

А.З.Галишин<sup>1</sup>, А.А.Золочевский<sup>2</sup>, С.Н.Склепус<sup>3</sup>

**О ПРИМЕНИМОСТИ ОБОЛОЧЕЧНЫХ МОДЕЛЕЙ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И ПОВРЕЖДАЕМОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ**

<sup>1</sup>*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: galishin.alexander@gmail.com*

<sup>2</sup>*Национальный технический университет «ХПИ»,  
ул. Фрунзе, 21, 61000, Харьков, Украина, e-mail: azol@rambler.ru*

<sup>3</sup>*Институт проблем машиностроения им. А.Н.Подгорного НАН Украины,  
ул. Дм. Пожарского, 2/10, 61046, Харьков, Украина, e-mail: snsklepus@ukr.net*

**Abstract.** A stress-strain state and damageability of cylindrical shells are studied when the shells are in the creep state under action of internal pressure. The solutions of the problem for shells of different thickness that is based on the rectilinear element and Kirchhoff-Love hypotheses are compared with the spatial solutions for the axisymmetrically loaded hollow cylinder. An effect of proportion of geometrical sizes on the exactness of the shell's solutions is studied. The practical recommendations are proposed relative to using the shell's models in the engineer analysis of creep and damageability owing to creep of cylindrical shells.

**Key words:** creep, damage, hollow cylinder, cylindrical shell.

**Введение.**

В технике широко применяются тонкостенные конструкции в виде оболочек вращения. Для их расчета используются различные кинематические модели, основанные на классических гипотезах Кирхгофа – Лява или на уточненных гипотезах типа прямолинейного элемента [2]. Расчеты оболочек с использованием классической модели приведены в [2, 5, 9, 10, 16, 18]. Уточненные модели теории оболочек используются в [2, 7, 8, 10 – 14, 16, 17]. Начально-краевые задачи по определению напряженно-деформированного состояния (НДС) в оболочках с учетом ползучести и повреждаемости вследствие ползучести представлены в публикациях [3, 5, 7, 8, 13, 14, 16 – 18 и др.]. Работы, посвященные изучению пределов применимости уточненных оболочечных моделей в задачах ползучести для тел вращения с учетом повреждаемости материала, в литературе отсутствуют.

В работе [18] авторами исследованы ползучесть и повреждаемость вследствие ползучести полого цилиндра, нагруженного внешним давлением. Исследования проведены в рамках осесимметричной пространственной постановки и в рамках классической теории оболочек Кирхгофа – Лява с учетом различного поведения сплава АК4-1Т [1] при растяжении и сжатии в условиях ползучести. Уточненные оболочечные модели не использованы.

В данной статье на примере цилиндрической оболочки, нагруженной внутренним давлением, проведено исследование применимости различных оболочечных моделей к определению НДС и повреждаемости цилиндрических оболочек, функционирующих в условиях ползучести. Решения для оболочек различной толщины, основанные на гипотезах прямолинейного элемента, а также на гипотезах Кирхгофа – Лява сопоставлены с решением пространственной задачи для осесимметрично нагруженного полого цилиндра.

### 1. Постановка и метод решения начально-краевой задачи ползучести в рамках пространственной модели.

Рассмотрим круговой осесимметрично нагруженный полый цилиндр в цилиндрической системе координат  $r z \varphi$ . Ось  $z$  совпадает с осью симметрии. Полагаем, что температура цилиндра  $T$  постоянна во времени и выполняется условие  $T = T_0$ , где  $T_0$  – начальная температура (температура, при которой напряжения и деформации отсутствуют). Цилиндр выполнен из изотропного материала.

Задачу решаем в геометрически линейной квазистатической постановке в предположении, что в процессе деформирования пластические деформации не возникают. Компоненты тензора скоростей полных деформаций  $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e(r, z, t)$  представим в виде суммы скоростей упругих деформаций  $\dot{\varepsilon}_{ij}^e(r, z, t)$  и скоростей деформаций ползучести  $\dot{p}_{ij}(r, z, t)$ , т.е.

