

УДК 539.3

## НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПОРОЖНИННОГО ЦИЛІНДРА З СИСТЕМОЮ ТРІЩИН ЗА ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ ПОВЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ

О. І. Кирилова

[olga.i.kyrylova@gmail.com](mailto:olga.i.kyrylova@gmail.com)

ORCID: 0000-0002-9221-182X

В. Г. Попов

[dr.vg.popov@gmail.com](mailto:dr.vg.popov@gmail.com)

ORCID: 0000-0003-2416-642X

Національний університет  
«Одеська морська академія»,  
65029, Україна, м. Одеса,  
вул. Дідріхсона, 8

В роботі розв'язана задача з визначення напруженого стану поблизу тріщин в нескінченному порожнинному циліндрі довільного перерізу під час коливань повздовжнього зсуву. Запропоновано підхід, що дозволяє окремо задовольнити умови на тріщинах та на границях циліндра. Задача зводиться до рівнянь руху в плоскій області з дефектами, обмеженими довільними гладкими замкненими кривими, в умовах антиплоскої деформації. Схема розв'язання базується на використанні розривних розв'язків рівнянь руху пружного середовища зі стрибками переміщень на поверхнях дефектів. Переміщення в циліндрі з дефектами подаються сумою розривних розв'язків, побудованих для кожного дефекту, і невідомої характерної функції, що забезпечує виконання умов гармонічного навантаження на межах тіла. Ця функція розшукується у вигляді комбінації лінійно незалежних розв'язків рівнянь теорії пружності у частотній області з невідомими коефіцієнтами. Сконструйоване подання дає змогу окремо задовольнити крайові умови на поверхні дефектів з отриманням сукупності систем інтегральних рівнянь, що відрізняються тільки правими частинами і не залежать від форми межі тіла. Отримані системи інтегральних рівнянь розв'язуються методом механічних квадратур. Далі задовольняються умови на границях циліндричного тіла, з яких методом колокації визначаються невідомі коефіцієнти введеної характерної функції. Застосовуючи запропонований підхід, проведено розрахунки коефіцієнтів інтенсивності напружень в околі дефектів, за допомогою яких досліджено вплив на їхні значення частоти та розташування дефектів.

**Ключові слова:** порожнинний циліндр, гармонічні коливання, коефіцієнти інтенсивності напружень, система тріщин.

### Вступ

Дослідження напруженого стану обмежених тіл з тріщинами є актуальним як для встановлення умов руйнування тіл через оцінку коефіцієнтів інтенсивності динамічних напружень в околі тріщин, так і діагностики таких дефектів, виходячи з інформації про їхній вплив на резонансні частоти. Отримані результати у цьому напрямі переважно належали до необмежених та напівобмежених тіл з дефектами [1–4]. Ситуацій, де тіла займають обмежену область, розглянуто значно менше. Це пов'язано з тим, що із застосуванням методу граничних інтегральних рівнянь вихідні задачі зводяться до зв'язаних систем інтегральних рівнянь, заданих і на поверхні дефектів, і на межі тіла [5–7], що суттєво ускладнює числову реалізацію, особливо у випадку непоодиноких дефектів та багатозв'язних областей. В поданій роботі пропонується метод, що дозволяє незалежно послідовно задовольняти граничні умови на дефектах і на поверхні тіла.

### Постановка задачі

Розглядається порожнинний пружний циліндр з твірними, що є паралельними осі  $Oz$ , переріз якого площиною  $xOy$  являє собою двозв'язну плоску область, яка обмежена довільними замкненими гладкими кривими. Ці криві в полярній системі координат, центр якої співпадає з початком координат  $xOy$ , визначаються рівняннями:  $r = r_0\psi_0(\phi)$  – зовнішня,  $r = r_1\psi_1(\phi)$  – внутрішня границі,  $0 \leq \phi < 2\pi$ . У циліндрі міститься  $N$  наскрізних тріщин з центрами в точках  $(c_k, d_k)$ , що у площині  $xOy$  не виходять за межі перерізу і займають відрізки довжиною  $2a_k, k = \overline{1, N}$  (рис. 1).

