УДК 539.375

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЧАСТИЧНОГО ЗАКРЫТИЯ СИСТЕМЫ ЩЕЛЕЙ В ПЕРФОРИРОВАННОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ СТРИНГЕРАМИ

М. В. Мир-Салим-заде, канд. физ.-мат. наук
minavar.mirsalimzade@imm.az

Институт математики и механики НАН Азербайджана,
Азербайджан, AZ1141, г. Баку,
ул. Ф. Агаева, 9

На основе методов теории упругости проведено математическое описание модели частичного закрытия системы щелей в перфорированной изотропной среде с инородными поперечными включениями. Такую среду можно рассматривать как перфорированную неограниченную пластину, усиленную системой стрингеров весьма узкого поперечного сечения. Считается, что среда ослаблена периодической системой круговых отверстий и прямолинейных щелей переменной ширины. Переменная ширина щелей сравнима с упругими деформациями. В работе применены метод решения периодической упругой задачи и метод построения в явной форме комплексных потенциалов, соответствующих неизвестным нормальным смещениям вдоль прямолинейных щелей. Строятся общие представления решений, описывающие класс задач с периодическим распределением напряжений вне круговых отверстий и щелей с контактными зонами. Для определения неизвестных контактных напряжений и размеров зон контакта получено сингулярное интегральное уравнение, которое сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений. Система алгебраических уравнений решается методом последовательных приближений. В результате найдены контактные напряжения и размеры зон контакта.

***Ключевые слова**: перфорированная пластина, стрингеры, прямолинейные щели переменной ширины, контактные напряжения, контактные зоны.*

Введение

Проблема закрытия имеющейся в среде трещины представляет большой интерес в теории разрушения. Известно [1–3], что подкрепляющие ребра жесткости помогают затормозить рост трещины и даже добиться ее закрытия. Уменьшая деформацию в направлении, перпендикулярном трещине, подкрепляющие ребра жесткости снижают коэффициент интенсивности напряжений в окрестности конца трещины. В результате возможно появление зоны сжимающих напряжений, достаточных, чтобы берега трещины вошли в контакт. Вопросам деформирования неограниченных пластин, усиленных регулярной системой ребер, поперечные сечения которых представляют собой весьма узкие прямоугольники, посвящена обширная литература [4–9]. Значительное внимание уделялось исследованию разрушения пластины, усиленной регулярной системой стрингеров [10–15]. В отмеченных работах рассматривалась трещина (модель) Гриффитса, т. е. трещина с невзаимодействующими кромками, при этом установлено, что коэффициенты интенсивности напряжений при совместном действии растягивающего напряжения и подкрепляющих элементов могут иметь отрицательное значение. Это означает возникновение в окрестности вершин трещин зон сжимающих напряжений, в которых берега трещины на некотором участке входят в контакт, что приводит к появлению контактных напряжений.

Вопросы частичного контактирования берегов щели в подкрепленной пластине к настоящему времени мало изучены. Контакт берегов трещин с учетом переменности ширины рассматривался в работах [16–25]. Основная задача настоящей работы состоит в построении математической модели частичного закрытия щелей переменной ширины в перфорированной изотропной пластине, подкрепленной ребрами жесткости.

Постановка задачи

Рассмотрим упругую изотропную среду с системой инородных поперечных прямолинейных включений и круговых отверстий. Такую среду можно рассматривать как перфорированную неограниченную пластину, усиленную системой стрингеров весьма узкого поперечного сечения.

Считается, что стрингеры приклепаны к пластине в дискретных точках с постоянным шагом по всей длине стрингера, симметрично относительно поверхности пластины (рис. 1). Материал ребер жесткости принят упругим. На бесконечности усиленная пластина подвержена однородному растяжению вдоль стрингеров напряжением $\sigma_y^\infty = \sigma_0$. Контуры круговых отверстий свободны от внешних усилий. Из контуров отверстий исходят симметричные прямолинейные щели переменной ширины. Принято, что ширина щелей сравнима с упругими деформациями.