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = \dot{\varepsilon}_{rr}^e + \dot{p}_{rr}; \quad \dot{\varepsilon}_{zz} = \dot{\varepsilon}_{zz}^e + \dot{p}_{zz}; \quad \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^e + \dot{p}_{\varphi\varphi}; \quad \dot{\varepsilon}_{rz} = \dot{\varepsilon}_{rz}^e + \dot{p}_{rz}.$$

Здесь и далее точка над символами означает полную производную по времени  $t$ .

Основные неизвестные задачи ползучести и повреждаемости вследствие ползучести в произвольной точке цилиндра, в том числе в точках пространственной дискретизации краевой задачи, можно определить из решения задачи Коши по времени для системы обыкновенных дифференциальных уравнений [5, 18]

$$\begin{aligned} \frac{du_r}{dt} = \dot{u}_r; \quad \frac{du_z}{dt} = \dot{u}_z; \quad \frac{d\varepsilon_{rr}}{dt} = \dot{\varepsilon}_{r,r}; \quad \frac{d\varepsilon_{zz}}{dt} = \dot{\varepsilon}_{z,z}; \quad \frac{d\varepsilon_{\varphi\varphi}}{dt} = \frac{\dot{u}_r}{r}; \quad \frac{d\gamma_{rz}}{dt} = 2 \frac{d\varepsilon_{rz}}{dt} = \dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r}; \\ \frac{d\sigma_{rr}}{dt} = \lambda (\dot{\varepsilon}_{zz} + \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{p}_{zz} - \dot{p}_{\varphi\varphi}) + \lambda_1 (\dot{\varepsilon}_{rr} - \dot{p}_{rr}); \\ \frac{d\sigma_{zz}}{dt} = \lambda (\dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{p}_{rr} - \dot{p}_{\varphi\varphi}) + \lambda_1 (\dot{\varepsilon}_{zz} - \dot{p}_{zz}); \\ \frac{d\sigma_{\varphi\varphi}}{dt} = \lambda (\dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{zz} - \dot{p}_{rr} - \dot{p}_{zz}) + \lambda_1 (\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{p}_{\varphi\varphi}); \\ \frac{d\sigma_{rz}}{dt} = G (\dot{\gamma}_{rz} - 2\dot{p}_{rz}); \quad \frac{dp_{rr}}{dt} = \dot{p}_{rr}; \quad \frac{dp_{zz}}{dt} = \dot{p}_{zz}; \\ \frac{dp_{\varphi\varphi}}{dt} = \dot{p}_{\varphi\varphi}; \quad \frac{dp_{rz}}{dt} = \dot{p}_{rz}; \quad \frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $u_r(r, z, t)$ ,  $u_z(r, z, t)$  – перемещения вдоль осей  $r$  и  $z$ ;  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $\lambda = E\nu/[(1-2\nu)(1+\nu)]$ ,  $\lambda_1 = \lambda + 2G$ ,  $G = E/[2(1+\nu)]$ , где  $E, \nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона;  $\psi$  – скалярный параметр повреждаемости (определяющие уравнения ползучести и кинетическое уравнение для параметра повреждаемости конкретизированы ниже).

В начальный момент времени  $t = 0$  деформации ползучести и параметр повреждаемости отсутствуют ( $p_{rr} = p_{zz} = p_{\varphi\varphi} = p_{rz} = \psi = 0$ ). Начальные условия для остальных неизвестных функций следуют из решения задачи упругого деформирования цилиндра.

Решение начальной задачи для системы уравнений (1) проводим методом Рунге – Кутты – Мерсона (РКМ) с автоматическим выбором шага по времени [4]. Правые части уравнений, в фиксированные моменты времени  $t \neq 0$ , соответствующие схеме РКМ, определяем с помощью решения вариационной задачи для функционала в форме Лагранжа для осесимметрично нагруженного тела вращения конечной длины [5, 18]