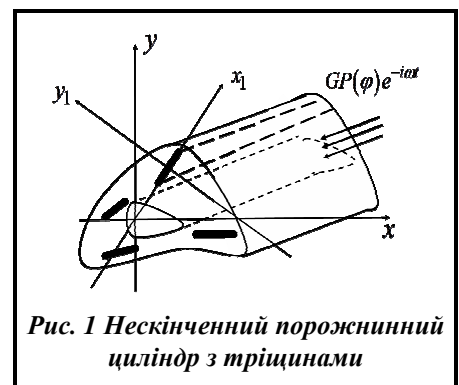


Рис. 1 Нескінченний порожнинний циліндр з тріщинами

У циліндрі відбуваються коливання повздовжнього зсуву внаслідок дії на бічну поверхню самоврівноважувального гармонічного навантаження  $GP(\phi)e^{-i\omega t}$ , де  $G$  – модуль зсуву;  $P(\phi)$  – знерозмірена задана амплітуда навантажень,  $\omega$  – частота коливань. Множник  $e^{-i\omega t}$  всюди далі опущений. За таких умов відмінною від нуля є тільки  $z$ -компонента вектора переміщення, яка задовольняє рівняння Гельмгольца [8]. Це рівняння у полярній системі має вигляд

$$\Delta w + \kappa_2^2 w = 0; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad (1)$$

де  $\kappa_2 = \frac{\omega}{C_2}$ ;  $C_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ ;  $\rho$  – густина матеріалу циліндра.

Зовнішня поверхня циліндра вважається звантаженою

$$\tau_{\bar{n}z}(r_0 \Psi_0(\phi), \phi) = GP(\phi), 0 \leq \phi < 2\pi, \quad (2)$$

внутрішня – нерухомою

$$w(r_1 \Psi_1(\phi), \phi) = 0, 0 \leq \phi < 2\pi. \quad (3)$$

Для формулювання граничних умов на тріщинах з центром кожної пов'язується локальна система координат  $x_k O_k y_k$ ,  $k = \overline{1, N}$  (рис. 1). Зв'язок між локальними та глобальною системами задається формулами

$$\begin{cases} x = c_k + x_k \cos \alpha_k - y_k \sin \alpha_k, \\ y = d_k + x_k \sin \alpha_k + y_k \cos \alpha_k. \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} x_l = (c_k - c_l) \cos \alpha_l + (d_k - d_l) \sin \alpha_l + x_k \cos(\alpha_k - \alpha_l) - y_k \sin(\alpha_k - \alpha_l), \\ y_l = -(c_k - c_l) \sin \alpha_l + (d_k - d_l) \cos \alpha_l + x_k \sin(\alpha_k - \alpha_l) + y_k \cos(\alpha_k - \alpha_l), \end{cases} \quad k, l = \overline{1, 2, \dots, N}.$$

Між локальними та полярною системою координат зв'язок має вигляд

$$\begin{cases} x_l = (r \cos \phi - c_l) \cos \alpha_l + (r \sin \phi - d_l) \sin \alpha_l, \\ y_l = (r \sin \phi - d_l) \cos \alpha_l - (r \cos \phi - c_l) \sin \alpha_l. \end{cases} \quad (5)$$

Нехай  $w_k(x_k, y_k)$  –  $z$ -компонента вектора переміщень під час переходу від полярних координат до декартових за формулами (5). Тріщини вважаються вільними від навантажень

$$\tau_{zy_k}(x_k, 0) = G \frac{\partial w_k}{\partial y_k}(x_k, 0) = 0, \quad |x_k| < a_k, \quad k = \overline{1, N}. \quad (6)$$

Також на поверхнях тріщин розривні переміщення зі стрибками

$$\langle w_k \rangle = w_k(x_k, +0) - w_k(x_k, -0) = \chi_k(x_k), \quad |x_k| < a_k, \quad k = \overline{1, N}. \quad (7)$$

З умов змикання тріщин випливає, що  $\chi_k(\pm a_k) = 0$ .

За таких умов ставиться задача визначення напруженого стану в околі тріщин.

### Розв'язання задачі

Для кожної тріщини в локальній системі координат будується розривний розв'язок [9] зі стрибками (7)

$$w_l^{(d)}(x_l, y_l) = \frac{\partial}{\partial y_l} \int_{-a_l}^{a_l} \chi_l(\eta) r_2(\eta - x_l, y_l) d\eta, \quad (8)$$

де  $r_2(\eta - x_l, y_l) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}\left(\kappa_2 \sqrt{(\eta - x_l)^2 + y_l^2}\right)$ ,  $H_0^{(1)}$  – функція Ханкеля.

