Ю.В. Шерстенников,
г. Днепропетровск

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА К ИССЛЕДОВАНИЮ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАБОТЫ ФИРМЫ

Введение. В ряду математических методов, широко применяющихся в исследовании динамики развития экономических систем, одно из центральных мест занимают модели, основанные на теории марковского случайного процесса. Теория марковского процесса детально разработана в математическом отношении и имеет широкую область применения [1 — 3]. Так, в работе [4] рассматривается приложение марковских процессов к задачам о распеределении ресурсов между различными отраслями производства и потреблением, оптимальных сроках замены оборудования, регулировании водоснабжения и др.

Применение модели марковского процесса к исследованию динамики экономических систем обычно сводится к выполнению численных расчетов с целью получения конкретных количественных характеристик процесса. При этом основной проблемой, с которой сталкиваются исследователи, является определение параметров модели. Попытка детального описания экономической системы в рамках модели Маркова приводит к необходимости определения большого количества параметров, которые имеют вероятностный характер, и численное их определение оказывается весьма проблематичным. Указанные затруднения сдерживают применение теории марковских процессов к исследованию экономических систем.

В современной экономической теории имеется, по мнению автора, определенный концептуальный пробел. Отсутствуют исследования, которые должны ответить на следующие принципиальные вопросы: насколько детальным должно быть описание экономической системы в рамках модели марковского случайного процесса; в какой мере точность определения каждого из параметров модели влияет на достоверность конечного результата исследования. Настоящая работа призвана по возможности восполнить указанный пробел.

Постановка задачи. Целью работы является применение модели однородной цепи Маркова к исследованию динамики развития фирмы, работающей в условиях рыночной неопределенности. Ставилась задача — оценить степень влияния каждого из параметров модели на конечный экономический результат деятельности фирмы и на основании этого сделать выводы о необходимой степени точности при определении данного параметра модели.

Другими словами, постановку задачи можно сформулировать следующим образом. Предположим, у нас есть возможность определить параметры модели марковской цепи для описания работы фирмы с относительной погрешностью не менее 0,1 (или 10%). Параметры модели имеют вероятностный характер, и для их определения нужно выполнить сбор и статистическую обработку больших массивов данных. Эта работа сама по себе является достаточно трудоемкой. При этом возникают следующие вопросы: какую точность можно ожидать от результатов, полученных при использовании данной модели; каким образом будет происходить накопление погрешности расчетов при увеличении горизонта планирования (т.е. при увеличении числа шагов в цепи Маркова). Иначе говоря: будут ли результаты достоверными и стоит ли браться за применение модели цепи Маркова, если параметры модели не могут быть определены с погрешностью меньшей, чем, например 10%.

Основное содержание исследования. Рассмотрим деятельность некоторой, например туристической, фирмы. Экономические итоги своей деятельности фирма определяет в фиксированные моменты времени t. Если фирма подводит итоги ежемесячно, то параметр t нумерует месяцы (хотя он может нумеровать кварталы, годы и т.д.). Пользуясь терминологией, принятой в теории цепей Маркова, будем говорить, что в каждый конкретный момент времени t фирма может находиться в одном из множества возможных состояний $A_1, A_2, \ldots$. Применительно к туристической фирме (аналогичное описание может быть применено к любому предприятию) это означает следующее: если тур операторы в данном месяце выполнили план на 100%, то будем считать, что фирма находится в состоянии A_1; если план выполнен на 99% — то в состоянии A_2 и т.д. В дальнейшем возможно ограничиваться случаем, что план всегда выполняется не менее чем на 91%. Хотя это ограничение и не является принципиальным, тем не менее в реальной деятельности предприятий оно обычно выполняется.

При указанном выше способе описания мы придем к модели цепи Маркова с размерностью 10×10. Назовем эту модель моделью T (от слова «точная»). Для полного описания модели T потребуется определение 190 параметров. Эта задача выглядит нереальной. В таком случае от модели *Т* переходят к модели *П* («приближенная»). Это может быть сделано следующим образом. Вместо 10 состояний (уровней) системы рассматриваются (в простейшем случае) два: состояние A_1 — план выполнен на 96—100% и состояние A_2 — план выполнен на 91—95%. Модель *П* имеет размерность 2×2. Для полного описания модели *П* потребуется определение шести параметров. Упростив описание модели, мы одновременно снизили ее точность. Вопрос о точности описания системы при помощи модели марковской цепи мы в данной работе не рассматриваем, поскольку он относится к общей теории марковских процессов, что не входит в нашу задачу. В настоящей работе размерность задачи (а следовательно, степень детальности и точности модели) не являются принципиальными. Результаты, полученные ниже, могут быть получены и для моделей с более высокой размерностью. Модель 2×2 интересует нас только с точки зрения прозрачности дальнейших выкладок.

В дальнейшем будем придерживаться следующей терминологии. Если система находится в состоянии A_1, то будем говорить, что она находится «на уровне *i*». Выше было отмечено, что даже для простейшей двухуровневой системы требуется определение шести параметров. Нашей задачей является исследование вопроса о минимальной степени точности, с которой должен быть определен каждый из шести параметров двухуровневой системы, при которой модельные расчеты могут считаться достоверными.