$$\Lambda(\dot{\mathbf{U}}) = 0,5 \iint_{\Omega} \left[ \lambda_1 \left( \dot{u}_{r,r}^2 + \dot{u}_{z,z}^2 + \frac{\dot{u}_r^2}{r^2} \right) + G \left( \dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r} \right)^2 + 2\lambda \left( \dot{u}_{r,r} \dot{u}_{z,z} + \frac{\dot{u}_r (\dot{u}_{r,r} + \dot{u}_{z,z})}{r} \right) \right] r dr dz -$$

$$- \iint_{\Omega} \left[ \dot{u}_{r,r} \dot{N}_r^c + \dot{u}_{z,z} \dot{N}_z^c + \frac{\dot{u}_r \dot{N}_\phi^c}{r} + \dot{N}_{rz}^c (\dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r}) \right] r dr dz - \int_{\partial\Omega_p} (\dot{P}_n \dot{u}_n + \dot{P}_\tau \dot{u}_\tau) d\partial\Omega. \quad (2)$$

Здесь  $\dot{\mathbf{U}} = (\dot{u}_r(r, z, t), \dot{u}_z(r, z, t))$  – вектор скоростей перемещений;  $\Omega$  – меридиональное сечение тела;  $\partial\Omega_p$  – часть контура  $\partial\Omega$ , где приложены внешние силы,  $\dot{P}_n, \dot{P}_\tau$  – скорости нормальной и касательной составляющих внешних сил;  $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}$  – внешняя нормаль и касательная к контуру  $\partial\Omega$ ;  $\dot{u}_n = \dot{u}_r n_r + \dot{u}_z n_z$ ,  $\dot{u}_\tau = \dot{u}_z n_r - \dot{u}_r n_z$ ;  $n_r, n_z$  – направляющие косинусы нормали  $\mathbf{n}$ . Скорости «фиктивных» сил, обусловленных деформациями ползучести, вычисляем по формулам:

$$\dot{N}_r^c = [\lambda_1 \dot{p}_{rr} + \lambda (\dot{p}_{zz} + \dot{p}_{\phi\phi})]; \quad \dot{N}_z^c = [\lambda_1 \dot{p}_{zz} + \lambda (\dot{p}_{rr} + \dot{p}_{\phi\phi})];$$

$$\dot{N}_\phi^c = [\lambda_1 \dot{p} + \lambda (\dot{p}_{rr} + \dot{p}_{zz})]; \quad \dot{N}_{rz}^c = 2G \dot{p}_{rz}.$$

Скорости деформаций ползучести в функционале (2) принимаются известными и не варьируются.

Вариационные задачи для функционала (2) решаем методом Ритца в сочетании с методом R-функций [6, 15]. Метод R-функций позволяет точно учитывать геометрическую форму и граничные условия самого общего вида. При этом приближенное решение краевой задачи представляем в виде формулы – структуры решения, которая точно удовлетворяет всем (общая структура решения) или части (частичная структура решения) граничных условий и является инвариантной относительно геометрической формы области.

## 2. Постановка и метод решения задачи ползучести на основе оболочечных моделей.

Рассматривая осесимметрично нагруженный полый цилиндр в рамках теории оболочек средней толщины, предполагаем, что выполняются гипотезы прямолинейного элемента [2]. В соответствии с данными гипотезами связь между осевым  $u_z$  и нормальным  $u_\zeta$  перемещениями произвольной точки оболочки с соответствующими перемещениями точки срединной поверхности  $u, w$  имеет вид

$$u_z = u + \zeta \psi_z; \quad u_\zeta = w; \quad \psi_z = -w' + \gamma_z, \quad (3)$$

где  $\zeta$  – координата, которая отсчитывается по нормали к срединной поверхности с радиусом  $r = R$ ;  $\psi_z, \gamma_z$  – полный угол прямолинейного элемента и угол, обусловленный поперечным сдвигом, соответственно; штрих означает производную по координате  $z$ . Используя (3) и соотношения Коши, связь между компонентами тензора деформаций в произвольной точке оболочки  $\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\phi\phi}, \varepsilon_{z\zeta}$ , компонентами деформации срединной поверхности  $\varepsilon_z, \varepsilon_\phi$ , параметром изменения ее кривизны  $\kappa_z$  и углом сдвига  $\gamma_z$  представим в виде [10]