Далі в полярній системі координат переміщення подається у вигляді

$$w^{(g)}(r, \phi) = w_0^{(g)}(r, \phi) + \sum_{l=1}^N w_l^{(g)}(r, \phi), \quad (9)$$

де  $w_l^{(g)}(r, \phi)$  – розв'язки розв'язки (8) після переходу до полярних координат,  $w_0^{(g)}(r, \phi)$  – деяка невідома функція, яка є розв'язком рівняння Гельмгольца **Ошибка! Источник ссылки не найден.** і за рахунок якої будуть задовольнятися умови (2), (3) на поверхні циліндра.

Далі ця функція подається у вигляді лінійної комбінації частинних розв'язків рівняння Гельмгольца (1)

$$w_0^{(g)}(r, \phi) = r_0 \sum_{s=1}^M (A_s g_s(r, \phi) + B_s h_s(r, \phi)), \quad (10)$$

де  $h_{2m-1}(r, \phi) = H_{m-1}(\kappa_2 r) \cos(m-1)\phi$ ,  $h_{2m}(r, \phi) = H_m(\kappa_2 r) \sin m\phi$ ;

$g_{2m-1}(r, \phi) = J_{m-1}(\kappa_2 r) \cos(m-1)\phi$ ,  $g_{2m}(r, \phi) = J_m(\kappa_2 r) \sin m\phi$ .

Ці функції лінійно незалежні і утворюють повну замкнену систему в області перерізу [10].

Для реалізації граничних умов (6) на тріщинах в системі координат, пов'язаної з  $k$ -ю тріщиною, переміщення подається аналогічно (9)

$$w_k(x_k, y_k) = w_k^0(x_k, y_k) + \sum_{l=1}^N w_k^l(x_k, y_k), \quad (11)$$

де  $w_k^0(x_k, y_k)$  отримано з  $w_0^{(g)}(r, \phi)$  після перетворень координат за (5), а  $w_k^l(x_k, y_k)$  в результаті підстановки в  $w_l^{(g)}(r, \phi)$   $x_l, y_l$  за іншими формулами (4).

Після цього підстановка (11) в (6) приводить до системи інтегро-диференціальних рівнянь, яка після відокремлення сингулярних складових набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (\phi_{sk}^{(i)}(\tau))' \left[ \frac{1}{\tau - \zeta} + R_k^{(1)}(\tau - \zeta) \right] d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \phi_{sk}^{(i)}(\tau) \left[ -\gamma_k^2 \kappa_0^2 \ln|\tau - \zeta| + R_k^{(0)}(\tau - \zeta) \right] d\tau + \\ & + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (\phi_{sl}^{(i)}(\tau))' F_{kl}^{(1)}(\tau, \zeta) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \phi_{sl}^{(i)}(\tau) F_{kl}^{(0)}(\tau, \zeta) d\tau \right] = f_{sk}^{(i)}(\zeta), \end{aligned} \quad (12)$$

$$k = 1, \dots, N; s = 1, \dots, M; i = 1, 2.$$

Ядра інтегральних операторів  $F_{kl}^0(\tau, \zeta)$ ,  $F_{kl}^1(\tau, \zeta)$  – функції нескінченно диференційовні за  $-1 \leq \tau, \zeta < 1$ , а для інших має місце асимптотика

$$R_k^{(1)}(z) = O(z \ln|z|), \quad R_k^{(0)}(z) = O(z^2 \ln|z|), \quad z \rightarrow 0.$$

Праві частини в (12) мають вигляд

$$f_{sk}^{(1)}(\zeta) = -r_0 \frac{\partial g_s(a_k \zeta, 0)}{\partial y_k}; \quad f_{sk}^{(2)}(\zeta) = -r_0 \frac{\partial h_s(a_k \zeta, 0)}{\partial y_k}.$$

