

В. П. Голуб, Я. В. Павлюк, П. В. Фернати

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ ДРОБНО-ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ЯДЕР НАСЛЕДСТВЕННОСТИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины;
ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина; creep@inmech.kiev.ua*

Abstract. A problem of determination of parameters of fractional-exponential heredity kernels of nonlinearly viscoelastic materials is solved. The methods of determination of parameters are analyzed that are used in the cubically nonlinear theory of viscoelasticity and the nonlinear theories based on conditions of similarity of the initial creep curves and isochronous creep diagrams. The parameters of fractional-exponential heredity kernels are determined and experimentally approved for the directed polypropylene, nylon fibers FM3001 and FM10001, microplastics, glass-fiber material TC 8/3-250, glass-fiber material SWAM and contact forming glass-fiber material.

Key words: nonlinear viscoelasticity, fractional-exponential kernel, Abel's kernel, cubic theory, similarity of creep curves, similarity of isochronous creep diagrams, experimental approval.

Введение.

Одной из основных задач наследственной теории ползучести является выбор ядер интегральных уравнений, получение их резольвент и достоверное определение параметров ядер [1, 3, 9, 10, 22]. Вязкоупругое поведение некоторых армированных полимеров, стеклопластиков и металлов, а также горных пород достаточно хорошо описывается с помощью резольвентных операторов с ядром наследственности в виде дробно-экспоненциальной функции Работнова [5, 22]. Дробно-экспоненциальное ядро является разновидностью слабо сингулярных ядер и представляет собой произведение исходного ядра Абеля и функции Миттаг – Леффлера.

Наибольшее распространение дробно-экспоненциальное ядро получило для описания процессов ползучести и релаксации линейных вязкоупругих материалов [11, 12, 14, 15]. Задача определения параметров дробно-экспоненциальных ядер наследственности нелинейных вязкоупругих материалов является более сложной и по существу нерешенной. Это объясняется тем обстоятельством, что в нелинейной теории вязкоупругости существует несколько вариантов определяющих уравнений и соответственно несколько методов определения параметров ядер наследственности.

Общей формой записи определяющих уравнений физически нелинейной наследственной среды является кратно-интегральное представление Вольтера – Фреше [18, 24]. Однако, большое количество и многомерная природа входящих в него функций интегрирования, равных числу ядер наследственности, делает задачу идентификации ядер практически неразрешимой. Как показано в [17], матрица системы линейных уравнений, необходимых для определения искомым функций, плохо обусловлена, а процедура определения параметров ядер наследственности крайне неустойчива. Обратить аналитически разложение Вольтера – Фреше, даже в случае удержания трехкратных интегралов, также затруднительно.

Из-за трудностей идентификации ядер наследственности в рамках общей нелинейной теории Вольтера – Фреше в ряде работ построены упрощенные варианты общей теории, исходя из реального характера нелинейного деформирования материала.

В качестве упрощенных вариантов наибольшее распространение получили: кубичная теория [1, 3, 22, 25], теория [3, 7, 19], отражающая подобие первичных кривых ползучести, и теория [3, 22], отражающая подобие изохронных диаграмм ползучести. В работах [5, 6, 13, 16, 22] дробно-экспоненциальное ядро идентифицировано в упрощенном варианте нелинейной модели, исходя из условия подобия изохронных диаграмм ползучести.

В данной работе дано решение задачи идентификации дробно-экспоненциальных ядер наследственности нелинейно-вязкоупругих материалов в рамках всех выделенных вариантов нелинейной теории вязкоупругости. Полученные решения апробированы на задачах расчета деформаций ползучести при постоянных напряжениях.

§1. Постановка задачи. Объект исследования.

В одномерном случае связь между деформацией ε , напряжением σ и временем t в соответствии с кратно-интегральным представлением Вольтера – Фреше задается соотношением [5, 9, 10, 22]

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{1}{E_1} \int_0^t K_1(t-\tau_1) \sigma(\tau_1) d\tau_1 + \frac{1}{E_2} \int_0^t \int_0^t K_2(t-\tau_1, t-\tau_2) \sigma(\tau_1) \sigma(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ & + \frac{1}{E_3} \int_0^t \int_0^t \int_0^t K_3(t-\tau_1, t-\tau_2, t-\tau_3) \sigma(\tau_1) \sigma(\tau_2) \sigma(\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dots, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где E – модуль упругости материала; $K_1(\cdot)$, $K_2(\cdot)$, $K_3(\cdot)$ – функции интегрирования, которые являются характеристиками материала и интерпретируются как ядра ползучести; E_1 , E_2 , E_3 – постоянные.

Ограничивая уравнение (1.1) тремя интегральными членами и принимая далее, что вязкоупругие свойства материала при растяжении и сжатии одинаковы, исключая, соответственно, из (1.1) двойной интеграл, получаем нелинейное определяющее уравнение кубичной теории [1, 3]

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left[\sigma(t) + \int_0^t K_1(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right] + \frac{1}{E_3} \int_0^t K_3(t-\tau) \sigma^3(\tau) d\tau, \quad (1.2)$$

которое используется для описания ползучести вязкоупругих материалов, когда в зависимости от уровня напряжений можно выделить линейную и нелинейную области вязкоупругих свойств. Здесь $K_1(t-\tau)$ и $K_3(t-\tau)$ – ядра наследственности в линейной и нелинейной области, соответственно, а $E_1 = E$.

В качестве частных случаев общего нелинейного уравнения (1.1) рассматриваются также нелинейное интегральное соотношение [6, 7, 19]

$$\varepsilon(t) = \psi(\sigma(t)) + \lambda \int_0^t K(t-\tau) f(\sigma(\tau)) d\tau, \quad (1.3)$$

отражающее подобие первичных кривых ползучести « $\varepsilon-t$ », и нелинейное интегральное соотношение [22]

$$\varphi(\varepsilon(t)) = \sigma(t) + \lambda \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad (1.4)$$

отражающее подобие изохронных диаграмм ползучести « $\varphi-\varepsilon(t)$ ». Здесь $K(t-\tau)$ – ядро ползучести; $\psi(\sigma(t))$, $f(\sigma(t))$, $\varphi(\sigma(t))$ – функции, характеризующие механические свойства материала и определяемые экспериментально; λ – реологический параметр, удовлетворяющий интегральной связи

$$R(t) = K(t) + \lambda \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \quad (1.5)$$

между ядром релаксации $R(t)$ и ядром ползучести $K(t)$, которая позволяет по одной из известных функций определить другую. В данной работе в качестве известной функции в (1.5) рассмотрено ядро ползучести.

В качестве ядер ползучести $K(t-\tau)$ в нелинейных интегральных уравнениях (1.2) – (1.4) используется дробно-экспоненциальное ядро [5, 22]

$$K(t-\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{\alpha+(1+\alpha)n}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)]}, \quad (1.6)$$

где α, β – параметры ядра, подлежащие определению из экспериментов на ползучесть или на релаксацию ($1 > \alpha > 0; \beta > 0$); $\Gamma[\cdot]$ – гамма-функция.

Параметры α и β дробно-экспоненциального ядра (1.5), а также реологический параметр λ в уравнениях (1.3) и (1.4) определяются по результатам обработки экспериментальных данных на одноосную ползучесть при фиксированной температуре и нескольких уровнях постоянных напряжений, так что

$$\sigma(t) = h(t)\sigma_k \quad (k = \overline{1, m}), \quad (1.7)$$

где $h(t)$ – единичная функция Хевисайда ($h(t) = 0$ при $t < 0$ и $h(t) = 1$ при $t \geq 0$), а $\sigma_k = \text{const}$.

В качестве экспериментальных данных, полученных согласно (1.7), использованы данные испытаний на ползучесть образцов полипропилена, нейлоновых волокон FM3001 и FM10001, микропластика, стеклотекстолита ТС 8/3-250, стеклопластика СВAM и стеклопластика контактного формования, заимствованные из работ [2, 4, 6, 8, 20, 25].

Задача заключается в установлении характера нелинейности вязкоупругих свойств исследованных материалов, определении параметров дробно-экспоненциальных ядер наследственности для этих материалов в рамках соответствующих нелинейных теорий и апробации методов определения параметров ядер на задачах расчета деформаций ползучести при постоянных напряжениях.

§2. Кубичная теория.