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_z + \zeta \kappa_z; \quad \varepsilon_{\phi\phi} = \varepsilon_\phi / a_\phi; \quad 2\varepsilon_{z\zeta} = \gamma_z$$

$$(\varepsilon_z = u'; \quad \varepsilon_\phi = w/R; \quad \kappa_z = \psi_z'; \quad a_\phi = 1 + \zeta/R). \quad (4)$$

Компоненты напряжений определяются равенствами:

$$\sigma_{zz} = B_{11} \varepsilon_{zz} + B_{12} \varepsilon_{\phi\phi} - \sigma_{zz}^a; \quad \sigma_{\phi\phi} = B_{12} \varepsilon_{zz} + B_{11} \varepsilon_{\phi\phi} - \sigma_{\phi\phi}^a; \quad \sigma_{z\zeta} = B_{33} \varepsilon_{z\zeta} - \sigma_{z\zeta}^a, \quad (5)$$

где  $B_{ij}$  – жесткостные коэффициенты  $B_{11} = E/(1-\nu^2)$ ;  $B_{12} = \nu B_{11}$ ;  $B_{33} = 2G$ .

Величины с индексом «а» означают дополнительные напряжения:

$$\sigma_{zz}^a = B_{11}(p_{zz} + \nu p_{\varphi\varphi}); \quad \sigma_{\varphi\varphi}^a = B_{11}(p_{\varphi\varphi} + \nu p_{zz}); \quad \sigma_{z\zeta}^a = B_{33}p_{z\zeta},$$

где  $p_{zz}, p_{\varphi\varphi}, p_{z\zeta}$  – компоненты деформаций ползучести, которые зависят от напряжений, констант ползучести и параметра повреждаемости материала и определяются путем численного интегрирования физических уравнений. Как и в случае пространственной задачи, это интегрирование осуществляется методом РКМ.

Вводя в рассмотрение интегральные характеристики напряженного состояния (радиальное  $N_r$ , осевое  $N_z$  усилия и осевой изгибающий момент  $M_z$ ) и, используя уравнения равновесия, приведенные, например, в [16], кинематические (4) и физические (5) уравнения, решение задачи сведем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка вида

$$\mathbf{Y}' = P(z)\mathbf{Y} + \mathbf{f}; \quad \mathbf{Y} = \{N_r, N_z, M_z, u_r, u_z, \psi_z\}, \quad (6)$$

где  $P(z)$  – матрица системы, зависящая от упругих констант материала;  $\mathbf{f}$  – вектор свободных членов, который зависит еще и от деформаций ползучести, и параметра повреждаемости. Решение системы (6) должно удовлетворять граничным условиям на торцах цилиндра. Ненулевые элементы матрицы  $P(z)$  и вектора  $\mathbf{f}$  определяются равенствами:

$$\begin{aligned} p_{12} = -p_{54} = -\mu_1/R; \quad p_{13} = -p_{64} = \mu_2/R; \quad p_{14} = (C_{02} + \mu_1 C_{01} - \mu_2 C_{11})/R^2; \\ p_{31} = -p_{46} = 1; \quad p_{41} = 1/C_{33}; \quad p_{52} = C_{20}/\delta; \quad p_{53} = p_{62} = -C_{10}/\delta; \quad p_{63} = C_{00}/\delta; \\ f_1 = -(\mu_1 N_z^a + N_\varphi^a - \mu_2 M_z^a)/R - q_\zeta; \quad f_2 = -q_z; \quad f_3 = -m_z; \quad f_4 = Q_z^a/C_{33}; \quad (7) \\ f_5 = (C_{20} N_z^a - C_{10} M_z^a)/\delta; \quad f_6 = -(C_{10} N_z^a - C_{00} M_z^a)/\delta, \end{aligned}$$

где приняты обозначения

$$\mu_1 = (C_{10} C_{11} - C_{01} C_{20})/\delta; \quad \mu_2 = (C_{00} C_{11} - C_{01} C_{10})/\delta; \quad \delta = C_{00} C_{20} - C_{10}^2.$$

