k+1}$  от начала затвердевания отливки к моменту ее охлаждения до технологически заданной температуры выбивки из песчаной формы полностью затвердевшей отливки.

Для численного решения задач затвердевания отливок разной геометрии в теплоаккумулирующей форме из кварцевого песка выполнена аппроксимация (приближенное представление) дифференциальных уравнений нестационарной теплопроводности и граничных условий математической модели затвердевания отливок в виде более простых алгебраических уравнений. Используя эти уравнения, разработан конечно-разностный алгоритм расчета температурных полей в отливках типа стенка, цилиндр и шар (рисунок). Расчетные формулы алгоритма удобно записать для каждого последующего момента времени  $t_{k+1}$ .

Температура затвердевающих отливок в тепловом центре шара, на оси цилиндра или в плоскости симметрии стенки вычисляется по формуле:

$$T_1^{k+1} = T_1^k - 2(1 + p_f) \Delta Fo_1 (T_1^k - T_2^k) \quad (9)$$



Схематическое сопоставление изохрон температуры по толщине отливок разной геометрии: 1, 2, 3 – стенка, цилиндр, шар;  $t_1, t_2$  – разные моменты затвердевания отливок

Температура в  $j$ -х узлах расчетных слоев отливок разной геометрии ( $j = 3, 5, 7, \dots; 2 < j < M_2 - 1$ ) вычисляется по явной конечно-разностной формуле:

$$T_j^{k+1} = T_j^k - \Delta Fo_1 \left[ 2T_j^k - T_{j-1}^k - T_{j+1}^k + \frac{p_f}{2(j-1)} (T_{j-1}^k - T_{j+1}^k) \right] \quad (10)$$

Температура в  $i$ -х узлах отливок разной геометрии ( $i = 2, 4, 6, \dots; 1 < i < M_2$ ) вычисляется по неявной конечно-разностной формуле с учетом полученных значений температуры в соседних ( $j_-$  и  $j_+$ ) расчетных узлах отливки:

$$T_i^{k+1} = T_i^k - \frac{\Delta Fo_1}{1 + 2\Delta Fo_1} \left[ 2T_i^k - T_{j_-}^{k+1} - T_{j_+}^{k+1} + \frac{p_f}{2(i-1)} (T_{j_-}^{k+1} - T_{j_+}^{k+1}) \right] \quad (11)$$

Температура поверхности охлаждения плоских, цилиндрических и сферических отливок в зоне их контакта с формой вычисляется по формуле:

$$T_{M_2}^{k+1} = T_{M_2}^k - \Delta Fo_1 \left[ \left( 2 + \frac{p_f}{M} \right) \Delta Bi_{M_2} (T_{M_2}^k - T_{N_1}^k) - 2(T_{M_2-1}^k - T_{M_2}^k) \right] \quad (12)$$

Температура внутренней (рабочей) поверхности нагрева формы в зоне ее теплового контакта с затвердевающей отливкой вычисляется по формуле:

$$T_{N_1}^{k+1} = T_{N_1}^k + \Delta Fo_2 \left[ \left( 2 - \frac{\rho_f \delta_\phi}{R_o N} \right) \Delta Bi_{N_1} (T_{M_2}^k - T_{N_1}^k) - 2(T_{N_1}^k - T_{N_1+1}^k) \right]. \quad (13)$$

Температура в  $j$ -х узлах формы ( $j = N_1 + 2, N_1 + 4, \dots; N_1 + 1 < j < N_2 - 1$ ) на границах расчетных слоев вычисляется по явной конечно-разностной формуле:

$$T_j^{k+1} = T_j^k + \Delta Fo_2 \left[ T_{j-1}^k + T_{j+1}^k - 2T_j^k - \frac{\frac{\rho_f \delta_\phi}{2 N}}{R_\phi - (M + N + 2 - j) \frac{\delta_\phi}{N}} (T_{j-1}^k - T_{j+1}^k) \right]. \quad (14)$$

Температура в  $i$ -х внутренних узлах формы ( $i = N_1 + 1, N_1 + 3, \dots; N_1 < i < N_2$ ) вычисляется по неявной конечно-разностной формуле с учетом полученных значений температуры в соседних ( $j_-$  и  $j_+$ ) расчетных узлах формы:

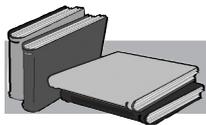
$$T_i^{k+1} = T_i^k + \frac{\Delta Fo_2}{1 + 2\Delta Fo_2} \left[ T_{j_-}^{k+1} + T_{j_+}^{k+1} - 2T_i^k - \frac{\frac{\rho_f \delta_\phi}{2 N}}{R_\phi - (M + N + 2 - i) \frac{\delta_\phi}{N}} (T_{j_-}^{k+1} - T_{j_+}^{k+1}) \right]. \quad (15)$$

Температура наружной поверхности охлаждения стенок формы на их границе с окружающей средой вычисляется по формуле:

$$T_{N_2}^{k+1} = T_{N_2}^k + \Delta Fo_2 \left[ 2(T_{N_2-1}^k - T_{N_2}^k) - \left( 2 - \frac{\rho_f \delta_\phi}{R_\phi N} \right) \Delta Bi_{N_2} (T_{N_2}^k - T_c) \right]. \quad (16)$$