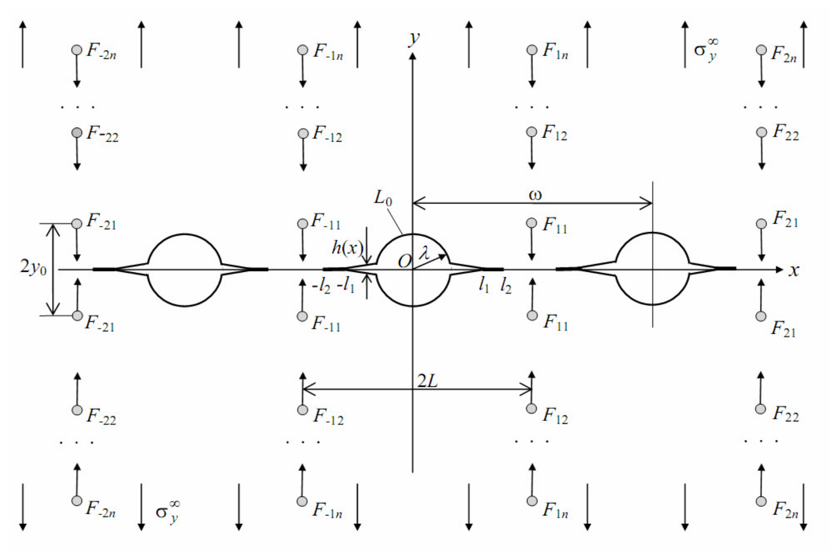


Рис. 1. Расчетная схема задачи

Относительно стрингеров принимается гипотеза об одномерном континууме, т. е. толщина стрингера при деформации считается неизменяемой, а напряженное состояние – одноосным. Стрингеры изгибу не подвергаются и работают только на растяжение. Принимаются следующие допущения: а) в среде (пластине) реализуется плоское напряженное состояние; б) подкрепляющая система стрингеров ферменного типа и ослабление стрингеров за счет постановки точек крепления не учитывается; в) пластина и стрингеры взаимодействуют друг с другом в одной плоскости и только в точках крепления; г) все точки крепления одинаковы и имеют радиус a_0 (площадку сцепления), малый по сравнению с их шагом и другими характерными размерами. Действие точек крепления заменяется действием эквивалентных неизвестных сосредоточенных сил, приложенных в точках, соответствующих центрам точек крепления.

Пусть имеется усиленная изотропная среда с периодической системой круговых отверстий с радиусом λ (λ <1) и центрами в точках

$$P_m = m\omega \quad (m = \pm 1, \pm 2, \ldots), \quad \omega = 2.$$

Под действием внешней растягивающей нагрузки σ_0 и неизвестных сосредоточенных сил F_{mn} ($m, n = \pm 1, \pm 2, \ldots$) берега щелей в области сжимающих напряжений на некоторых участках войдут в контакт, где возникнут контактные напряжения. Вне этих участков берега щелей будут свободны от нагрузок. Область контакта между берегами щелей заранее неизвестна, но очевидно, что всегда будет начинаться с концевых точек щелей, находящихся в области сжимающих напряжений. Считается, что неизвестный размер участков контакта сравним с длиной щелей. Таким образом, поставленная задача является задачей теории упругости с неизвестной границей, которую требуется определить в ходе решения.

Рассматриваемая задача состоит в разработке математической модели, позволяющей определить участки контакта, контактные напряжения на участках контакта, величины сосредоточенных сил, напряженно-деформированное состояние среды вне круговых отверстий и щелей.

Граничные условия на берегах щелей имеют вид

$$\sigma_y = 0, \ \ \tau_{xy} = 0 \ \text{ на } L', \ \ \sigma_y = p(x), \ \ \tau_{xy} = 0, \quad \upsilon^+(x,0) - \upsilon^-(x,0) = -h(x) \ \text{ на } L'', \qquad (1)$$

на контурах круговых отверстий

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = 0 \, .$$

Здесь L' – совокупность зон щелей, свободных от нагрузок; L'' – совокупность концевых зон контакта; $\upsilon^+(x,0)-\upsilon^-(x,0)$ – раскрытие берегов щели; $h(x)$ – ширина щелей; σ_x, σ_y, τ_{xy} – компоненты тензора напряжений; u, υ – составляющие вектора смещения по осям x, y соответственно; $i^2=-1$.

В силу симметрии граничных условий и геометрии области D, занятой средой, напряжения являются периодическими функциями с основным периодом ω. На основании формул Колосова – Мусхелишвили [26] и граничных условий на контурах круговых отверстий и берегах щелей задача сводится к определению двух аналитических в области D функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ из условий

$$\Phi(\tau)+\overline{\Phi(\tau)}-\left[\bar{\tau}\Phi'(\tau)+\Psi(\tau)\right]e^{2i\theta}=0\,,\qquad \Phi(x)+\overline{\Phi(x)}+x\overline{\Phi'(x)}+\overline{\Psi(x)}=f\,, \tag{2}$$

где $\tau=\lambda e^{i\theta}+m\omega$ $(m=\pm1,\ \pm2,\ldots)$; x – аффикс точек берегов щели; $f=0$ на L' и $f=p(x)$ на L''.