Входящие в (7) величины  $q_z, q_\zeta, m_z$  означают приведенные к срединной поверхности распределенные поверхностные нагрузки и момент [2]. Интегральные жесткостные характеристики  $C_{pq}, C_{33}$ , а также дополнительные усилия  $N_z^a, N_\varphi^a, Q_z^a$  и момент  $M_z^a$  определяются равенствами

$$\begin{aligned} C_{pq} = B_{11} F \{ b_q \zeta^p \} \quad (p, q = 0, 1, 2); \quad C_{33} = 2Gh; \quad b_0 = a_\varphi; \quad b_1 = \nu; \quad b_2 = a_\varphi^{-1}; \\ F \{ \dots \} = \int_{-h/2}^{h/2} (\dots) d\zeta; \quad N_z^a = F \{ \sigma_{zz}^a a_\varphi \}; \quad N_\varphi^a = F \{ \sigma_{\varphi\varphi}^a \}; \quad Q_z^a = F \{ \sigma_{z\zeta}^a a_\varphi \}; \quad M_z^a = F \{ \sigma_{z\zeta}^a a_\varphi \zeta \}. \quad (8) \end{aligned}$$

Входящие в (8) интегралы вычисляем численно на основании процедуры, сочетающей методы Симпсона и Ньютона. На каждом шаге по времени краевую задачу (6) решаем методом Рунге – Кутты с дискретной ортогонализацией по С.К.Годунову.

Здесь необходимо отметить следующее:

1) приведенные выше уравнения предназначены для описания деформирования в условиях ползучести цилиндрических оболочек средней толщины с учетом повреждаемости и при отсутствии тепловых воздействий. В этих уравнениях учитываются величины  $\zeta/R$ . Удержание этих величин может оказаться целесообразным для оболочек средней толщины и неуместным для тонких оболочек;

2) независимо от того, учитываем или не учитываем величины  $\zeta/R$ , разрешающие уравнения, основанные на гипотезах Кирхгофа – Лява, могут быть получены из (7), если в них положить  $1/C_{33} = 0$ , а в равенствах (3), (4) положить  $\gamma_z = 0$  [11];

3) в работе [12] показано, что при наличии температурных деформаций учет величин  $\zeta/R$  может привести к появлению значительных «фиктивных» напряжений. Поэтому в температурных задачах этими величинами следует пренебрегать по сравнению с единицей.

### 3. Численные результаты.

Рассмотрим ползучесть свободно опертой цилиндрической оболочки из алюминиевого сплава АК4-1Т при температуре  $T = T_0 = 473$  К, нагруженной внутренним давлением интенсивности  $P_{inn} = \text{const}$ . Геометрические размеры: длина  $L = 0,1$  м, радиус срединной поверхности  $R = 0,1$  м, толщина  $h$  – варьируется. Упругие константы:  $E = 60$  ГПа,  $\nu = 0,35$ .

Расчеты НДС рассматриваемой оболочки в упругой постановке показали, что в данной задаче преобладающими являются растягивающие напряжения. Поэтому примем упрощенную модель ползучести, построенную только на экспериментальных данных сплава АК4-1Т при растяжении. В этом случае определяющие соотношения для скоростей деформаций ползучести имеют вид [5]

$$\dot{p}_{kl} = \sigma_e^m \psi^{-\beta} \left( \frac{\psi_*}{\psi_* - \psi} \right)^q \sqrt{3/2C} \frac{s_{kl}}{\sigma_i} \quad (k, l = \overline{1, 3}), \quad (9)$$

где  $\sigma_e = \sqrt{3/2C} \sigma_i$  – эквивалентное напряжение;  $\sigma_i = \sqrt{3/2 s_{kl} s_{kl}}$  – интенсивность напряжений;  $s_{kl} = \sigma_{kl} - [\delta_{kl}(\sigma_{kk})]/3$  – компоненты девиатора напряжений;  $\delta_{kl}$  – символ Кронекера.