Область применения кубичной теории ограничена, как известно, вязкоупругими материалами, обнаруживающими малые отклонения от линейного поведения и обладающие одинаковыми вязкоупругими свойствами на растяжение и на сжатие.

2.1. Методика определения параметров ядер наследственности. Кубичная теория является частным случаем общей нелинейной теории вязкоупругости Вольтера – Фреше, определяющие уравнения которой включают только линейный и кубичный члены. Ползучесть материала, как собственно и релаксация напряжений, описывается двумя независимыми ядрами $K_1(t)$ и $K_3(t)$, отражающими, соответственно, линейное и нелинейное вязкоупругое деформирование материала.

Методика определения коэффициентов и параметров ядер ползучести в кубичной теории (1.2) реализуется следующим образом [1, 3, 22].

Пусть имеется семейство кривых ползучести « $\varepsilon - t$ » при разных уровнях постоянных напряжений σ_k , каждое из которых достигнуто ступенчатым нагружением согласно (1.7). Определяющее уравнение ползучести (1.2) с учетом (1.7) записывается в виде

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_k}{E} \left[1 + \lambda_1 \int_0^t K_1(\tau) d\tau \right] + \frac{\sigma_k^3}{E_3} \lambda_3 \int_0^t K_3(\tau) d\tau, \quad (2.1)$$

где принято, что $h(t) = 1$.

По заданным кривым ползучести (2.1) строятся функции ползучести

$$J_k(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_k} = \frac{1}{E} \left[1 + \lambda_1 \int_0^t K_1(\tau) d\tau \right] + \frac{\sigma_k^2}{E_3} \lambda_3 \int_0^t K_3(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

и определяется область линейности вязкоупругих свойств материала. Принимается, что материал обладает линейными вязкоупругими свойствами в некоторой области напряжений $0 < \sigma_k < \sigma_*$, если в этой области функция ползучести (2.2) не зависит от уровня напряжений. Аналитически условие линейности с учетом статистической природы вязкоупругих свойств материала принимаем в таком виде [28]:

$$t_{\alpha,k} = \frac{\delta \bar{J}(t_j) \sqrt{n}}{S_j(t_j)} < t_{\alpha,k}^* \quad (j = \overline{1, n}), \quad (2.3)$$

где $t_{\alpha,k}$ и $t_{\alpha,k}^*$ – расчетное и критическое значения квантиля статистики; $\bar{J}(t_j)$ – выборочное среднее значение функции ползучести; $S_j(t_j)$ – выборочное среднее квадратичное отклонение величины $\bar{J}(t_j)$; n – объем выборки (число функций ползучести); δ – величина погрешности, с которой выполняется условие существования единой функции ползучести; j – число временных интервалов разбиения экспериментальной кривой ползучести. Величина $t_{\alpha,k}^*$ определяется согласно таблицам [23].

Параметры ядер ползучести и неизвестные коэффициенты в (2.1) определяются в два этапа. На первом этапе определяются параметры ядра ползучести $K_1(t)$ и параметр λ_1 , описывающие линейное вязкоупругое деформирование материала. В этом случае уравнение (2.2) преобразуется к линейному интегральному уравнению

$$\frac{\bar{\varepsilon}(t)}{\bar{\sigma}_k} = \frac{1}{E} \left(1 + \lambda_1 \int_0^t K_1(\tau) d\tau \right), \quad (2.4)$$

неизвестные параметры которого определяются путем минимизации функционала

$$F(\lambda_1, \bar{p}_i) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\bar{\varepsilon}(t_j, \bar{\sigma}_k)}{\bar{\sigma}_k} - \frac{1}{E} \left[1 + \lambda_1 \int_0^t K_1(\tau, \bar{p}_i) d\tau \right] \right\}^2. \quad (2.5)$$

Здесь \bar{p}_i – параметры ядра ползучести $K_1(t)$; $\bar{\varepsilon}(\cdot)$ – экспериментальные значения деформаций ползучести в линейной области ($\bar{\sigma}_k < \sigma_*$).

На втором этапе определяются параметры ядра ползучести $K_3(t)$ и коэффициенты $b = \lambda_3 E_3^{-1}$, описывающие деформирование материала в нелинейной области. В этом случае уравнение (2.2) можно представить в виде

$$E \frac{\tilde{\varepsilon}(\tilde{\sigma}_k, t_j)}{\tilde{\sigma}_k} - \left(1 + \lambda_1 \int_0^t K_1(\tau, \bar{p}_i) d\tau \right) = b E \tilde{\sigma}_k^2 \int_0^t K_3(\tau) d\tau, \quad (2.6)$$

где величина

$$I(\tilde{\sigma}_k, t_j) \equiv E \frac{\tilde{\varepsilon}(\tilde{\sigma}_k, t_j)}{\tilde{\sigma}_k} - \left(1 + \lambda_1 \int_0^t K_1(\tau, \bar{p}_i) d\tau \right) \quad (2.7)$$

известна, поскольку величины $\tilde{\varepsilon}(\tilde{\sigma}_k, t_j)$ измеряются по экспериментальным кривым ползучести в нелинейной области ($\tilde{\sigma}_k > \sigma_*$), а значения параметров \bar{p}_i определяются согласно (2.5).

Параметры ядра ползучести $K_3(t)$ и величина коэффициента b , исходя из (2.6) и (2.7), определяются по результатам аппроксимации дискретных значений величины $I(\tilde{\sigma}_k, t)$ путем минимизации функционала

$$F(b, \tilde{p}_i) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \left\{ I(\tilde{\sigma}_k, t_j) - bE\tilde{\sigma}_k^2 \int_0^t K_3(\tau, \tilde{p}_i) d\tau \right\}^2 \rightarrow 0, \quad (2.8)$$

где \tilde{p}_i – параметры ядра ползучести $K_3(\cdot)$.

2.2. Численная реализация методики. При определении коэффициентов и параметров ядер наследственности в кубичной теории методикой предусмотрено выделение двух областей напряжений, вызывающих линейное и, соответственно, нелинейное вязкоупругое деформирование материала. Эта задача решается на основе анализа экспериментальных функций ползучести (2.2) и условия линейности (2.3). Реализация методики осуществляется в работе на примере ползучести нейлоновых волокон FM 10001 при $\theta = 25^\circ \text{C}$, волокон FM3001 при $\theta = 23^\circ \text{C}$, стеклопластика ТС 8/3-250 – при $\theta = 23^\circ \text{C}$ и стеклопластика контактного формования – при $\theta = 23^\circ \text{C}$. Исходные экспериментальные данные заимствованы из [2, 6, 20].

На рис. 1 точками представлены экспериментальные и выборочные средние значения функции ползучести $\bar{J}(t_j)$ для исследованных материалов. Штриховыми линиями нанесены границы интервала, задаваемого величиной $\delta = \pm 5\%$. Экспериментальные (точки) и выборочные средние (сплошные линии) значения функций ползучести $J_k(t_j)$ нейлоновых волокон FM 10001 (а) при $\sigma_k = 3,2$ (○), 5,0 (●), 6,8 (◐), 9,3 (◑), 12,4 (●) МПа, нейлоновых волокон FM3001 (б) при $\sigma_k = 3,3$ (○), 4,1 (◐), 8,3 (◑), 12,4 (◒), 16,6 (●) МПа, стеклопластика ТС 8/3-250 (в) при $\sigma_k = 19,9$ (○), 39,8 (◐), 59,7 (◑), 79,6 (◒), 99,5 (◓), 119,5 (●) и стеклопластика контактного формования (г) при $\sigma_k = 5$ (○), 10 (◐), 20 (◑), 25 (●) МПа.