Решение краевой задачи

Решение краевой задачи (1)–2) ищем в виде

$$\Phi(z)=\Phi_0(z)+\Phi_1(z)+\Phi_2(z),\qquad \Psi(z)=\Psi_0(z)+\Psi_1(z)+\Psi_2(z). \tag{3}$$

Здесь комплексные потенциалы $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ определяют поле напряжений и деформаций в сплошной подкрепленной пластине под действием растягивающего напряжения σ_0 и сосредоточенных сил F_{mn} и определяются следующими формулами:

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{4}\sigma_0-\frac{i}{2\pi h_*(1+\kappa)}\sum_{m,n}{}' F_{mn}\left(\frac{1}{C_1}-\frac{1}{C_2}\right), \tag{4}$$

$$\Psi_0(z)=\frac{1}{2}\sigma_0-\frac{i\kappa}{2\pi h_*(1+\kappa)}\sum_{m,n}{}' F_{mn}\left(\frac{1}{C_1}-\frac{1}{C_2}\right)+\frac{i}{2\pi h_*(1+\kappa)}\sum_{m,n}{}' F_{mn}\left(\frac{\overline{C}_3}{C_2^2}-\frac{C_3}{C_1^2}\right).$$

где h_* – толщина пластины; $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$; ν – коэффициент Пуассона материала пластины; $C_1=z-mL+iny_0$; $C_2=z-mL-iny_0$; $C_3=mL+iny_0$. Штрих у суммы указывает на то, что при суммировании исключается индекс m=n=0.

Функции $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$, соответствующие неизвестным нормальным смещениям вдоль щели, ищем в явной форме

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{2\omega}\int_{L_1} g(t)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{\omega}(t-z)dt\,, \tag{5}$$

$$\Psi_1(z)=-\frac{\pi z}{2\omega^2}\int_{L_1} g(t)\sin^{-2}\frac{\pi}{\omega}(t-z)dt\,,\qquad L_1=[-l_2,-\lambda]+[\lambda,l_2].$$

Искомая функция $g(x)$ описывает производную раскрытия берегов щели

$$g(x)=\frac{2\mu}{1+\kappa}\frac{\partial}{\partial x}\left[\upsilon^+(x,0)-\upsilon^-(x,0)\right],$$

где μ – модуль сдвига материала подкрепленной пластины.

Для нахождения комплексных потенциалов $\Phi_2(z)$ и $\Psi_2(z)$ представим первое из граничных условий (2)

$$\Phi_2(\tau)+\overline{\Phi_2(\tau)}-\left[\bar{\tau}\Phi_2'(\tau)+\Psi_2(\tau)\right]e^{2i\theta}=f_1(\theta)+if_2(\theta)+\varphi_1(\theta)+i\varphi_2(\theta)\,, \tag{6}$$

где $f_1(\theta)+if_2(\theta)=-\Phi_0(\tau)-\overline{\Phi_0(\tau)}+\left[\bar{\tau}\Phi_0'(\tau)+\Psi_0(\tau)\right]e^{2i\theta}$, $\varphi_1(\theta)+i\varphi_2(\theta)=-\Phi_1(\tau)-\overline{\Phi_1(\tau)}+\left[\bar{\tau}\Phi_1'(\tau)+\Psi_1(\tau)\right]e^{2i\theta}$.

Для решения краевой задачи (6) комплексные потенциалы $\Phi_2(z)$ и $\Psi_2(z)$ ищем в виде

$$\Phi_2(z)=\alpha_0+\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k+2}\frac{\lambda^{2k+2}\rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}, \tag{7}$$

$$\Psi_2(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{2k+2}\frac{\lambda^{2k+2}\rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}-\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k+2}\frac{\lambda^{2k+2}S^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!}.$$

Здесь $\rho(z)=\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2\sin^{-2}\left(\frac{\pi}{\omega}z\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2$, $\quad S(z)=\sum_{m,n}{}'\left[\frac{P_m}{(z-P_m)^2}-\frac{2z}{P_m^2}-\frac{1}{P_m}\right]$.