Если в качестве скалярного параметра повреждаемости  $\psi$  принять удельную энергию рассеяния  $\psi = \int_0^t \sigma_{ij} \dot{p}_{ij} dt$ , то для параметра  $\psi$  будем иметь следующее кинетическое уравнение [5]:

$$\dot{\psi} = \sigma_e^{m+1} \psi^{-\beta} \left( \frac{\psi_*}{\psi_* - \psi} \right)^q. \quad (10)$$

Начальное значение  $\psi = 0$  соответствует неповрежденному состоянию при  $t = 0$ , а критическое значение  $\psi_* = \int_0^{t_*} \sigma_{ij} \dot{p}_{ij} dt$  соответствует времени завершения скрытого разрушения  $t = t_*$ .

Параметры материала в уравнениях (9), (10) имеют значения [1, 5]:

$$C = 1,69631 \cdot 10^{-5} \text{ МПа}^{-\frac{2m}{m+1}} \text{ ч}^{-\frac{2}{m+1}}; \quad m = 8; \quad \beta = 0; \quad q = 3; \quad \psi_* = 10 \text{ МДж/м}^3.$$

Граничные условия для краевой задачи в рамках пространственной постановки имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{u}_r = 0; \quad \dot{\sigma}_z = 0 \quad \text{для } z = \pm L/2; \quad \dot{\sigma}_r = -\dot{P}_{inn} = 0; \quad \dot{\sigma}_{zr} = 0 \quad \text{для } r = r_{inn} = R - h/2; \\ \dot{\sigma}_r = \dot{\sigma}_{zr} = 0, \quad \text{для } r = r_{out} = R + h/2. \end{aligned}$$

Интенсивность внутреннего давления  $P_{inn}$  определена формулой  $P_{inn} = (P_0 R)/r_{inn}$ , где  $P_0$  – давление, отнесенное к срединной поверхности ( $r = R$ ) цилиндра.

Отметим, что частичная структура решения, которая удовлетворяет только кинематическим граничным условиям для скоростей перемещений, имеет вид

$$\dot{u}_r = \omega \Phi_1; \quad \dot{u}_z = z \Phi_2,$$

где  $\Phi_1, \Phi_2$  – неопределенные компоненты структуры решения;  $\omega = (1/L)(L^2/4 - z^2) \geq 0$  – полоса  $\Omega$ , заключенная между линиями  $z = -L/2$  и  $z = L/2$  ( $\omega = 0, \omega_n = -1$  на границе  $\partial\Omega$ ,  $\omega > 0$  внутри полосы). При численной реализации неопределенные компоненты  $\Phi_1, \Phi_2$  представлены в виде конечных рядов:

$$\Phi_1(r, z, t) = \sum_{n=1}^{N_1} C_n^{(1)}(t) f_n^{(1)}(r, z); \quad \Phi_2(r, z, t) = \sum_{n=1}^{N_2} C_n^{(2)}(t) f_n^{(2)}(r, z),$$

где  $C_n^{(1)}(t), C_n^{(2)}(t)$  – неопределенные коэффициенты, которые на каждом временном шаге определяются согласно методу Рунге;  $t$  – некоторый фиксированный момент временной дискретизации схемы РКМ или дискретизации по времени для выдачи результатов расчета;  $\{f_n^{(1)}\}, \{f_n^{(2)}\}$  – системы линейно независимых функций. Здесь в качестве  $\{f_n^{(1)}\}, \{f_n^{(2)}\}$  использованы бикубические сплайны Шенберга. Системы сплайнов построены на регулярной сетке  $K_r \times K_z$ , где  $K_r, K_z$  – количество отрезков дискретизации вдоль осей  $Ox$  и  $Oz$ , соответственно.

Относительную толщину цилиндра  $h/R$  варьировали от 1/50 до 1/4 при различных величинах давления  $P_0$  (табл. 1). Величины давлений приняты такими, чтобы времена до разрушения  $t_*$  во всех вариантах расчета были близки.