Модель однородной (не зависящей от времени) цепи Маркова для двухуровневой системы состоит в определении двух матриц: матрицы вероятностей переходов

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

и матрицы стоимостей

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

где p_{ij} — вероятность перехода системы с уровня *i* на уровень *j* за один шаг эволюции (т.е. при изменении времени с момента t до момента $t+1$);

r_{ij} — доход, полученный при переходе системы с уровня *i* на уровень *j* за один шаг эволюции.

Вероятности переходов p_{ij} связаны следующими соотношениями:

$$p_{11} + p_{12} = 1, \qquad (3)$$

$$p_{21} + p_{22} = 1. \qquad (4)$$

Примем следующие обозначения:

$$p_{11} = p, \quad p_{21} = p - d. \qquad (5)$$

В рассматриваемом примере с туристической фирмой (как и во многих других экономических системах) величина *d* находится в пределах

$$0 < d < 0{,}8p.$$

С учетом (3) — (5) матрица *P* может быть записана в виде

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ p-d & 1-p+d \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Упростим также обозначения для матрицы *R*:

$$R = \begin{pmatrix} \tilde{r}_0 & \tilde{r}_2 \\ \tilde{r}_1 & \tilde{r}_3 \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Исследования различных экономических систем приводят к выводу, что для экономических систем между параметрами матрицы (7) имеют место следующие соотношения:

$$\tilde{r}_0 > \max\{\tilde{r}_1, \tilde{r}_2\}, \quad \tilde{r}_3 < \min\{\tilde{r}_1, \tilde{r}_2\}. \qquad (8)$$

Удобно в качестве денежной единицы выбрать величину $\tilde{r}_0$. Тогда (7) примет вид:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \bar{r}_2 \\ \bar{r}_1 & \bar{r}_3 \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

где

$$\bar{r}_i = \frac{\tilde{r}_i}{\tilde{r}_0}.$$

Введем обозначения:

$$\bar{r}_i = 1 - r_i. \qquad (10)$$

В этих обозначениях

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1-r_2 \\ 1-r_1 & 1-r_3 \end{pmatrix}, \qquad (11)$$

В реальных экономических задачах для r_1 и r_2 имеют место ограничения:

$$0 < r_1, r_2 < 0{,}5. \qquad (11)$$

Из (8) и (10) следует:

$$r_3 > \max\{r_1, r_2\}. \qquad (12)$$

В модели цепи Маркова экономический результат (доход фирмы) зависит от уровня (состояния), с которого система начинает эволюцию. Обозначим через $v_i(t)$ доход, полученный за t шагов эволюции системы (фирмы) в случае, когда при $t = 0$ система находилась на *i*-ом уровне. Тогда вектор доходов рассчитывается из векторно-матричного уравнения [5]:

$$\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \left(E + P + P^2 + \ldots + P^t\right) \cdot \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}, \qquad (13)$$

где E — единичная матрица 2×2,

g_i — элементы главной диагонали матрицы $P \cdot R^T$, R^T — транспонированная матрица стоимостей R.

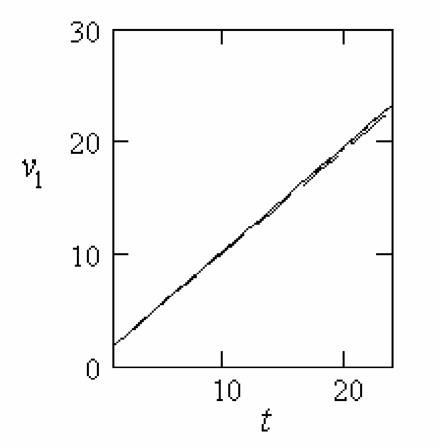

Рис. 1. Величина дохода $v_1(t)$ в зависимости от t для трех значений $r_3 = 0{,}4; 0{,}6; 0{,}9$

На рис. 1 показана динамика дохода фирмы в зависимости от времени t, в случае, когда в начальный момент времени фирма находится на первом уровне. Расчеты выполнены при следующих значениях параметров: $p = 0{,}9$; $d = 0{,}2$; $r_1 = 0{,}2$; $r_2 = 0{,}4$ и трех значений параметра r_3. Все три линии на рисунке практически сливаются. Численные расчеты показывают, что отклонение значений $v_1(t)$ для значений параметра $r_3 = 0{,}4$ и $r_3 = 0{,}9$ от значений $v_1(t)$ для $r_3 = 0{,}6$ не превышают 1%. Это означает, что при точности расчетов 1% значения параметра r_3 может быть вычислено как сумма:

$$r_3 = r_1 + r_2 \tag{14}$$

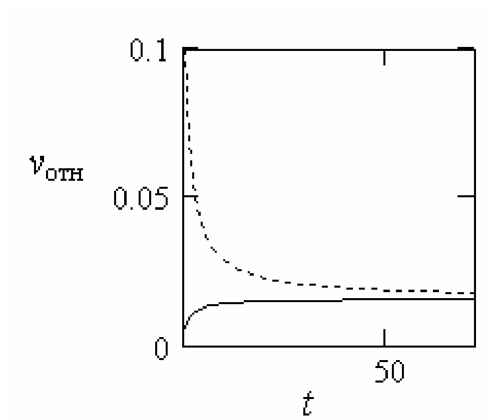

Рис. 2. Зависимость приведенных разностей доходов от времени: сплошная линия — $v_{1отн}$; точечная — $v_{2отн}$.