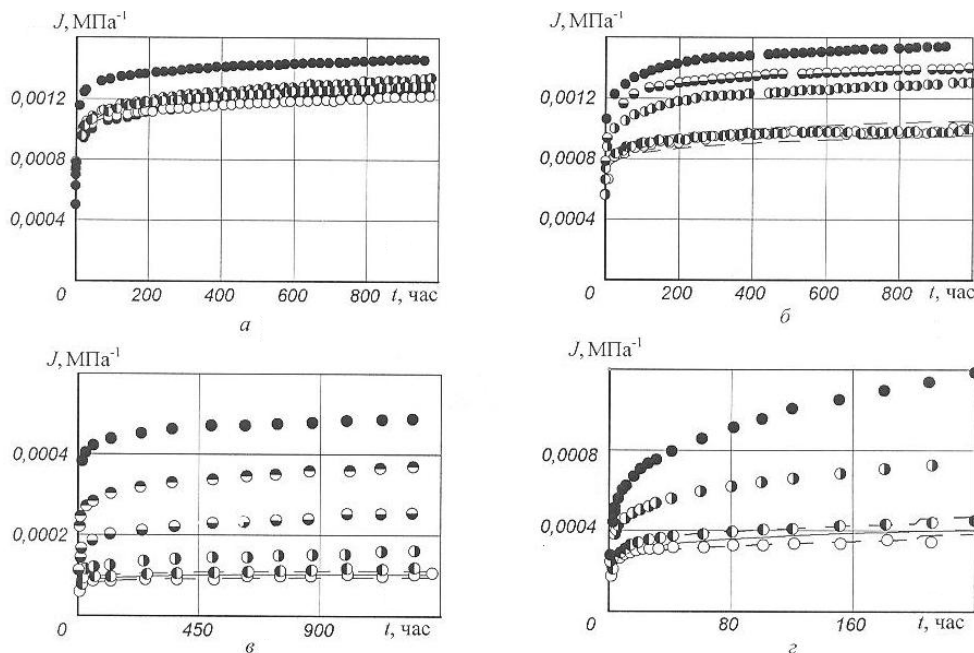


Рис. 1

Из данных, приведенных на рис. 1, следует, что для всех рассмотренных материалов можно выделить область напряжений, в которой функции ползучести $J_k(t_j)$ с погрешностью $\delta_{\max} = \pm 5\%$ по отношению к величине $\bar{J}(t_j)$ оказываются инвариантными по отношению к уровню напряжений σ_k , а материалы, соответственно, обладают линей-

ными вязкоупругими свойствами. Для волокна FM 10001 эта область включает напряжения $\bar{\sigma}_k = 3,2, \dots, 9,3$ МПа, для волокна FM 3001 – напряжения $\bar{\sigma}_k = 3,3, \dots, 4,1$ МПа, для стеклопластика ТС 8/3-250 – напряжения $\bar{\sigma}_k = 10,91 - 39,82$ МПа и для стеклопластика контактного формования – напряжения $\bar{\sigma}_k = 4,9 - 9,81$ МПа. Условие линейности (2.3) выполняется при этом во всем исследованном временном интервале с вероятностью $p = 90\%$.

Экспериментальные значения деформаций ползучести $\varepsilon(\sigma_k, t_j)$, замеренные по кривым ползучести в области напряжений $\bar{\sigma}_k$, которые удовлетворяют условиям линейности вязкоупругих свойств нейлоновых волокон и стеклопластиков, используются для определения параметров дробно-экспоненциальных ядер (1.6). В этом случае функционал (2.5) с учетом (1.6) записывается в виде

$$F(\alpha_1, \beta_1, \lambda_1) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\bar{\varepsilon}(\bar{\sigma}_k, t_j)}{\bar{\sigma}_k} - \frac{1}{E} \left[1 + \lambda_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t_j^{(1+\alpha_1)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha_1)(1+n)]} \right] \right\}^2, \quad (2.9)$$

минимизируя который определим значения параметров α_1 , β_1 и λ_1 . Здесь и далее процедура минимизации функционалов при определении параметров ядер ползучести решается с использованием итерационного метода Левенберга – Маркардта [21].

Значения констант в кубичной теории (параметров α_1 , β_1 и λ_1 , рассчитанных согласно (2.9)), приведены в табл. 1.

Таблица 1.

Материал	E , МПа	α_1	β_1 , час ^{-(1+α)}	λ_1 , час ^{-(1+α)}	b , МПа ⁻³ ·час ^{-(1+α)}	λ_3	β_3 , час ^{-(1+α)}
Волокно FM10001	1709,9	-0,859	0,04122	0,4636	$1,169 \cdot 10^{-6}$	-0,859	0,5222
Волокно FM3001	1889,2	-0,830	0,10829	0,3511	$0,780 \cdot 10^{-6}$	-0,798	0,4212
Стеклотекстолит ТС8/3-250	15690	-0,406	0,07965	0,0537	$1,780 \cdot 10^{-3}$	-0,844	0,3778
Стеклопластик	4888,2	-0,573	0,08765	0,1600	$2,040 \cdot 10^{-7}$	-0,586	0,0985

Подставляя далее (1.6) в (2.7), получаем уравнение

$$I(\tilde{\sigma}_k, t_j) = E \frac{\tilde{\varepsilon}(\tilde{\sigma}_k, t_j)}{\tilde{\sigma}_k} - \left[1 + \lambda_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_1)^n t^{(1+\alpha_1)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha_1)(1+n)]} \right], \quad (2.10)$$

используемое для расчета значений величины $I(\tilde{\sigma}_k, t_j)$, по которым определяют параметры ядра ползучести $K_3(t)$ в нелинейной области.

Значения величины $I(\tilde{\sigma}_k, t_j)$, рассчитанные по уравнению (2.10), представлены для исследованных материалов на рис. 2 точками. Расчеты выполнены с использованием параметров α_1 , β_1 и λ_1 , приведенных в табл. 1, и значений деформаций ползучести $\tilde{\varepsilon}(\tilde{\sigma}_k, t_j)$, замеренных по кривым ползучести в нелинейной области при напряжениях $\tilde{\sigma}_k = 12,4$ МПа для волокна FM10001 (а), $\tilde{\sigma}_k = 8,3$ (●), 12,4 (⊖), 16,6 (●) МПа для волокна FM3001 (б), $\tilde{\sigma}_k = 59,72$ (●), 79,63 (⊖), 99,53 (⊖), 119,45 (●) МПа для стеклопластика ТС 8/3-250 (в) и $\tilde{\sigma}_k = 19,61$ (●), 24,51 (●) МПа для стеклопластика контактного формования (г).

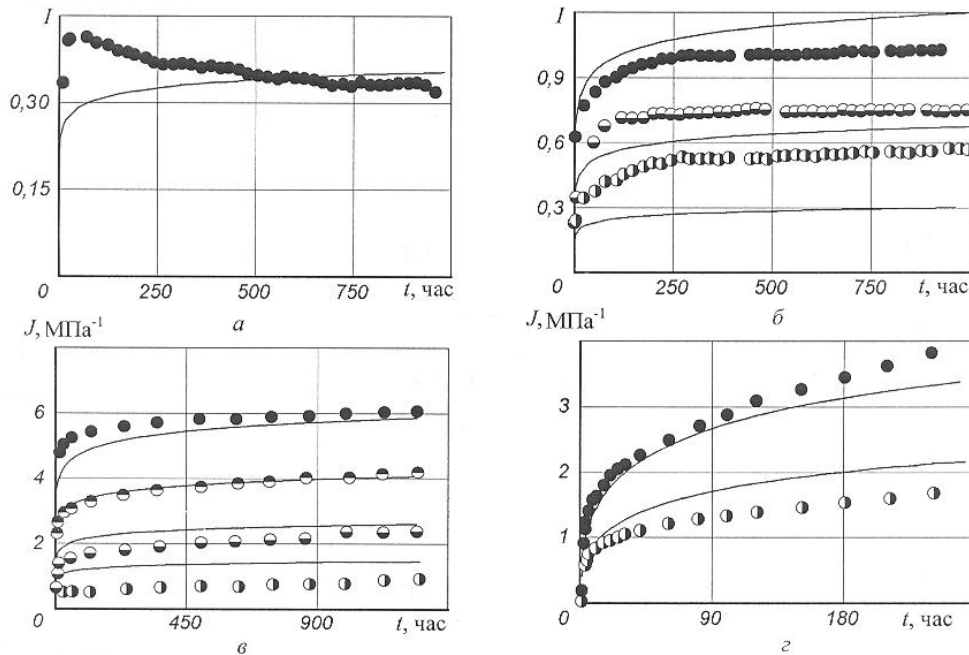


Рис. 2

В этом случае функционал (2.8) с учетом (1.6) записывается в виде

$$F(\alpha_3, \beta_3, b) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \left\{ I(\tilde{\sigma}_k, t_j) - bE\tilde{\sigma}_k^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_3)^n t_i^{(1+\alpha_3)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha_3)(1+n)]} \right\}^2, \quad (2.11)$$

минимизируя который определим значения параметров α_3 , β_3 и λ_3 . Значения параметров α_3 , β_3 и λ_3 для исследованных материалов, рассчитанных согласно (2.11), приведены в табл. 1, а на рис. 2 тонкими сплошными линиями показана соответствующая этим значениям параметров аппроксимация уравнением (2.10) дискретных значений величины $I(\tilde{\sigma}_k, t_j)$.