Таблица 1

$h/R$	1/50	1/20	1/10	1/8	1/5	1/4
$P_0, \text{МПа}$	2,55	6,4	13,0	16,5	28,2	37,0
ПМ	4360	4172	4291	4304	4203	4279
1	$\frac{4594}{5}$	$\frac{4688}{12}$	$\frac{5200}{21}$	$\frac{5422}{26}$	$\frac{5562}{32}$	$\frac{5699}{33}$
2	$\frac{4628}{6}$	$\frac{4747}{14}$	$\frac{5461}{27}$	$\frac{5678}{32}$	$\frac{6360}{51}$	$\frac{6815}{59}$
3	$\frac{4613}{6}$	$\frac{4670}{12}$	$\frac{5265}{23}$	$\frac{5455}{27}$	$\frac{5752}{37}$	$\frac{6047}{41}$
4	$\frac{4627}{6}$	$\frac{4742}{14}$	$\frac{5471}{27}$	$\frac{5817}{35}$	$\frac{6577}{56}$	$\frac{7278}{70}$

Решение задачи ползучести цилиндра, сформулированной в рамках пространственной постановки, получено при следующих параметрах пространственной и временной дискретизации:  $K_r = 10, K_z = 20$ ; начальный шаг по времени  $\Delta t_0 = 10^{-3}$  ч; заданная погрешность вычислений в методе РКМ  $\delta = 10^{-4}$ . При численных расчетах критерием окончания процесса решения и определения времени до разрушения  $t_*$  было выполнение в какой-либо точке пространственной дискретизации такого условия:  $\psi \geq 0,9\psi_*$ .

При решении задачи в рамках теории оболочек рассмотрена правая симметричная половина оболочки  $0 \leq z \leq L/2$ . Используются следующие оболочечные модели: 1) гипотезы прямолинейного элемента с учетом  $\zeta/R$ ; 2) гипотезы прямолинейного элемента без учета  $\zeta/R$ ; 3) гипотезы Кирхгофа – Лява с учетом  $\zeta/R$ ; 4) гипотезы

Кирхгофа – Лява без учета  $\zeta/R$ . На меридиональное сечение оболочки наносили равномерную сетку, состоящую из 101 точки по  $z$  и 11 точек по толщине. Другие параметры дискретизации принимали значения:  $\Delta t_0 = 10^{-5}$  ч,  $\delta = 10^{-6}$ .

Граничные условия в рамках теории оболочек приняты в виде

$$N_r = u_z = \psi_z = 0 \text{ при } z = 0; \quad N_z = M_z = u_r = 0 \text{ при } z = L/2.$$

В результате расчетов установлено, что начало разрушения во всех случаях имеет место в центре цилиндра на внутренней поверхности. В табл. 1 приведены значения времени до разрушения  $t_*$  [ч], полученные по пространственной модели (ПМ) и на основе перечисленных оболочечных моделей 1 – 4, для которых под чертой приведены значения отклонения (в %) оболочечных решений относительно пространственного. Из этой таблицы видно, что с ростом отношения  $h/R$  относительная погрешность полученных по всем четырем моделям оболочек значений времени до разрушения возрастает. При этом наиболее близкие к пространственному решению результаты дает модель 1, а максимальное расхождение (70 %) – модель 4. Поэтому ниже представим результаты лишь для модели 1.