Из условий симметрии относительно координатных осей находим, что

$$\operatorname{Im}\alpha_{2k+2}=0,\qquad \operatorname{Im}\beta_{2k+2}=0\qquad k=0,1,2,\ldots .$$

Соотношения (3)–(5), (7) определяют класс симметричных задач с периодическим распределением напряжений. Из условия постоянства главного вектора всех сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в области D, следует

$$\alpha_0=\frac{\pi^2}{24}\beta_2\lambda^2 .$$

Неизвестные коэффициенты α_{2k}, β_{2k} должны быть определены из краевого условия (6). Относительно функций $f_1(\theta)+if_2(\theta)$ и $\varphi_1(\theta)+i\varphi_2(\theta)$ будем считать, что они разлагаются на контуре $|\tau|=\lambda$ в ряды Фурье, имеющие в силу симметрии задачи вид

$$f_1(\theta)+if_2(\theta)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_{2k}e^{2ik\theta}\ ,\qquad \operatorname{Im}A_{2k}=0, \tag{8}$$

$$A_{2k}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[f_1(\theta)+if_2(\theta)\right]e^{-2ik\theta}d\theta\qquad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots),$$

$$\varphi_1(\theta)+i\varphi_2(\theta)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}B_{2k}e^{2ik\theta}\ ,\qquad \operatorname{Im}B_{2k}=0, \tag{9}$$

$$B_{2k}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\varphi_1(\theta)+i\varphi_2(\theta)\right]e^{-2ik\theta}d\theta\qquad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

Неизвестная функция $g(x)$ и коэффициенты α_{2k}, β_{2k} функций $\Phi_2(z)$, $\Psi_2(z)$ должны быть определены из краевых условий (2) и (6). В силу периодичности задачи граничные условия (6) вырождаются в одно функциональное уравнение, например, на контуре $\tau=\lambda e^{i\theta}$, а система условий (2) – в граничное условие в основном периоде. Для составления уравнений относительно коэффициентов α_{2k}, β_{2k} функции $\Phi_2(z)$, $\Psi_2(z)$ разлагаем в ряды Лорана в окрестности точки $z=0$. Подставим на контуре $z=\lambda\exp(i\theta)$ в левую часть граничного условия (6) вместо функций $\Phi_2(z)$, $\Psi_2(z)$ их разложения в ряды Лорана в окрестности нулевой точки, а в правую часть вместо функций $f_1(\theta)+if_2(\theta)$ и $\varphi_1(\theta)+i\varphi_2(\theta)$ –соответственно ряды Фурье (8) и (9). Сравнив коэффициенты при одинаковых степенях $\exp(i\theta)$, получим две бесконечные системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов α_{2k}, β_{2k}. После некоторых преобразований приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно α_{2k+2}

$$\alpha_{2j+2}=\sum_{k=0}^{\infty}A_{j,k}\alpha_{2k+2}+b_j\qquad (j=0,1,2,\ldots), \tag{10}$$

$$b_0=M_2-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g_{k+2}\lambda^{2k+4}}{2^{2k+4}}M_{-2k-2}\ ,$$

$$b_j=M_{2j+2}-\frac{(2j+1)M_0g_{j+1}\lambda^{2j+2}}{K_1 2^{2j+2}}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2j+2k+3)g_{j+k+2}\lambda^{2j+2k+4}}{(2j)!(2k+3)!2^{2j+2k+4}}M_{-2k-2}\ ,$$

$$A_{j,k}=(2j+1)\gamma_{j,k}\lambda^{2j+2k+2}\ ,\qquad g_j=2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2j}}\ ,$$

$$\gamma_{0,0}=\frac{3}{8}g_2\lambda^2+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(2i+1)g_{i+1}^2\lambda^{4i+2}}{2^{4i+4}}\ ,$$

$$\gamma_{j,k}=-\frac{(2j+2k+2)!\,g_{k+j+1}}{(2j+1)!(2k+1)!2^{2j+2k+2}}+\frac{(2j+2k+4)!\,g_{j+k+2}\lambda^2}{(2j+2)!(2k+2)!2^{2j+2k+4}}+$$

$$+\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(2j+2i+1)!(2k+2i+1)!\,g_{j+i+1}g_{k+i+1}\lambda^{4i+2}}{(2j+1)!(2k+1)!(2i+1)!(2i)!2^{2j+2k+4i+4}}+b_{j,k}\,,$$

$$b_{0,k}=0\,,\qquad b_{j,0}=0\,,\qquad b_{j,k}=\frac{g_{j+1}g_{k+1}\lambda^2}{2^{2j+2k+4}}\left(1-\frac{\pi^2\lambda^2}{12}\right)^{-1}\quad (j,\,k=1,\,2,\ldots),$$

$$M_{2k}=A_{2k}+B_{2k}\,.$$

Постоянные β_{2k+2} определяются из следующих соотношений:

$$\beta_2=\left[1-\frac{\pi^2\lambda^2}{12}\right]^{-1}\left[-M_0+2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g_{k+1}\lambda^{2k+2}}{2^{2k+2}}\alpha_{2k+2}\right], \tag{11}$$

$$\beta_{2j+4}=(2j+3)\alpha_{2j+2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2j+2k+3)!\,g_{j+k+2}\lambda^{2j+2k+4}}{(2j+2)!(2k+1)!2^{2j+2k+4}}\alpha_{2k+2}-M_{-2j-2}\,.$$