2.3. Экспериментальная апробация метода. Экспериментальная апробация дробно-экспоненциального ядра (1.6) в кубичной наследственной теории и параметров ядра, полученных в предположении существования области линейности и области нелинейности вязкоупругих свойств материала, для решения задач нелинейной теории вязкоупругости может быть осуществлена на примере расчета деформаций ползучести при постоянных напряжениях.

Зависимость деформации ε от времени t при нагружении постоянными напряжениями σ_k записываем, исходя из (1.2) с учетом (1.6) и (1.7), в виде

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_k}{E} \cdot \left[1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_1)^n t^{(1+\alpha_1)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha_1)(1+n)]} \right] + b\sigma_k^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_3)^n t^{(1+\alpha_3)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha_3)(1+n)]}, \quad (2.12)$$

где принято, что $\tau = 0$, $t - \tau = t$, а $h(t) = 1$.

Значения деформаций ползучести $\varepsilon(t)$, рассчитанных по уравнению (2.12) с использованием значений параметров α_1 , β_1 , λ_1 , α_3 , β_3 , λ_3 , приведенных в табл. 1, сопоставлены на рис. 3 с экспериментальными данными для нейлоновых волокон FM10001 (а) и FM3001 (б) при растяжении, стеклопластика ТС 8/3-250 (в) и стекло-

пластика контактного формования (ε) при растяжении под углом $\varphi = 45^\circ$ к направлению армирования. Результаты расчетов нанесены штриховыми линиями, а экспериментальные данные показаны точками. Обозначения уровня приложенных напряжений совпадают с принятыми на рис. 1.

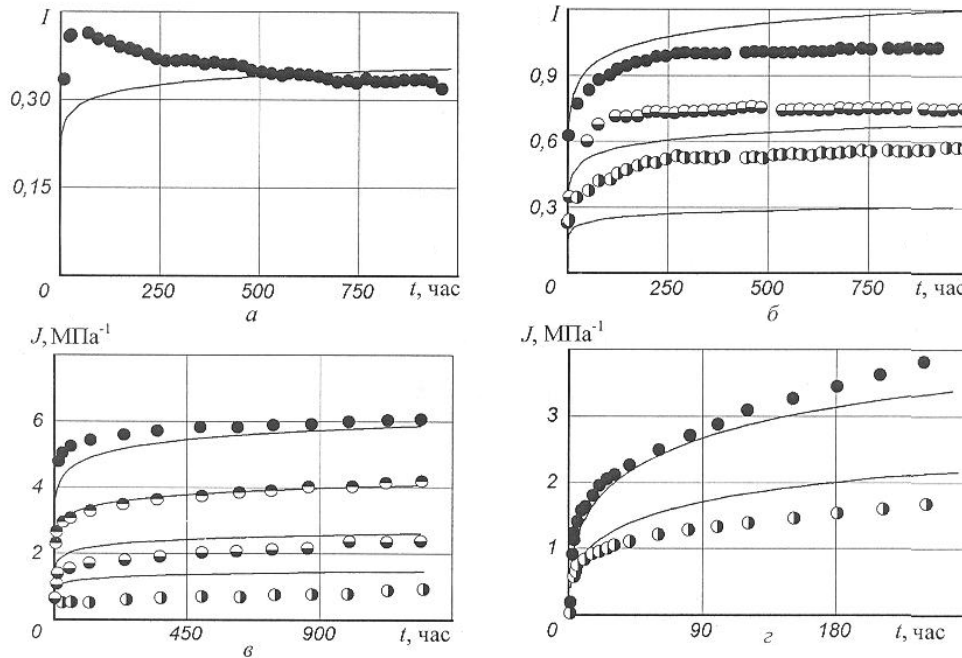


Рис. 3

§3. Теория, учитывающая подобие первичных кривых ползучести.

Подобие первичных кривых ползучести предполагает, что при постоянных напряжениях любую кривую ползучести можно совместить с другой кривой ползучести, если умножить её ординаты на коэффициент подобия, зависящий от напряжений.

3.1. Методика определения параметров ядер наследственности. Определяющее уравнение (1.3) теории является частным случаем общей нелинейной теории вязкоупругости Вольтера – Фреше и содержит три функции $\psi(\cdot)$, $f(\cdot)$ и $K(\cdot)$, подлежащие определению из эксперимента. Методика идентификации неизвестных функций в (1.3) и определения их параметров реализуется следующим образом [3, 7, 19].

Пусть имеется семейство подобных кривых ползучести « $\varepsilon - t$ » для разных уровней постоянных напряжений σ_k , заданных согласно (1.7). В этом случае определяющее уравнение (1.3) с учетом (1.7) запишется в виде

$$\varepsilon(\sigma_k, t) = \psi(\sigma_k) \left(1 + \lambda \int_0^t K(\tau) d\tau \right), \quad (3.1)$$

где функция $\psi(\sigma_k)$ является функцией подобия и в момент времени $t = 0$ задает величину начальной упругой деформации. Здесь принято, что $h(t) = 1$, $\tau = 0$, $t - \tau = t$, а $f(\sigma_k) = \psi(\sigma_k)$. Функция $\psi(\sigma_k)$ задается одночленной степенной аппроксимацией

$$\psi(\sigma_k) = \frac{q}{H} (\sigma_k)^{1/q}, \quad (3.2)$$

где q , H – экспериментально определяемые коэффициенты.

Условие подобия первичных кривых ползучести задается, как известно, соотношением [9]

$$\varepsilon(\sigma_k, t) = \chi_k(\sigma_k) \varepsilon(\sigma_0, t) \Rightarrow \varepsilon(\sigma_0, t) = \frac{\varepsilon(\sigma_k, t)}{\chi_k(\sigma_k)}, \quad (3.3)$$

которое позволяет, зная коэффициент подобия $\chi_k(\sigma_k)$, рассчитывать деформации ползучести $\varepsilon(\sigma_k, t)$ при произвольном напряжении σ_k по характеристикам базисной кривой ползучести $\varepsilon(\sigma_0, t)$, полученной при напряжении σ_0 .

В качестве базисного напряжения σ_0 выбираем, как правило, наибольшее напряжение из ряда σ_k , для которого построена экспериментальная кривая ползучести. Для базисной кривой $\varepsilon(\sigma_0, t)$, решая совместно уравнения (3.1) и (3.3), получаем

$$\varepsilon(\sigma_0, t) = \chi_0(\sigma_0) \left(1 + \lambda \int_0^t K(\tau) d\tau \right), \quad (3.4)$$

где введено обозначение

$$\chi_0(\sigma_0) = \frac{\psi(\sigma_k)}{\chi_k(\sigma_k)} \Rightarrow \psi(\sigma_k) = \chi_0(\sigma_0) \chi_k(\sigma_k). \quad (3.5)$$

Параметры ядра ползучести (1.6) и неизвестные коэффициенты в (3.2) определяются в два этапа. На первом этапе определяются реологические параметры α , β и λ , а также коэффициент подобия $\chi_0(\sigma_0)$. Эти параметры определяются по результатам аппроксимации экспериментальной базисной кривой ползучести $\varepsilon(\sigma_0, t_j)$ уравнением (3.4). Задача сводится к минимизации функционала

$$F(\chi_0(\sigma_0), p_i) = \sum_{j=1}^n \left\{ \varepsilon(\sigma_0, t_j) - \varepsilon(\sigma_0, t_j, \chi_0(\sigma_0), p_i) \right\}^2, \quad (3.6)$$

где p_i – неизвестные реологические параметры ($i = 3$).