На рис. 2 показаны результаты расчета величин:

$$v_{1отн} = \frac{v_1(0{,}4) - v_1(0{,}8)}{v_1(0{,}4)} \quad \text{и}$$

$$v_{2отн} = \frac{v_2(0{,}4) - v_2(0{,}8)}{v_2(0{,}4)} \tag{15}$$

В (15) в скобках указаны значения параметра r_3. Остальные параметры при расчете по (15) имеют следующие значения: $p = 0{,}9$; $d = 0{,}2$; $r_1 = 0{,}1$; $r_2 = 0{,}3$. Из рис. 2 видно что $v_{1отн}$ и $v_{2отн}$ при больших значениях t сходятся к величине 0,017. Это означает, что при больших t конкретное значение параметра r_3 становится несущественным.

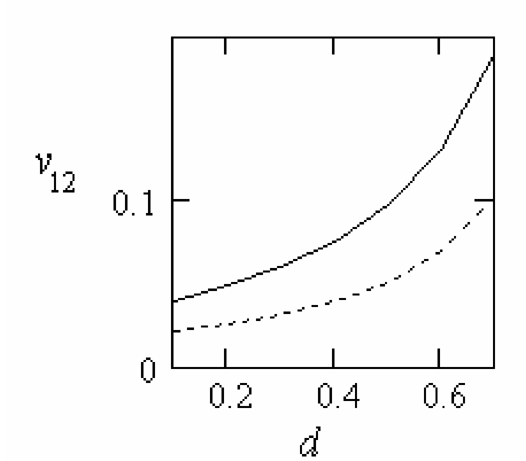

Рис. 3. Зависимость $v_{12}(t)$ от d для различных t: сплошная линия — $t = 12$; точечная — $t = 24$

На рис. 3 показана зависимость величины

$$v_{12}(t) = \frac{v_1(t) - v_2(t)}{v_1(t)} \tag{16}$$

от параметра d для двух значений t. Из рис. 3 видно, что при $t = 12$ доход v_1 может превышать v_2 на 20%, а при $t = 24$ — всего лишь на 10%. Поскольку $v_1(t)$ — это доход, полученный фирмой за время t, в том случае, когда при $t = 0$ фирма находилась на первом уровне, то из результатов, представленных на рис. 3, следует, что для получения максимального экономического эффекта фирма должна принять меры, чтобы в самом начале проекта (при $t = 0$) фирма находилась именно на уровне 1, а не 2. Это означает, что особое внимание рекламной и маркетинговой деятельности фирма должна уделить в самом начале проекта.

Выводы. Проведенные исследования дают возможность сделать следующее утверждение: для задания двухуровневой модели цепи Маркова достаточно определить пять параметров: p, d, r_1, r_2 и $\tilde{r}_0$. Динамика модели определяется расчетами, показанными на рис. 1—3. Параметр $\tilde{r}_0$ определяет масштаб дохода. Это означает, что от $\tilde{r}_0$ результаты зависят существенно (линейно). Численный анализ показывает, что существенным параметром модели является также параметр p. Остальные параметры модели могут быть определены с точностью 10%, что приведет к погрешности вычислений доходов v_1 и v_2 не более чем 1,5%.

Общий итог исследования может быть подведен следующим утверждением. В случае, если параметры модели Маркова для данной фирмы могут быть определены с погрешностью в пределах 10%, применение модели Маркова для оценки эффективности работы фирмы являются вполне оправданным, а полученные результаты дадут достоверную оценку (по крайней мере) для относительной эффективности работы в зависимости от начального состояния фирмы.

Полученные в работе результаты применимы для задач более высокой размерности, чем 2×2, и позволяют существенно расширить область применения модели марковской цепи в экономических исследованиях.

Литература

1. **Таха, Хэдми А.** Введение в исследование операций. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. — 911 с. 2. **Ховард Р.** Динамическое программирование и марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1964. — 189 с. 3. **Кемени Дж.** Конечные цепи Маркова. — М.: Наука, 1970. — 271 с. 4. **Дынкин Е.Б., Юшкевич А.А.** Управляемые марковские процессы и их приложения. — М.: Наука, 1975. — 339 с. 5. **Жлуктенко В.І., Наконечний С.І., Савіна С.С.** Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник: У 2 ч. — Ч. ІІ: Математична статистика. — К.: КНЕУ, 2001. — 336 с.