Требуя, чтобы функции (3) удовлетворяли краевому условию (1), получаем после некоторых преобразований сингулярное интегральное уравнение относительно функции $g(x)$

$$\frac{1}{\omega}\int_{L_1}g(t)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{\omega}(t-x)dt+H(x)=f(x)\,. \tag{12}$$

Здесь $H(x)=\Phi_0(x)+\Phi_2(x)+\overline{\Phi_0(x)}+\overline{\Phi_2(x)}+x\Phi_0'(x)+x\Phi_2'(x)+\Psi_0(x)+\Psi_2(x)$.

Сингулярное интегральное уравнение (12), а также алгебраические системы (10), (11) содержат неизвестные величины сосредоточенных сил F_{mn} (m = 1,2,…; n = 1,2,…). Для их определения используем закон Гука и метод склеивания двух асимптотик искомого решения. Согласно закону Гука величина сосредоточенной силы F_{mn}, действующей на каждую точку крепления со стороны стрингера

$$F_{mn}=\frac{E_S A_S}{2y_0 n}\Delta\upsilon_{m,n}\qquad (m=1,2,\ldots;\ n=1,2,\ldots),$$

где E_S – модуль Юнга материала стрингеров; A_S – площадь поперечного сечения стрингера; $2y_0n$ – расстояние между точками крепления; $\Delta\upsilon_{m,n}$ – взаимное смещение рассматриваемых точек крепления, равное удлинению соответствующего участка стрингера.

Будем полагать, что взаимное упругое смещение точек $z = mL + i(ny_0 - a_0)$ и $z = mL - i(ny_0 - a_0)$ равно взаимному смещению точек крепления $\Delta\upsilon_{m,n}$. Это дополнительное условие совместности перемещений позволяет эффективно отыскать решение поставленной задачи. С помощью комплексных потенциалов (3)–(5), (7) и формулы Колосова – Мусхелишвили для перемещений [26], после выполнения элементарных выкладок, взаимное смещение $\Delta\upsilon_{m,n}$ находим в следующем виде:

$$\Delta\upsilon_{p,r}=\Delta\upsilon_{p,r}^{(0)}+\Delta\upsilon_{p,r}^{(1)}+\Delta\upsilon_{p,r}^{(2)}\,. \tag{13}$$

Ввиду некоторой громоздкости величины $\Delta\upsilon_{p,r}^{(0)}$, $\Delta\upsilon_{p,r}^{(1)}$ и $\Delta\upsilon_{p,r}^{(2)}$ не приводятся.

Искомая величина силы F_{mn} определяется с помощью формул (13) из бесконечной системы

$$F_{pr}=\frac{E_S A_S}{2y_0 n}\Delta\upsilon_{p,r}\qquad (p=1,2,\ldots;\ r=1,2,\ldots), \tag{14}$$

вырождающейся из-за периодичности задачи в одну бесконечную алгебраическую систему.

Полученное уравнение (14), алгебраические системы (10), (11) и сингулярное интегральное уравнение (12) связаны и должны решаться совместно. Решая их совместно с условием отсутствия раскрытия берегов щелей в концевой зоне контакта и учитывая условие ограниченности контактных напряжений, найдем искомую функцию $p(x)$, величины F_{mn} и зону контакта берегов щелей.