На втором этапе определяются коэффициенты q и H в уравнении (3.2). Эти коэффициенты определяются по результатам аппроксимации дискретных значений функции $\psi(\sigma_k)$, которые рассчитываются по соотношению (3.5). Коэффициент подобия $\chi_0(\sigma_0)$ в (3.5) определяется в процессе минимизации функционала (3.6). Коэффициент подобия $\chi_k(\sigma_k)$ определяется из условия наилучшего согласования экспериментальных кривых ползучести, построенных для нескольких значений σ_k , с экспериментальной базисной кривой ползучести $\varepsilon(\sigma_0, t_j)$ согласно условию подобия (3.3). Задача сводится к минимизации функционала

$$F(\chi_k(\sigma_k)) = \sum_{j=1}^n \left\{ \varepsilon(\sigma_0, t_j) - \frac{\varepsilon(\sigma_k, t_j)}{\chi_k(\sigma_k)} \right\}^2, \quad (3.7)$$

откуда для коэффициента подобия $\chi_k(\sigma_k)$ получаем соотношение

$$\chi_k(\sigma_k) = \frac{\sum_{j=1}^n (\varepsilon(\sigma_k, t_j))^2}{\sum_{j=1}^n \varepsilon(\sigma_0, t_j) \varepsilon(\sigma_k, t_j)}, \quad (3.8)$$

которое позволяет рассчитывать дискретные значения величины $\chi_k(\sigma_k)$.

Далее, используя полученные значения коэффициентов подобия $\chi_0(\sigma_0)$ и $\chi_k(\sigma_k)$, по уравнению (3.5) рассчитываются дискретные значения функции $\psi(\sigma_k)$. Значения коэффициентов q и H определяются по результатам аппроксимации дискретных значений функции $\psi(\sigma_k)$ уравнением (3.2), исходя из минимизации функционала

$$F(p_i) = \sum_{j=1}^n \{ \psi(\sigma_k) - \psi(\sigma_k, p_i) \}^2, \quad (3.9)$$

где $i = 2$, причем $p_1 = q$, а $p_2 = H$.

3.2. Численная реализация методики. Методика определения коэффициентов и параметров ядер наследственности в рассматриваемой нелинейной теории, изложенная в разделе 3.1, построена, исходя из условия подобия первичных кривых ползучести в плоскости « ε, t ».

Реализация методики осуществляется на примере ползучести нейлоновых волокон FM3001 при $\theta = 23^\circ\text{C}$ и стеклопластика СВАМ при $\theta = 23^\circ\text{C}$. Экспериментальные данные заимствованы, соответственно, из [20] и [4].

На рис. 4 точками представлены приведенные к базисной кривой по уравнению (3.3) первичные кривые ползучести нейлоновых волокон FM3001 (а) и стеклопластика СВАМ (б). В качестве базисной кривой ползучести для волокон FM3001 выбрана кривая ползучести при напряжении $\sigma_0 = 16,55$ (●) МПа, а для стеклопластика СВАМ – кривая ползучести при напряжении $\sigma_0 = 89,24$ (●) МПа. Тонкими сплошными линиями показана аппроксимация базисных кривых ползучести сглаживающими кубическими сплайнами [11 – 13].

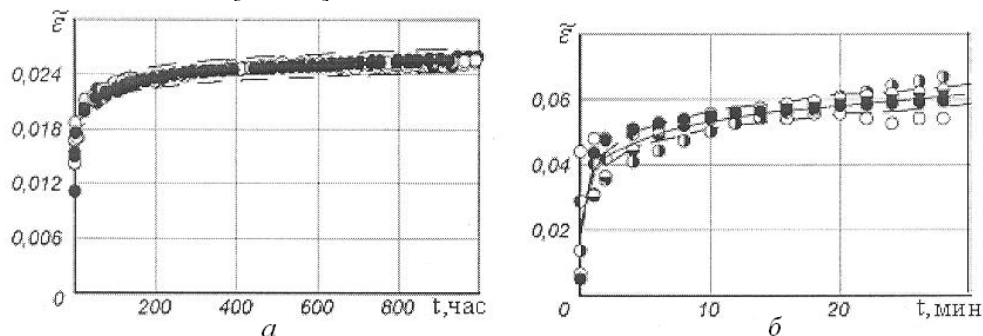


Рис. 4

Значения коэффициентов подобия $\chi_k(\sigma_k)$, рассчитанные по уравнению (3.8) и использованные для приведения первичных кривых ползучести к базисной кривой согласно (3.3), представлены для исследованных материалов в табл. 2. Здесь же приведены дискретные значения функции $\psi(\sigma_k)$, рассчитанные по уравнению (3.5) и использованные при определении коэффициентов q и H .

Таблица 2

$\sigma_k, \chi_k, \psi(\sigma_k)$	Нейлоновые волокна FM3001				
	Стеклопластик СВАМ				
σ_k , МПа	3,2750 38,246	4,1368 50,995	8,2737 63,743	12,411 76,492	16,548 89,241
χ_k	0,1274 0,0447	0,1625 0,0992	0,4156 0,2407	0,6804 0,6556	1,0004 1,0000
$\psi(\sigma_k)$	0,0021 0,0013	0,0026 0,0028	0,0067 0,0068	0,0109 0,0185	0,0160 0,0282

В целом, как это видно из рис. 4, условие подобия первичных кривых ползучести для исследованных материалов выполняется. Для нейлоновых волокон FM3001 условие подобия выполняется во всей области рассмотренных напряжений и длительностей испытания. Для стеклопластика СВAM на начальной и конечной стадиях нагружения наблюдается некоторое отклонение между приведенными и базисной кривыми ползучести, которым в первом приближении можно пренебречь.

Экспериментальные значения деформаций ползучести $\varepsilon(\sigma_0, t_j)$, замеренные по базисной кривой ползучести, относительно которой обосновывается условие подобия (3.3), используются в дальнейшем при определении реологического параметра λ , параметров ядра наследственности α и β , а также коэффициента подобия $\chi_0(\sigma_0)$. В этом случае функционал (3.6) конкретизируется с учетом (1.6) в виде

$$F(\alpha, \beta, \lambda, \chi_0(\sigma_0), p_i) = \sum_{j=1}^n \left\{ \varepsilon(\sigma_0, t_j) - \chi_0(\sigma_0) \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma(1+(1+\alpha)(1+n))} \right) \right\}^2, \quad (3.10)$$

минимизируя который находим значения искомым параметров. Значения параметров α , β , λ и $\chi(\sigma_0)$, рассчитанных согласно (3.10), приведены для исследованных материалов в табл. 3, где даны значения констант модели, отражающих подобие кривых ползучести.

Таблица 3

Материал	α	β	λ	$\chi_0(\sigma_0)$	q	H
Нейлон FM 3001	-0,68028	0,10638 час ^(1+α)	0,12059 час ^(1+α)	0,01604	0,779	1,79·10 ³ МПа
Стеклопластик СВAM	-0,03096	0,30764 мин ^(1+α)	0,33007 мин ^(1+α)	0,02820	0,261	2,69·10 ⁸ МПа

Значения коэффициентов подобия $\chi_0(\sigma_0)$ и дискретные значения функции $\psi(\sigma_k)$, приведенные в табл. 2 и 3, использованы в дальнейшем для определения коэффициентов q и H в уравнении (3.2). В этом случае функционал (3.9) конкретизируется с учетом (3.2) в виде

$$F(q, H) = \sum_{j=1}^n \left\{ \psi(\sigma_k) - \frac{q}{H} (\sigma_k)^{1/q} \right\}^2, \quad (3.11)$$

минимизируя который определим значения искомым коэффициентов. Значения коэффициентов q и H , рассчитанных согласно (3.11), приведены для исследованных материалов в табл. 3.

3.3. Экспериментальная апробация метода. Экспериментальная апробация дробно-экспоненциального ядра наследственности в нелинейной теории, построенной исходя из условия подобия первичных кривых ползучести, также может быть осуществлена на примере расчета деформаций ползучести при постоянных напряжениях.

Зависимость деформации ε от времени t при нагружении постоянными напряжениями σ_k записывается, исходя из (1.3) с учетом (1.6), (1.7) и (3.2), в виде

$$\varepsilon(\sigma_k, t) = \frac{q}{H} (\sigma_k)^{1/q} \left[1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} t^{(1+\alpha)(1+n)} \right], \quad (3.12)$$

где принято $\tau = 0$, $t - \tau = t$ и $h(0) = 1$.