где  $\rho_f = 0, 1, 2$  – параметр кривизны отливок;  $M, N$  – число расчетных слоев в отливке и форме;  $M_2 = M + 1; N_1 = M_2 + 1; N_2 = N_1 + N$  – расчетные узлы на границах отливки и формы;  $i, j$  – внутренние расчетные узлы в отливке и форме;  $\Delta r_1, \Delta r_2$  – расчетные шаги по толщине отливки и формы;  $\Delta t$  – расчетный шаг по времени;  $k$  – количество шагов к текущему моменту времени;  $\Delta Fo_1 = \frac{a_3 \Delta t}{\Delta r_1^2}; \Delta Fo_2 = \frac{a_\phi \Delta t}{\Delta r_2^2}$  – разностные аналоги критерия Фурье;  $\Delta Bi_{M_2} = \frac{\alpha_1^2 \Delta r_1}{\lambda_3}; \Delta Bi_{N_1} = \frac{\alpha_1 \Delta r_2}{\lambda_\phi}; \Delta Bi_{N_2} = \frac{\alpha_2 \Delta r_2}{\lambda_\phi}$  – разностные аналоги критерия Био.

Таким образом, разработанную методику расчета температуры в системе отливка-форма можно применять при математическом моделировании [15, 16] процесса затвердевания отливок разной массы и геометрии [17, 18] в формах из кварцевого песка. Вариантные расчеты нестационарных температурных полей в затвердевающей отливке и стенках песчаной формы целесообразно проводить на ПК по формулам (9) – (16) конечно-разностного алгоритма явно-неявного типа, который отличается повышенной точностью вычислений.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Вейник А. И. Тепловые основы теории литья. – М.: Машгиз, 1953. – 383 с.
2. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.
3. Беляев Н. М., Рядно А. А. Методы теории теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1982. – 304 с.
4. Коздоба Л. А. Решение нелинейных задач теплопроводности. – К.: Наукова думка, 1976. – 300 с.
5. Никитенко Н. И. Исследование нестационарных процессов теплообмена методом сеток. – К.: Наукова думка, 1971. – 260 с.
6. Саульев В. К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. – М.: Физматгиз, 1960. – 324 с.
7. Рихтмайер Р., Мортони К. Разностные методы решения краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 418 с.
8. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 654 с.
9. Самарский А. А. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент // Вестник АН СССР, 1979. – № 5. – С. 38-49.
10. Ефимов В. А. Разливка и кристаллизация стали. – М.: Metallurgy, 1976. – 539 с.
11. Скребцов А. М. Конвекция и кристаллизация металлического расплава в слитках и отливках. – М.: Metallurgy, 1993. – 143 с.
12. Карножицкий В. Н. Контактный теплообмен в процессах литья. – К.: Наукова думка, 1978. – 300 с.
13. Мамишев В. А. Особенности теплопереноса при формировании литых изделий с изменяющейся кривизной фронтов затвердевания // Процессы литья, 1998. – № 3-4. – С. 63-67.

14. Мамишев В. А., Соколовская Л. А. О математическом прогнозировании темпа кристаллизации железоуглеродистых сплавов применительно к оптимизации двухфазной зоны затвердевания // Физико-химические воздействия на кристаллизацию стали. – К.: ИПЛ АН УССР, 1982. – С. 12-18.
15. Мамишев В. А., Шинский О. И., Соколовская Л. А. Физико-технологические аспекты затвердевания фасонных отливок в песчаной форме // Металл и литье Украины, 2014. – № 9. – С. 28-31.
16. Соколовская Л. А., Мамишев В. А. О математическом моделировании задач с фазовыми переходами в металлургии и литейном производстве // Процессы литья, 2009. – № 2. – С. 24-29.
17. Мамишев В. А. Системный анализ затвердевания литых заготовок с переменной кривизной границ двухфазной зоны // Процессы литья, 2014. – № 1. – С. 19-26.
18. Мамишев В. А. О повышении эффективности теплообмена в системе литая заготовка-форма-окружающая среда // Металл и литье Украины, 2012. – № 11. – С. 31-35.

#### Анотація

*Мамішев В. А., Шинський О. Й., Соколовська Л. А.*  
Фізико-математичні аспекти тверднення виливків різної геометрії в піщаній формі. Повідомлення 2

*Представлено математична модель тверднення виливків в піщаній формі та алгоритм розрахунку нестационарних температурних полів в системі виливок-форма-довкілля.*

#### Ключові слова

*виливок, тверднення, піщана форма, температурне поле*

#### Summary

*Mamishhev V. , Shinskij O. , Sokolovska L.*  
Physique-mathematical aspects of solidification castings the different geometry in the sandy mould

*It is presented the mathematical model of castings solidification in the sandy mould and algorithm of calculate the non-stationary temperature fields in the system casting-mould-outward environment.*

#### Keywords

*casting, solidification, mould, temperature field*

Поступила 23.10.2014