Численное решение и его анализ

Используя разложение $\frac{\pi}{\omega}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{\omega}z=\frac{1}{z}-\sum_{j=0}^{\infty}g_{j+1}\frac{z^{2j+1}}{\omega^{2j+2}}$, уравнение (12) приведем к обычной форме

$$\frac{1}{\pi}\int_{L_1}\frac{g(t)}{t-x}dt+\frac{1}{\pi}\int_{L_1}g(t)K(t-x)dt+H(x)=f(x),\quad K(t)=-\sum_{j=0}^{\infty}g_{j+1}\frac{t^{2j+1}}{\omega^{2j+2}}. \tag{15}$$

Учитывая, что $g(x)=-g(-x)$ и делая замену переменных, уравнение (15) приводим к стандартному виду

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g_*(\tau)}{\tau-\eta}d\tau+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}g_*(\tau)B(\eta,\tau)\,d\tau+H_*(\eta)=f_*(\eta), \tag{16}$$

$$g_*(\tau)=g(\xi),\qquad H_*(\eta)=H(\xi_0),\qquad f_*(\eta)=f(\xi_0),$$

$$B(\eta,\tau)=-\frac{1-\lambda_1^2}{2}\sum_{j=0}^{\infty}g_{j+1}\left(\frac{l_2}{2}\right)^{2j+2}\cdot u_0^j A_j^*,$$

$$A_j^*=(2j+1)+\frac{(2j+1)(2j)(2j-1)}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{u}{u_0}\right)+\ldots+\frac{(2j+1)(2j)(2j-1)\ldots[(2j+1)-(2j+1-1)]}{1\cdot2\cdot3\ldots(2j+1)}\left(\frac{u}{u_0}\right)^j.$$

Для построения решения сингулярного интегрального уравнения (16) используется метод прямого решения таких уравнений [27, 28]. Сингулярное интегральное уравнение (16), кроме особенности в ядре Коши, имеет неподвижную особенность в точке выхода щели на поверхность кругового отверстия. Функция $g(x)$ имеет в таких точках $x=\pm\lambda$ особенность, отличающуюся от корневой. Характер этой особенности можно установить из анализа интегрального уравнения (16) [29]. Интеграл $\int_{\lambda}^{l}g(t)dt$, в отличие от случая внутренней щели, равен постоянной, отличной от нуля, которая выражается через раскрытие щели на поверхности кругового отверстия и должна быть определена после решения сингулярного интегрального уравнения (16).

Из-за громоздкости выражений для функций, входящих в сингулярное интегральное уравнение, установление истинной особенности функции $g_*(\eta)$ на конце затруднительно (16). Поэтому для его численного решения используется упрощенный численный метод [27, 28, 30]. Представим решение в виде

$$g_*(\eta)=g_0(\eta)\sqrt{1-\eta^2},$$

где $g_0(\eta)$ – неизвестная регулярная функция.

С помощью квадратурных формул уравнение (16) можно свести к системе $M+1$ алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^{M}\frac{g_0(\tau_m)}{M+1}\sin^2\frac{\pi m}{M+1}\left[\frac{1}{\tau_m-\eta_r}+B(\tau_m,\eta_r)\right]=\pi\left[f_*(\eta_r)-H_*(\eta_r)\right]. \tag{17}$$

Здесь $\tau_m=\cos\frac{\pi m}{M+1}$ ($m=1,2,\ldots,M$), $\eta_r=\cos\frac{2r-1}{2(M+1)}\pi$ ($r=1,2,\ldots,M+1$).

Полученная алгебраическая система (17) обеспечивает удовлетворение дополнительного условия, при котором существует решение в классе всюду ограниченных функций [29]. В правые части системы (17) входят неизвестные значения контактных напряжений $f_*(\eta_m)$ в узловых точках, принадлежащих концевой зоне контакта.

Условием, определяющим неизвестные контактные напряжения, возникающие на берегах щелей в концевых зонах контакта, является отсутствие раскрытия щелей в этих зонах (второе условие на L''). В рассматриваемой задаче это дополнительное условие удобнее записать для производной раскрытия перемещений берегов щели

$$g(x) = \frac{2\mu}{1+\kappa}\frac{\partial}{\partial x}\left[\upsilon^{+}(x,0) - \upsilon^{-}(x,0)\right] = -\frac{2\mu}{1+\kappa}h'(x)\,, \qquad (18)$$

где x – аффикс точек берегов концевой контактной зоны щели (l_1,l_2).