Під час виведення системи (12) також використовувались позначення

$$\kappa_0 = \kappa_2 r_0, \quad \gamma_k = \frac{a_k}{r_0}, \quad \eta = a_k \tau, \quad x_k = a_k \zeta, \quad c_k^0 = \frac{c_k}{r_0}, \quad d_k^0 = \frac{d_k}{r_0},$$

$$\alpha_{kl} = a_k - \alpha_l, \quad a_l \phi_l(\tau) = \chi_l(a_l \tau), \quad \chi_l'(a_l \tau) = \phi_l'(\tau).$$

Окрім того, внаслідок лінійності (12) невідомі функції було подано у вигляді

$$\phi_l(\tau) = a_l \sum_{s=1}^M (A_s \phi_{sl}^{(1)}(\tau) + B_s \phi_{sl}^{(2)}(\tau)), \quad \phi_l'(\eta) = \sum_{s=1}^M (A_s (\phi_{sl}^{(1)}(\tau))' + B_s (\phi_{sl}^{(2)}(\tau))') \quad (13)$$

До (12) слід додати ще рівність, яка випливає з умов змикання тріщин

$$\int_{-1}^1 (\phi_{sk}^{(i)}(\tau))' d\tau = 0. \quad (14)$$

Розв'язання інтегральних рівнянь (12), (14) ґрунтується на поданні похідних невідомих функцій у вигляді [11]

$$(\phi_{sk}^{(i)}(\tau))' = \frac{\Psi_{sk}^{(i)}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}, \quad k=1,2,\dots,N \quad (15)$$

і наближенні функцій  $\Psi_{sk}^{(i)}(\tau)$  таким інтерполяційним багаточленом:

$$\Psi_{sk}^{(i)}(\tau) = \sum_{m=1}^n (\Psi_{sk}^{(i)})_m \frac{T_n(\tau)}{(\tau-\tau_m)T_n'(\tau_m)}, \quad (16)$$

де  $T_n(\tau)$  – багаточлен Чебишева;  $\tau_m$  – його корені,  $(\Psi_{sk}^{(i)})_m = \Psi_{sk}^{(i)}(\tau_m)$ .

Як показано у [4], з формул (15), (16) для  $\phi_{sk}^{(i)}(\tau)$  випливає наближення

$$\phi_{sk}^{(i)}(\tau) = \sqrt{1-\tau^2} (L_{sk}^{(i)})_n, \quad (L_{sk}^{(i)})_n(\tau) = -\frac{2}{n} \sum_{m=1}^n (\Psi_{sk}^{(i)})_m \sum_{p=1}^{n-1} \frac{T_p(\tau_m) U_{p-1}(\tau)}{p} \quad (17)$$

Формули (15), (17) дають можливість скористатися для розв'язання рівнянь методом механічних квадратур з використанням як точки колокації коренів багаточлена Чебишева  $U_{n-1}(\zeta_j)$ :  $\zeta_j = \cos \frac{\pi j}{n}$ ,  $j=1,2,\dots,n-1$ . У разі застосування цього методу для інтегралів Коші використовується відома квадратурна формула [11], для інтегралів з регулярними ядрами відповідно до формули Гаусса-Чебишева. Інтеграл з логарифмічною особливістю обчислений за формулою, отриманою з [4]

$$\int_{-1}^1 \phi_s^k(\tau_m) \ln|\tau_m - \zeta_j| d\tau = \sum_{m=1}^n a_m \Psi_{sm}^k C_{jm}, \quad k=1,\dots,n; \quad j=1,\dots,n-1,$$

$$C_{jm} = \tau_m \left( \ln 2 - \frac{1}{2} \cos 2\sigma_j \right) - 2 \sum_{p=2}^{n-1} \frac{\cos(p\beta_m)}{p} \left( \cos(p-1)\sigma_j - \frac{\cos(p+1)\sigma_j}{p+1} \right),$$

$$\beta_m = \frac{(2m-1)\pi}{2n}; \quad \sigma_j = \frac{j\pi}{n}; \quad a_m = \frac{\pi}{n}.$$