Значения деформаций ползучести $\varepsilon(t)$, рассчитанных по уравнению (3.12) с использованием значений параметров α , β , λ , q и H , приведенных в табл. 3, сопоставлены на рис. 5 с экспериментальными данными для нейлоновых волокон FM3001 (а) и стеклопластика СВAM (б). Результаты расчетов нанесены штриховыми линиями,

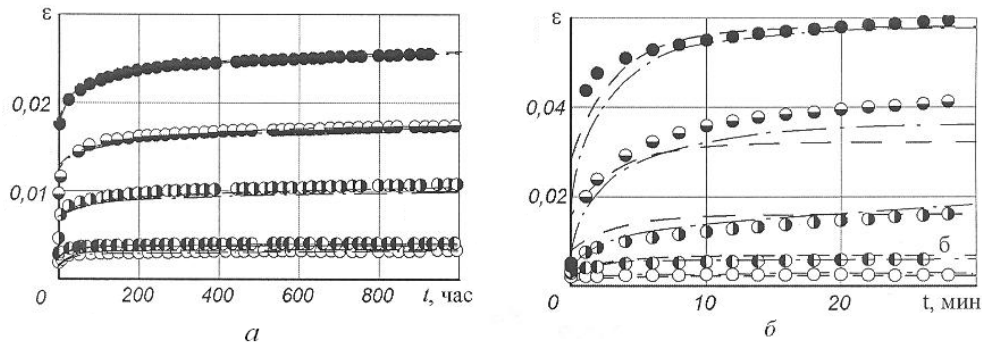


Рис. 5

а экспериментальные данные показаны точками. Обозначения уровней приложенных напряжений совпадают с принятыми на рис. 4.

§4. Теория, отражающая подобие изохронных диаграмм ползучести.

Подобие изохронных диаграмм ползучести предполагает, что любую изохрону можно совместить с другой изохроной, если умножить её ординаты на коэффициент подобия, зависящий от времени.

4.1. Методика определения параметров ядер наследственности. Определяющее уравнение (1.4) теории является частным случаем общей нелинейной теории вязкоупругости Вольтера – Фреше и содержит две функции $\varphi(\cdot)$ и $K(\cdot)$, подлежащие определению из эксперимента. Методика идентификации неизвестных функций в (1.4) и определения их параметров реализуется следующим образом [6, 22].

Пусть имеется семейство подобных изохронных диаграмм ползучести « $\sigma - \varepsilon(t)$ », построенных по кривым ползучести « $\varepsilon - t$ » для разных уровней постоянных напряжений σ_k , которые задаются согласно (1.7). Уравнение ползучести (1.4) при $\sigma(t) = \sigma_k = \text{const}$ записываем в виде

$$\varphi(\varepsilon(t)) = \left(1 + \lambda \int_0^t K(\tau) d\tau \right) \sigma_k, \quad (4.1)$$

решение которого относительно величины деформации $\varepsilon(t)$, имеет вид

$$\varepsilon(t) = \varphi^{-1} \left\{ \left(1 + \lambda \int_0^t K(\tau) d\tau \right) \sigma_k \right\}, \quad (4.2)$$

устанавливает зависимость между деформацией, напряжением и временем. Здесь функция $\varphi(\cdot)$ задает диаграмму мгновенного деформирования (изохрону для нулевого времени); функция $\varphi^{-1}(\cdot)$ является обращением функции $\varphi(\cdot)$; $h(t) = 1$; $\tau = 0$, а $(t - \tau) = t$.

Функция $\varphi(\cdot)$, параметры ядра наследственности $K(\cdot)$ и реологический параметр λ в (4.1) и (4.2) определяем, исходя из условия подобия изохронных диаграмм ползучести, которому удовлетворяет соотношение

$$\sigma_j = \frac{\varphi(\varepsilon_i, t_j)}{\left(1 + \lambda \int_0^{t_j} K(\tau) d\tau \right)}, \quad (4.3)$$

где ε_i – дискретные значения деформаций в плоскости « $\sigma - \varepsilon$ » ($i = \overline{1, n}$); $\varphi(\varepsilon_i, t_j)$ – дискретные значения функции $\varphi(\varepsilon_i)$ для нескольких моментов времени t_j ($j = \overline{1, k}$);

σ_j – дискретные значения напряжений в плоскости « $\sigma - \varepsilon$ », соответствующие значениям $\varphi(\varepsilon_i)$ для значений t_j . Дискретные значения функции $\varphi(\varepsilon_i, t_j)$ включают также и дискретные значения функции $\varphi(\varepsilon_i, t_j = 0)$, задающей диаграмму мгновенного деформирования, и подлежащие определению.

Задача определения дискретных значений функции $\varphi(\varepsilon_i, t_j = 0)$, параметров α , β дробно-экспоненциального ядра ползучести (1.6) и реологического параметра λ , исходя из условия подобия (4.3), сводится к минимизации функционала

$$\Phi(\alpha, \beta, \lambda, \overline{\varphi(\varepsilon_i, t_j = 0)}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^k \left(\sigma_j - \frac{\varphi(\varepsilon_i)}{1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (\tau_j)^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]}} \right)^2, \quad (4.4)$$

где $\overline{\varphi(\varepsilon_i, t_j = 0)}$ – осредненные дискретные значения диаграммы мгновенного деформирования.

4.2. Численная реализация методики. Методика определения коэффициентов и параметров ядер наследственности в рассматриваемой нелинейной теории вязкоупругости, изложенная в разделе 4.1, построена исходя из условия подобия изохронных диаграмм ползучести в плоскости « σ, ε » и сводится к минимизации функционала (4.4).

Функционал (4.4) содержит в качестве аргументов реологические параметры α , β , λ и ряд значений функции $\overline{\varphi(\varepsilon_i, t_j = 0)}$ для нескольких уровней деформации ε_i , количество которых в данной работе равно 5, т.е. индекс i в (4.4) изменялся от 1 до 5 и, соответственно, функционал (4.4) содержал 8 неизвестных параметров. Минимизация функционала осуществляется с использованием итерационного метода Левенберга – Маркардта [21].

Реализация методики осуществляется в работе на примере ползучести пропилена при $\theta = 30^\circ \text{C}$ и микропластика при $\theta = 20^\circ \text{C}$. Исходные экспериментальные данные, заимствованные, соответственно, из [3, 5], показывают, что подобие первичных кривых ползучести для этих материалов отсутствует. Подобными являются изохронные диаграммы ползучести [3, 13]. Значения реологических параметров α , β , λ и набор дискретных значений функции $\overline{\varphi(\varepsilon_i, t_j = 0)}$, полученных для исследованных материалов в результате минимизации функционала (4.4), приведены в табл. 4.

Таблица 4

Полипропилен					Микропластик				
i	ε_i	$\overline{\varphi(\varepsilon_i, t_j = 0)}$, МПа	Параметры модели		i	ε_i	$\overline{\varphi(\varepsilon_i, t_j = 0)}$, МПа	Параметры модели	
0	0	0	α	-0,5649	0	0	0	α	-0,7172
1	0,01	6,29	β , час ^{-($\alpha+1$)}	-0,1217	1	0,001	120,5	β , час ^{-($\alpha+1$)}	-0,04385
2	0,02	11,93	λ , час ^{-($\alpha+1$)}	0,1377	2	0,01	1018	λ , час ^{-($\alpha+1$)}	0,04385
3	0,03	16,3	b_1	0,001879	3	0,02	1859	b_1	$8,18 \cdot 10^6$
4	0,04	19,51	b_2	$-6,4 \cdot 10^5$	4	0,025	2269	b_2	$1,92 \cdot 10^9$
5	0,05	21,81	b_3	$3,8 \cdot 10^6$	5	0,03	2670	b_3	$-2,9 \cdot 10^{13}$

Функция $\varphi[\varepsilon(0)]$, аппроксимирующая дискретные значения диаграммы мгновенного деформирования $\overline{\varphi(\varepsilon_i, t_j) = 0}$ задается полиномом вида

$$\varphi[\varepsilon(0)] = a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots + a_n\varepsilon^n, \quad (4.5)$$

а её обращение $\varphi^{-1}[\varepsilon(0)]$ – соответственно, полиномом

$$\varphi^{-1}[\varepsilon(0)] = \psi[\sigma(0)] = b_0 + b_1\sigma_k + b_2(\sigma_k)^2 + \dots + b_n(\sigma_k)^n, \quad (4.6)$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ – коэффициенты полиномов, которые определяются по результатам аппроксимации дискретных значений диаграммы мгновенного деформирования $\varphi(\varepsilon_i, t_j = 0)$ и их обращений полиномами (4.5) и (4.6), соответственно.