Требуя выполнения условий (18) в узловых точках, содержащихся в концевой зоне контакта (l_1, l_2), получим недостающие уравнения для определения приближенных значений контактных напряжений $p(t_{m_1})$ в узловых точках

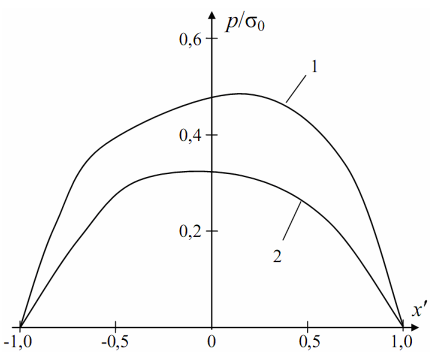
$$g(t_{m_1}) = -\frac{2\mu}{1+\kappa}h'(t_{m_1}) \qquad m_1 = 1, 2, \ldots, M_1. \qquad (19)$$

Из-за неизвестного размера концевой контактной зоны объединенная алгебраическая система, состоящая из (10), (11), (14), (17), (19), является нелинейной. Полученные системы уравнений относительно α_{2k}, β_{2k}, g_k^0, F_{mn}, $p(t_{m_1})$ и l_2 позволяют при заданной внешней растягивающей нагрузке найти напряженно-деформированное состояние перфорированной стрингерной пластины при наличии щелей с частично контактирующими берегами, контактные напряжения, а также размер концевой зоны контакта. Алгебраические системы (10), (11), (14), (17), (19) решались методом последовательных приближений следующим образом. Решалась система из уравнений (10), (11), (14), (19) и M уравнений системы (17) относительно неизвестных α_{2k}, β_{2k}, g_1^0, $g_2^0,\ldots,$ g_M^0, $p_1, p_2,\ldots,$ p_{M_1} и $N_1{\times}N_2$ неизвестных сосредоточенных сил при некотором значении l_{2*}. Далее найденные величины и значения l_{2*} подставлялись в неиспользованное уравнение объединенной системы, т. е. в $M + 1$ уравнение системы (17). Поскольку этому уравнению выбранное значение параметра l_{2*} и соответствующие ему значения α_{2k}, β_{2k}, g_1^0, $g_2^0,\ldots,$ g_M^0, $p_1, p_2,\ldots,$ p_{M_1} и сосредоточенных сил, вообще говоря, удовлетворять не будут, то, подбирая новые значения параметра l_{2*}, вычисления повторяются до тех пор, пока это уравнение не будет удовлетворено с заданной точностью.

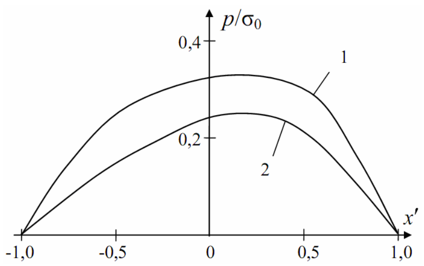
Были проведены расчеты в зависимости от геометрических параметров задачи при $\nu = 0{,}3$; $\varepsilon_1 = a_0/L = 0{,}01$; $\varepsilon = y_0/L = 0{,}25$; $E = 7{,}1\cdot10^4$ МПа (сплав В95); $E_S = 11{,}5\cdot10^4$ МПа (композит Al-сталь), $A_S/y_0h = 1$. Число стрингеров и точек крепления принималось конечным: 6, 10, 14. Проведен параметрический анализ зависимости контактных напряжений $p(x)$ от размера щелей и других геометрических параметров задачи. Результаты расчетов контактных напряжений p/σ_0 для разных значений длин щелей вдоль концевой зоны представлены на рис. 2. Кривая 1 соответствует значению радиуса отверстий $\lambda = 0{,}3$; кривая 2 – $\lambda = 0{,}5$. При расчетах были использованы безразмерные координаты x'

$$x = \frac{l_2 + l_1}{2} + \frac{l_2 - l_1}{2}x'\,.$$

Наибольшие значения контактных напряжений находятся в средней части контактной зоны, где берега щели смыкаются.



а



б

Рис. 2. Зависимость контактных напряжений вдоль зоны контакта при различных значениях относительного размера щелей:
а – $l_2/L = 0{,}5$; б – $l_2/L = 0{,}7$

Выводы

Анализ модели частичного закрытия щелей переменной ширины в перфорированной изотропной пластине, подкрепленной стрингерами, сведен к параметрическому совместному исследованию алгебраических систем (10), (11), (14), (17), (19) при различных геометрических и физических параметрах пластины. Полученные соотношения позволяют решать обратную задачу, т. е. определить характеристики усиления перфорированной пластины и ее напряженное состояние, при которых достигается заданная область контакта берегов щелей.