В результаті отримано сукупність добре обумовлених систем лінійних рівнянь відносно вузлових значень  $(\Psi_{sk}^{(i)})_m$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m (\Psi_{sk}^{(i)})_m \left[ \frac{1}{\tau_m - \zeta_j} + R_{jm}^k \right] + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m (\Psi_{sk}^{(i)})_m \left[ -\gamma_k^2 \kappa_0^2 C_{jm} + D_{jm}^k \right] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \left[ \sum_{m=1}^n a_m (\Psi_{sl}^{(i)})_m F_{jm}^{kl} + \sum_{m=1}^n a_m (\Psi_{sl}^{(i)})_m E_{jm}^{kl} \right] = f_{sk}^{(i)}(\zeta_j), \quad (18)$$

$$\sum_{m=1}^n a_m (\Psi_{sk}^{(i)})_m = 0.$$

$$j=1,\dots,n-1; \quad k=1,\dots,N; \quad s=1,\dots,M, \quad i=1,2.$$

**У Ошибка! Источник ссылки не найден.**

$$R_{jm}^k = R_k^{(1)}(\tau_m - \zeta_j), F_{jm}^{kl} = F_{kl}^{(1)}(\tau_m - \zeta_j), D_{jm}^{(k)} = \sum_{r=1}^n B_{sm} R_k^0(z_r - \zeta_j), E_{jm}^{kl} = \sum_{r=1}^n B_{rm} F_{kl}^0(z_r - \zeta_j),$$

$$B_{rm} = -\frac{2}{n+1} \sin \frac{r\pi}{n+1} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{\cos(p\beta_m) \sin(p\rho_r)}{p}, \beta_m = \frac{(2n-1)\pi}{2n}, \rho_s = \frac{s\pi}{n+1}, z_s = \cos \rho_s.$$

Невідомі коефіцієнти  $A_k, B_k$  у (10) визначаються з умов (2), (3) на границях циліндра. Для реалізації (2) знаходиться напруження

$$\tau_{\bar{n}z}(r_0 \psi(\phi), \phi) = \tau_{xz}(r_0 \psi(\phi), \phi) c_x + \tau_{yz}(r_0 \psi(\phi), \phi) c_y. \tag{19}$$

У формулі (19)  $c_x, c_y$  – напрямні косинуси вектора нормалі.

Після підстановки у (19) знайдених виразів для напружень гранична умова (2) набуває вигляду

$$\sum_{s=1}^M A_s \left( \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 \phi_{sk}^{(1)}(\tau) G_k(\tau, \phi) d\tau + F_s^{(1)}(\phi) \right) + \sum_{s=1}^M B_s \left( \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 \phi_{sk}^{(2)}(\tau) G_k(\tau, \phi) d\tau + F_s^{(2)}(\phi) \right) = P(\phi) \tag{20}$$

Умова на внутрішній поверхні (3) після подання невідомих функцій у вигляді (13) запишеться так:

$$\sum_{s=1}^M A_s \left( \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 \phi_{sk}^{(1)}(\tau) U_k(\tau, \phi) d\tau + g_s(r_1 \psi_1(\phi), \phi) \right) + \sum_{s=1}^M B_s \left( \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 \phi_{sk}^{(2)}(\tau) U_k(\tau, \phi) d\tau + h_s(r_1 \psi_1(\phi), \phi) \right) = 0. \tag{21}$$

Наближення (17) дає можливість замінити інтеграли в (20), (21) інтегральними сумами з використанням квадратурної формулою Гаусса-Чебишева, після чого, застосувавши метод колокації у вузлах  $\sigma_r = \frac{2\pi r}{M}, r = 1, \dots, M$ , з (20), (21) отримано систему  $2M$  лінійних рівнянь для визначення  $A_s$  та  $B_s$ .

Величинами, що встановлюють можливість розвитку тріщини, є коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) у вершинах  $x_l = \pm a_l$ , які у даному випадку визначаються за формулами

$$K_l^{\pm} = \sqrt{a_l} \lim_{\zeta \rightarrow \pm 1 \pm 0} \sqrt{\zeta^2 - 1} \tau_{yz}(a_l \tau, 0).$$

Після розв’язання (18) та системи, отриманої після задовольняння умов на границях, для них знайдено безрозмірні значення

$$k_l^{\pm} = \frac{K_l^{\pm}}{G\sqrt{a_l}} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} \left( \sum_{s=1}^M A_s \sum_{m=1}^n (-1)^m \psi_{sm}^{(1l)} \left( \operatorname{ctg} \frac{\gamma_m}{2} \right)^{\pm 1} + \sum_{s=1}^M B_s \sum_{m=1}^n (-1)^m \psi_{sm}^{(2l)} \left( \operatorname{ctg} \frac{\gamma_m}{2} \right)^{\pm 1} \right),$$

де  $\gamma_m = \frac{\pi(2m-1)}{2n}$ .