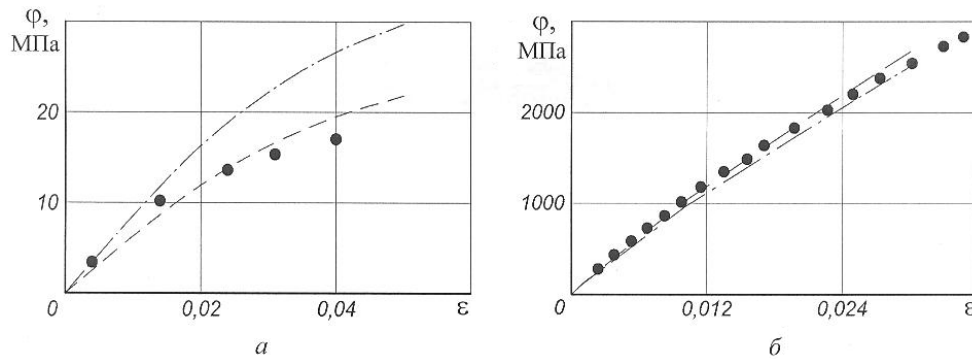


Рис. 6

На рис. 6 штриховыми линиями нанесены аппроксимации полиномом (4.5) дискретных значений $\varphi(\varepsilon_i, t_j = 0)$ диаграмм мгновенного деформирования для полипропилена (а) и для микропластика (б), рассчитанных согласно (4.4) при $n = 0$ ($a_0 = b_0 = 0$). Точками нанесены экспериментальные значения диаграмм мгновенного деформирования. Значения коэффициентов аппроксимирующих полиномов приведены в табл. 4.

4.3. Экспериментальная апробация метода. Экспериментальная апробация дробно-экспоненциального ядра наследственности в нелинейной теории вязкоупругости, построенной исходя из условия подобия изохронных диаграмм ползучести, осуществляется на примере расчета деформаций ползучести полипропилена и микропластика при постоянных напряжениях.

Зависимость деформации ε от времени t при нагружении постоянными напряжениями σ_k записывается, согласно (4.2) с учетом (1.6), (1.7) и (4.6), в виде

$$\varepsilon(t) = \sum_{s=0}^H b_s \left\{ \left[1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{\Gamma[1 + (1 + \alpha)(1 + n)]} \cdot t^{(1 + \alpha)(1 + n)} \right] \sigma_k \right\}^s \quad (4.7)$$

где принято: $\tau = 0$, $t - \tau = t$ и $h(t) = 1$.

Значения деформаций ползучести $\varepsilon(t)$, рассчитанных по уравнению (4.7) с использованием значений коэффициентов b_i и параметров α , β и λ , приведенных в табл. 4, сопоставлены на рис. 7 с экспериментальными данными для полипропилена (а) и микропластика (б). Результаты расчетов нанесены штриховыми линиями, а экс-

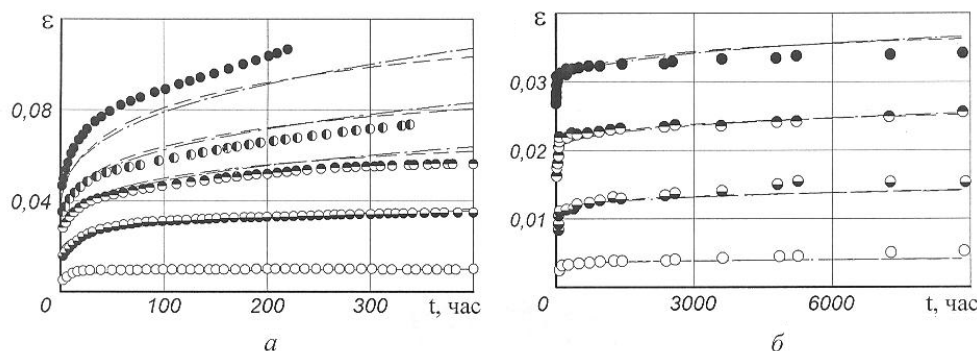


Рис. 7

периментальные данные – точками. На рис. 7 – расчетные (линии) и экспериментальные (точки) значения деформаций ползучести полипропилена (а) при напряжениях $\sigma_k = 3,4$ (○), 10,2 (◐), 13,6 (◑), 15,3 (◒), 17,0 (●) МПа и микропластика (б) при напряжениях $\sigma_k = 331$ (○), 1000 (◐), 1660 (◑), 2330 (●) МПа.

§5. Анализ результатов.

Основные трудности, возникающие при решении задачи определения параметров дробно-экспоненциальных ядер наследственности по результатам аппроксимации дискретных экспериментальных данных, имеют преимущественно вычислительный характер. Это связано с тем, что ряд, входящий в аналитическое выражение ядра (1.6), является знакопеременным и плохо сходящимся, так что в случае больших длительностей достоверно определить значения параметров ядер путем прямой аппроксимации экспериментальных данных не представляется возможным.

Трудности вычислительного характера, возникающие при определении параметров дробно-экспоненциальных ядер наследственности, преодолеваются, как правило, с привлечением дополнительных процедур, таких как аппроксимация ядра экспоненциальной функцией, упрощение структуры ядра с использованием преобразования Лапласа – Карсона, нормирование экспериментальных данных по шкале времени. В случае линейно-вязкоупругих материалов наиболее эффективным оказался метод прямой обработки нормированных экспериментальных данных [11].

Анализ применимости дробно-экспоненциальных ядер наследственности и точности определения их параметров в случае нелинейно-вязкоупругих материалов дан в настоящей работе также по результатам обработки нормированных экспериментальных данных. В качестве исходных использованы данные испытаний на одноосную ползучесть при постоянных напряжениях. Рассмотрена ползучесть нелинейно-вязкоупругих материалов в рамках кубической теории, теории, основанной на подобии первичных кривых ползучести, и теории, основанной на подобии изохронных диаграмм ползучести.

Значения деформаций ползучести исследованных нелинейно-вязкоупругих материалов, рассчитанных по определяющим уравнениям (2.12), (3.12) и (4.7) выбранных нелинейных теорий вязкоупругости с использованием дробно-экспоненциальных ядер, приведены на рис. 3, 5 и 7. Параметры ядер получены, соответственно, с использованием данных в области линейности вязкоупругих свойств, на основе функции подобия первичных кривых ползучести и функции подобия изохронных диаграмм ползучести. Все полученные результаты расчетов сопоставлены с экспериментальными данными.

На точность определения параметров дробно-экспоненциальных ядер наследственности и, следовательно, на точность расчетов деформаций ползучести при реализации основных процедур в рамках рассмотренных нелинейных моделей могут оказывать влияние различные факторы. В кубической теории наиболее существенное

влияние оказывает достоверность выделения линейной области и точность построения функции, связывающей линейную и нелинейную области. В методе, основанном на подобии первичных кривых ползучести, точность расчетов зависит от выбора базовой кривой ползучести, по отношению к которой обосновывается подобие.

В теории, основанной на подобии изохронных диаграмм ползучести, принципиальное значение имеет выбор структуры ядра наследственности. С помощью ядра наследственности обосновывается согласно (4.3) подобие изохронных диаграмм ползучести, а согласно (4.4) определяется функция $\varphi[\varepsilon(0)]$, задающая диаграмму мгновенного деформирования и, соответственно, нелинейность модели вязкоупругости.

На рис. 6, в качестве примера, штрих-пунктирными линиями нанесены диаграммы мгновенного деформирования, рассчитанные исходя из минимизации функционала

$$\Phi(\alpha, \lambda, \overline{\varphi(\varepsilon_i, t_j = 0)}) = \sum_{i=1}^n \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sigma_j - \frac{\varphi(\varepsilon_i)}{1 + \lambda \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)(t_j)^\alpha}} \right)^2, \quad (4.8)$$

где в качестве ядра наследственности выбрано ядро Абеля. Отличие между значениями $\varphi[\varepsilon(0)]$, рассчитанными согласно (4.4) и (4.8), для микропластика (рис. 7, б) оказалось, как видно, несущественным. Однако для полипропилена это отличие достигает 35%. Характерно, что различие в восстановленных диаграммах мгновенного деформирования практически не влияет на точность расчетов деформаций ползучести при постоянных напряжениях (расчеты с использованием ядра Абеля показаны на рис. 7 штрих-пунктирными линиями). Это отличие может оказать влияние на точность расчетов деформаций ползучести при догрузках, частичных и полных разгрузках, а также при расчетах релаксации напряжений.