Литература

1. Финкель В. М. Физические основы торможения разрушения. М.: Металлургия, 1977. 360 с.
2. Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упруго-пластического разрушения. М.: Наука, 1985. 504 с.
3. Мирсалимов В. М. Некоторые задачи конструкционного торможения трещин. *Физико-хим. механика материалов.* 1986. Т. 22. № 1. С. 94–98.
4. Толкачев В. М. Передача нагрузки от стрингера конечной длины к бесконечной и полубесконечной пластине. *Докл. АН СССР*. 1964. Т. 154. №4. С.86–88.
5. Долгих В. Н., Фильштинский Л. А. Об одной модели регулярной кусочно-однородной среды. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела.* 1976. №2. С. 158–164.
6. Ванин Г. А. Микромеханика композиционных материалов. Киев: Наук. думка. 1985. 302 с.
7. Броек Д. Основы механики разрушения. М.: Высш. шк., 1980. 368 с.
8. Черепанов Г. П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 296 с.
9. Максименко В. Н. Влияние приклепанных ребер жесткости на развитие трещин возле отверстия. *Прикл. механика и техн. физика.* 1988. Т. 29. №2. С. 133–140.
10. Savruk M. P., Kravets V. S. Reinforcement of a thin cracked plate by a system of parallel stringers. *Materials Sci.* 1994. Vol. 30. Iss. 1. P. 95–104.
11. Savruk M. P., Kravets V. S. Two-dimensional problems of the theory of elasticity for reinforced cracked plates. Materials Sci. 1995. Vol. 31. Iss. 3. P. 350–362.
12. Savruk M. P, Kravets V. S. Effect of breaks in riveted stringers on the elastic and limiting equilibrium of a cracked plate. *Materials Sci*. 1999. Vol. 35. Iss. 3. P. 339–348.
13. Мир-Салим-заде М. В. Трещина со связями между берегами в изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров. *Механика композит. материалов.* 2005. Т. 41. №6. С. 773–782.
14. Мир-Салим-заде М. В. Разрушение изотропной среды, усиленной регулярной системой стрингеров. *Механика композит. материалов.* 2007. Т. 51. №1. С. 59–72.
15. Мирсалимов В. М., Мустафаев А. Б. Точное решение контактной задачи о частичном взаимодействии берегов щели переменной ширины при действии температурного поля. *Проблемы машиностроения*. 2014. Т. 17. № 3. С. 33–37.
16. Мустафаев А. Б. Взаимодействие берегов щели переменной ширины при изгибе полосы (балки) под воздействием температурного поля. *Механика машин, механизмов и материалов*. 2014. №3. С. 30–36.
17. Мирсалимов В. М., Мустафаев А. Б. Решение задачи о частичном контактировании берегов щели переменной ширины под действием температурного поля. *Физико-хим. механика материалов*. 2015. Т. 51. №1. С. 86–92.
18. Mirsalimov V. M., Mustafayev A. B. A contact problem on partial interaction of faces of a variable thickness slot under the influence of temperature field. *Mechanika*. 2015. Vol. 21. Iss. 1. P. 19–22.
19. Mirsalimov V. M. Simulation of partial closure of a variable width slot with interfacial bonds in end zones in an isotropic medium. *Int. J. Damage Mech.*. – 2016. Vol. 25. Iss. 2. P. 266–279.
20. Мир-Салим-заде М. В. Закрытие щели, исходящей из контура кругового отверстия в стрингерной пластине. *Вестн. Чуваш. пед. ун-та им. И . Я. Яковлева.* Сер. Механика предельного состояния. 2016. № 1(27). С.78–89.
21. Мир-Салим-заде М. В. Частичный контакт берегов щели переменной ширины в подкрепленной стрингерами пластине. *Физико-хим. механика материалов*. 2016. Т. 52. № 3. С. 29–34.
22. Гасанов Ш. Г. Решение контактной задачи для плоскости, ослабленной щелью переменной ширины, в неоднородном напряженном поле. *Проблемы машиностроения*. 2017. Т. 20. № 2. С. 29–36.
23. Mir-Salim-zade M. V. Contact problem for a stringer plate weakened by a periodic system of variable width slots. *Structural Eng. and Mech.* 2017. Vol. 62. № 6. P. 719–724.
24. Мустафаев А. Б. Замедление роста щели переменной ширины под действием температурного поля. *Прикл. механика и техн.физика*. 2017. Т. 58. № 1. С. 168–176.
25. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
26. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 444 с.

27. Ladopoulos E. G. Singular Integral Equations, Linear and Non-Linear Theory and its Applications in Science and Engineering. Berlin: Springer Verlag, 2000. 552 p.
28. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.
29. Мирсалимов В. М. Неодномерные упругопластические задачи. М.: Наука, 1987. 256 с.
30. Savruk M. P., Kazberuk A. Stress concentration at notches. Springer International Publishing, 2017. 498 p.

Поступила в редакцию 24.05.2018