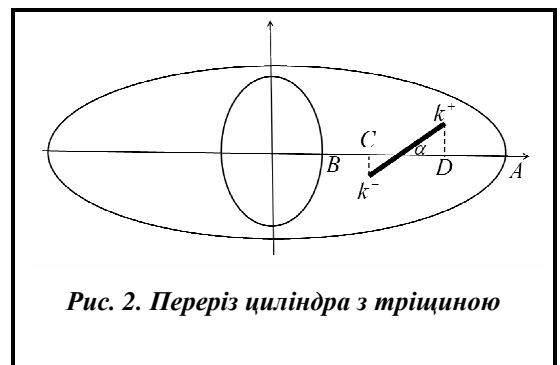
**Результати числових досліджень**

Як приклад розглядався циліндр з перерізом, обмеженим двома еліпсами (рис. 2).

Вважалося, що зовнішня межа знаходиться під навантаженням  $P(\phi) = \sin 2\phi$ , ексцентриситети внутрішнього і зовнішнього еліпсів однакові і дорівнюють 0,5, відношення півосей еліпсів  $r_1/r_0 = 0,5$ .

Спершу досліджувалась залежність абсолютних значень КІН від безрозмірного хвильового числа  $\kappa_0 = \kappa_2 r_0$

для різних кутів нахилу тріщини стосовно поверхонь тіла. Рис. 3 відповідає випадку нахиленої тріщини з фіксованою довжиною, яка дорівнює одній третій відстані між вершинами еліпсів  $AB$ , та з центром тріщини на рівній відстані від меж перерізу. Криві 1–5 ілюструють поведінку КІН для кутів



**Рис. 2. Переріз циліндра з тріщиною**

$0^{\circ}, 30^{\circ}, 45^{\circ}, 60^{\circ}, 90^{\circ}$  відповідно. Як показав аналіз розрахунків, поведінка КІН ідентична для обох вершин тріщини, але  $|k^{-}| < |k^{+}|$ . З огляду на це результати числових досліджень поведінки абсолютних значень КІН у частотній області, зокрема їхнього виходу на резонансний режим, наведено для  $|k^{+}|$  (рис. 3).

До досягнення першої частоти резонансу за збільшення кута нахилу тріщини КІН зменшуються. Кут нахилу також суттєво впливає на кількість та значення резонансних частот. Так, для кутів нахилу  $\alpha = 0^{\circ}$  та  $\alpha = 90^{\circ}$  відсутній резонанс при  $\kappa_0 \approx 2,6$ , який спостерігається для інших значень кута нахилу. Однак всі розглянуті випадки характеризуються резонансною поведінкою КІН, коли  $\kappa_0 \approx 3,8$ .

На рис. 4 проілюстровано залежність поведінки КІН від частоти під час зростання відносної довжини тріщини при наближенні вершини до меж циліндра. Рис. 4, а відповідає тріщині вздовж осі абсцис ( $\alpha = 0^{\circ}$ ) зі змінною довжиною, так що лівий кінець тріщини  $C$  зафіксовувався, а правий  $D$  наближався до зовнішньої межі перерізу. Це досягалось зміною параметра  $\gamma = a/r_0$  від 0,094 до 0,189, коли тріщина виходить на зовнішню поверхню. Криві 1, 2, 3 відповідають значенням  $\gamma = 0,094; 0,141; 0,188$ .

З'ясувалось, що така параметризація майже не впливає на абсолютні значення КІН  $|k^{-}|$  у віддаленій від зовнішнього контуру вершині тріщини  $C$ . У розглянутому випадку КІН  $|k^{+}|$  за зростання відносної довжини тріщини і за наближення її вершини до зовнішньої межі циліндричного тіла збільшуються. Резонансні явища спостерігаються у частотному діапазоні  $3 < \kappa_0 < 4$  (рис. 4, а).

На рис. 4, б наведено графіки поведінки КІН для цієї ж тріщини у випадку, коли правий кінець зафіксовувався, а лівий наближався до внутрішньої поверхні за тих же значень  $\gamma$ . З'ясувалось, що така параметризація впливає на поведінку  $|k^{-}|$ , в той час як для  $|k^{+}|$  значення майже незмінні.