Из результатов сопоставления следует, что расчеты вполне удовлетворительно согласуются с экспериментом. Максимальная погрешность по величине деформации в рамках всех рассмотренных теорий изменяется в пределах от 5 до 15%, практически не зависит от типа нелинейности теории и возникает только на начальной стадии ползучести. Это, возможно, связано с неточностями измерений на начальной стадии испытаний, когда проявляются динамические эффекты, вызванные практически мгновенным приложением нагрузки.

Наиболее общим является, по-видимому, нелинейное определяющее уравнение (1.4), построенное исходя из условия подобия изохронных диаграмм ползучести. Это условие выполняется для широкого класса нелинейно-вязкоупругих материалов [3, 6, 11], в том числе и для материалов, для которых можно выделить область линейности, и для материалов, для которых выполняется условие подобия первичных кривых ползучести. На рис. 3 и 5, в качестве примера, штрих-пунктирными линиями нанесены результаты расчетов, выполненных по уравнению (4.7), как альтернатива расчетам по уравнениям (2.12) и (3.12). Совпадение результатов расчетов, как видно, вполне удовлетворительное.

Область применимости нелинейных определяющих уравнений (1.2) и (1.3) ограничивается классами материалов и уровнями напряжений, для которых выполняется условие линейности и условие подобия первичных кривых ползучести.

Заключение.

Задача определения параметров дробно-экспоненциальных ядер наследственности нелинейно-вязкоупругих материалов решена в рамках кубической теории вязкоупругости, а также теорий вязкоупругости, основанных на подобии первичных и изохронных диаграмм ползучести. При определении параметров ядер, независимо от характера нелинейности вязкоупругих свойств материалов, использованы частные решения, полученные экспериментально в опытах на одноосную ползучесть при постоянных напряжениях и представленные в виде таблиц нормированных по шкале времени исходных или преобразованных данных.

Методы определения параметров дробно-экспоненциальных ядер ползучести, рассмотренные в статье, позволяют определить параметры ядер для широкого класса нелинейно-вязкоупругих материалов с различным характером нелинейности. Методы апробированы экспериментально на задачах расчета деформаций ползучести ряда полимерных и композитных материалов при постоянных напряжениях. Апробация проведена в диапазоне изменения напряжений примерно на порядок, а длительностей нагружения – примерно на три порядка.

Наиболее эффективной является нелинейная теория вязкоупругости, основанная на подобии изохронных диаграмм ползучести, с ядром наследственности в форме дробно-экспоненциальной функции. Теория и метод определения параметров ядер ползучести обеспечивают удовлетворительное согласование результатов расчетов с данными экспериментов для нелинейно-вязкоупругих материалов с различным характером нелинейности.

РЕЗЮМЕ. Розв'язано задачу визначення параметрів дробово-експоненційних ядер спадковості нелінійно-в'язкопружних матеріалів. Проаналізовано методи визначення параметрів, що використовуються в кубічній теорії в'язкопружності та в нелінійних теоріях, які ґрунтуються на умовах подібності первісних кривих повзучості та ізохронних діаграмах повзучості. Визначено та експериментально апробовано параметри дробово-експоненційних ядер спадковості для орієнтованого поліпропілену, нейлонових волокон FM 3001 і FM 10001, мікропластика, склопластика (ТС 8/3-250, склопластика СВМ) та склопластика контактного формування.

1. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука.– 1970. – 240 с.
2. *Керштейн И.М., Степанов Р.Д., Огибалов П.М.* Область линейности деформационных свойств стеклопластика контактного формования // *Механика полимеров.* – 1970. – № 3. – С. 404 – 410.
3. *Колтунов М.А.* Ползучесть и релаксация. – М.: Высшая школа, 1976. – 277 с.
4. *Мартыросян М.М.* О кратковременной ползучести стеклопластика СВМ // *Механика полимеров.*– 1965. – № 2. – С.47 – 54.
5. *Работнов Ю.Н., Паперник А.Х., Звонов Е.Н.* Таблицы дробно-экспоненциальной функции отрицательных параметров и интеграла от неё. – М.: Наука, 1969. – 132 с.
6. *Работнов Ю.Н., Паперник А.Х., Степанычев Е.И.* Описание ползучести композиционных материалов при растяжении и сжатии // *Механика полимеров.*– 1973. – № 5. – С. 779 – 785.
7. *Розовский М.И.* Ползучесть и длительное разрушение материалов // *Журнал техн. физики.* – 1951.– **21**, № 11. – С. 1311 – 1318.
8. *Соколов Е.А., Максимов Р.Д.* Возможности предсказания ползучести армированного полимерными волокнами пластика по свойствам компонентов // *Механика полимеров.*– 1978. – № 6. – С. 1005 – 1012.
9. *Christensen R.M.* Theory of viscoelasticity. An Introduction. – New-York and London: Academic Press Inc., 1971. – 338 p.
10. *Findley W.N., Lai J.S., Onaran K.* Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials. – Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 1976. – 367 p.
11. *Golub V. P., Fernati P. V., Lyashenko Ya. G.* Determining the Parameters of the Fractional Exponential Heredity Kernels of Linear Viscoelastic Materials // *Int. App. Mech.* – 2008.– **44**, N9. – P. 963 – 974.
12. *Golub V. P., Kobzar' Yu. M., Fernati P. V.* Calculating the Linear Creep Strains of Viscoelastic Fibers under Tension // *Int. App. Mech.* – 2005. – **41**, N 5. – P. 543 – 551.
13. *Golub V. P., Kobzar' Yu. M., Fernati P. V.* Nonlinear Creep of Unidirectional Fibrous Composites Tensioned along the Reinforcement // *Int. App. Mech.* – 2007. – **43**, N 5. – P. 491 – 503.
14. *Golub V. P., Maslov B.P., Fernati P.V.* Identification of the Hereditary Kernels of Isotropic Linear Viscoelastic Materials in Combined Stress state. 1. Superposition of Shear and Bulk creep // *Int. App. Mech.* – 2016. – **52**, N 2. – P. 165 – 175.
15. *Golub V. P., Maslov B. P., Fernati P.V.* Identification of the Hereditary Kernels of Isotropic Viscoelastic Materials in Combined Stress State. 2. Proportional Deviators // *Int. App. Mech.* – 2016. – **52**, N 6. – P. 648 – 660.

16. *Golub V.P., Ragulina V.S., Fernati P.V.* Determining the Parameters of the Hereditary Kernels of Nonlinear Viscoelastic Isotropic Materials in Torsion // *Int. App. Mech.* – 2015. – **51**, N 2. – P. 196 – 206
17. *Gradowchyk M.H.* On the accuracy of the Green–Rivlin representation for viscoelastic materials // *Int. J. of Solids and Struct.* – 1969. – **5**, N 8. – P. 873 – 877.
18. *Green A.E., Rivlin R.S.* The mechanics of non-linear materials with memory // *Arch. Rat. Mech. Anal.* – 1957. – **1**. – P. 1 – 21.
19. *Leaderman H.* Elastic and creep properties of filaments materials and other high polymers. – Washington: Textile Foundation, 1943. – 278 p.
20. *Marin J., Webber A.C., Weissmann G.F.* Creep–time relations for nylon in tension, compression, bending, and torsion // *Proc. ASTM.* – 1954. – **54**. – P. 1313 – 1343.
21. *More J.J., Garbow B.S., Hillstrom K.E.* Users Guide to Minipack // Argonne National Laboratory Publication ANL–80–74. – 1980.
22. *Rabotnov Y.N.* Creep problems in structural members. – Amsterdam: North–Holland Publishing Company, 1969. – 822 p.
23. *Sachs L.* Statistische Auswertungsmethoden. – Heidelberg: Springer-Verlag, 1972. – 600 p.
24. *Volterra V.* Leçons sur les fonctions de lignes. – Paris: GoutierVillard, 1913. – 230 p.
25. *Ward I.M., Onat E.T.* Non-linear mechanical behaviour of oriented polypropylene // *J. Mech. Phys. Solids.* – 1963. – **11**, N 4. – P. 217 – 229.

Поступила 04.07.2016

Утверждена в печать 14.03. 2017