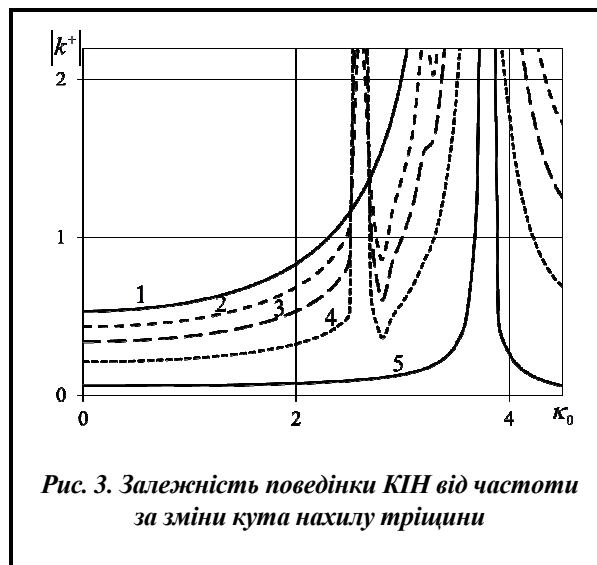


Рис. 3. Залежність поведінки КІН від частоти за зміни кута нахилу тріщини

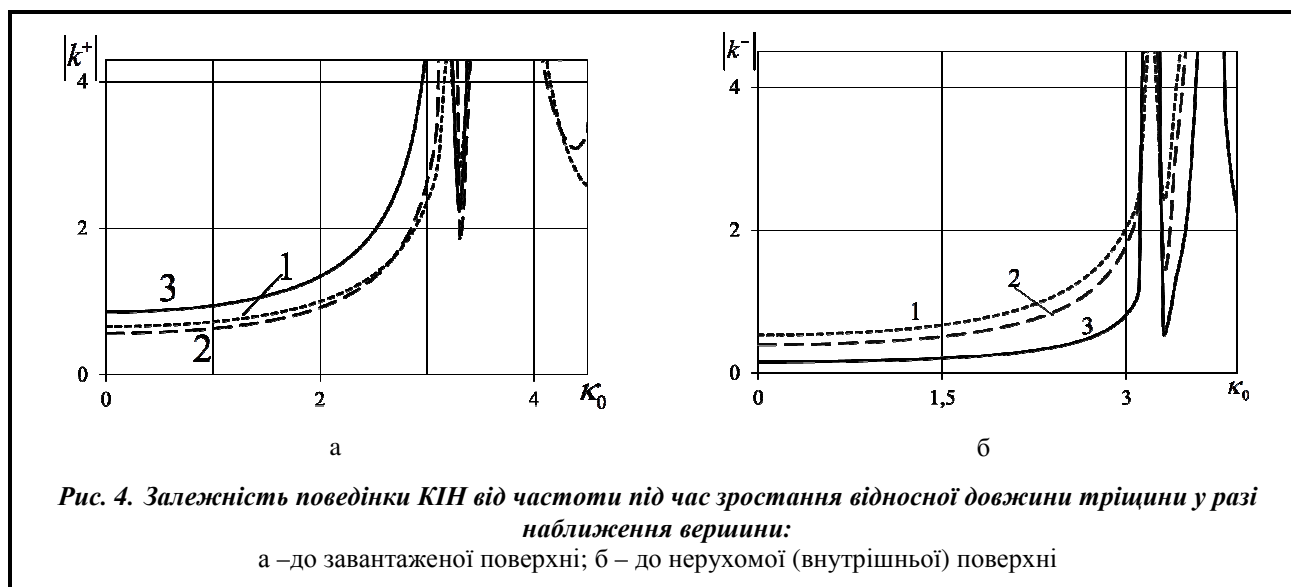


Рис. 4. Залежність поведінки КІН від частоти під час зростання відносної довжини тріщини у разі наближення вершини:

а – до навантаженої поверхні; б – до нерухомої (внутрішньої) поверхні

За зростання довжини тріщини та її наближення до внутрішньої межі циліндричного тіла, на відміну аналогічних результатів для кінця тріщини, що наближається до зовнішньої межі (рис. 4, а), абсолютні значення КІН зменшуються. Резонансні явища спостерігаються, як і в попередньому випадку, у частотному діапазоні  $3 < \kappa_0 < 4$  (рис. 4, б).

### Висновки

Запропоновано ефективний аналітично-числовий метод визначення динамічних напружень у порожнистому циліндричному тілі довільного перерізу з наскрізними тріщинами за антиплоскої деформації, що дозволяє розв'язувати окремо інтегральні рівняння на дефекті та задовольняти умови на межі тіла, забезпечуючи цим полегшення числової реалізації.

Метод може бути узагальнений на випадок стану плоскої деформації. Це підтверджують результати робіт [12], [13], де подібні задачі розв'язано для циліндричного тіла, перерізом якого є одностов'язна область. Певні труднощі під час застосування цього методу виникають при наближенні дефекту до межі і негладкої межі циліндра. Але взагалі запропонований метод дозволяє наближено обчислювати коефіцієнти інтенсивності напружень та досліджувати вплив на їхні значення геометричних параметрів тріщини і циліндра в досить широкому частотному діапазоні.

Показано, що присутність тріщин у пружному порожнистому циліндрі за гармонічного навантаження супроводжується як інтенсивністю динамічних напружень в околі дефектів, так і резонансним характером їхньої зміни внаслідок генерації хвильового процесу в обмеженій області.

У розглянутому частотному діапазоні виявлено можливості досягнення одного або двох резонансів залежно від кута нахилу тріщини стосовно межі тіла. Зміна кута нахилу, як і наближення тріщини до зовнішньої поверхні, суттєво впливають на значення КІН та стрімкість їхнього виходу на резонансний режим з низькочастотної області.

### Література

1. Попов В. Г. Сравнительный анализ дифракционных полей при прохождении упругих волн через дефекты различной природы. *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 1995. № 4. С. 99–109.
2. Ang D. D., Knopoff L. Diffraction of scalar elastic waves by a finite strip. *Proc. Math. Sci. USA*. 1964. Vol. 51. No. 4. P. 593–598. <https://doi.org/10.1073/pnas.51.4.593>
3. Mykhas'kiv V., Zhabdynskyi I., Zhang Ch. Elastodynamic analysis of multiple crack problem in 3-D bi-materials by a BEM. *Int. J. Num. Meth. Biomed. Eng.* 2010. Vol. 26. No. 12. P. 1934–1946. <https://doi.org/10.1002/cnm.1285>
4. Попов В. Г. Взаимодействие плоских упругих волн с системами радиальных дефектов. *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 1999. № 4. С. 118–129.
5. Chirino F., Domingues J. Dynamic analysis of cracks using boundary element method. *Eng. Fracture Mech.* 1989. Vol. 34. No. 5–6. P. 1051–1061. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(89\)90266-X](https://doi.org/10.1016/0013-7944(89)90266-X)
6. Бобылев А. А., Доброва Ю. А. Применение метода граничных элементов к расчету вынужденных колебаний упругих тел конечных размеров с трещинами. *Вестн. Харьк. нац. ун-та*. 2003. № 590. Вып. 1. С. 49–54.
7. Zhang Ch. A 2D hypersingular time-domain traction BEM for transient elastodynamic crack analysis. *Wave Motion*. 2002. Vol. 35. No. 1. P. 17–40. [https://doi.org/10.1016/S0165-2125\(01\)00081-6](https://doi.org/10.1016/S0165-2125(01)00081-6)
8. Поручиков В. Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
9. Попов В. Г. Сравнение полей перемещений и напряжений при дифракции упругих волн сдвига на различных дефектах: трещина и тонкое жесткое включение. *Динам. системы*. 1993. Вып. 12. С. 35–41.
10. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М.: ОГИЗ, 1948. 296 с.
11. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985. 253 с.
12. Кирилова О. І., Михаськів В. В. Плоска динамічна задача для циліндричного тіла довільного перерізу з тонким жорстким включенням. *Вісн. Київ. нац. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки*. 2015. № 5. С. 167–173.
13. Кирилова О. І., Попов В. Г. Напружений стан у нескінченному циліндрі довільного перерізу з тунельною тріщиною при коливаннях в умовах плоскої деформації. *Вісн. Київ. нац. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки*. 2017. № 3. С. 71–74.

Надійшла до редакції 11.09.2018