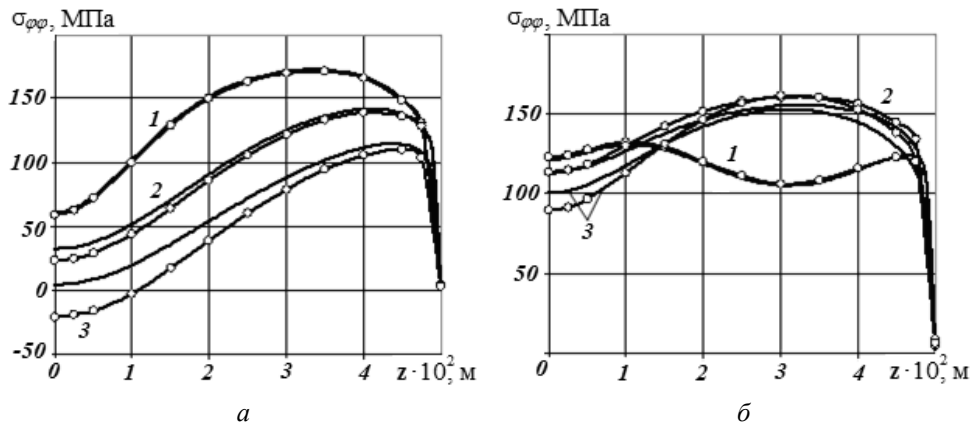


Рис. 1

На рис. 1 показаны графики изменения вдоль оси цилиндра окружных напряжений  $\sigma_{\varphi\varphi}$  на внутренней (рис. 1, а) и наружной (рис. 1, б) поверхностях цилиндра в момент времени  $t = t_*$  для  $h/R = 1/50, 1/10$  и  $1/5$  (кривые 1, 2, 3, соответственно). Здесь и далее линии с маркерами отвечают результатам пространственного решения.

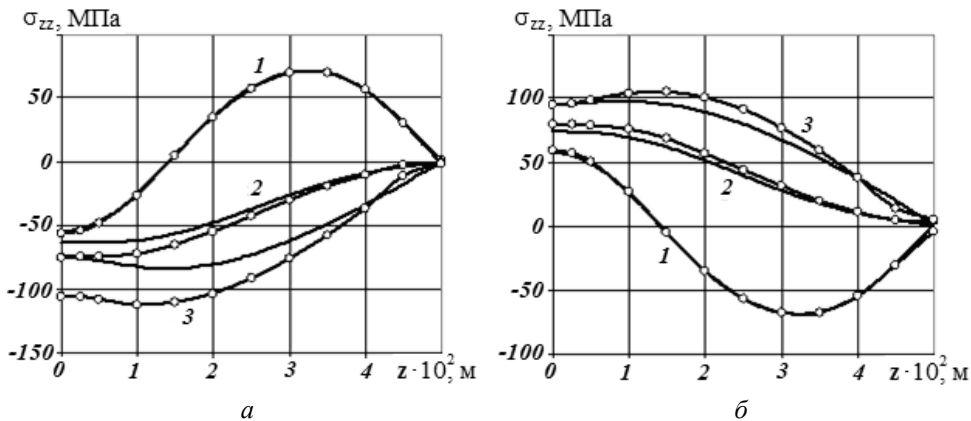


Рис. 2

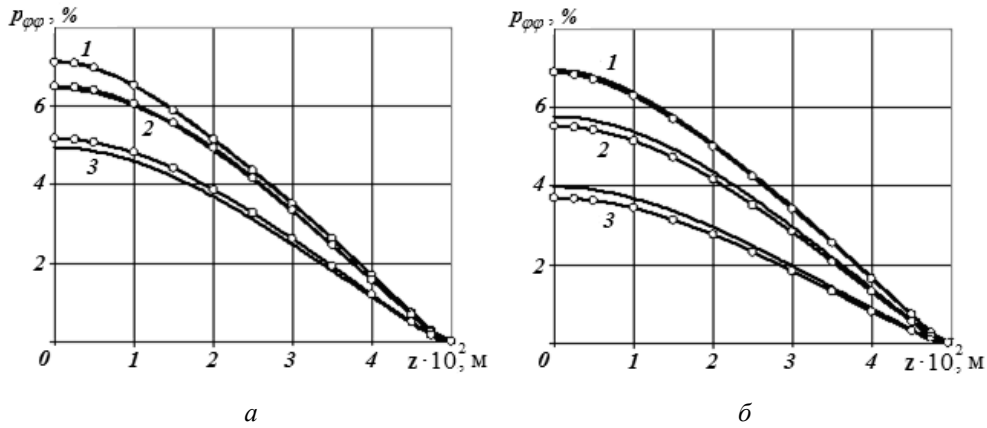


Рис. 3

На рис. 2 – 4 приведены аналогичные графики для осевых напряжений  $\sigma_{zz}$ , окружных  $p_{\varphi\varphi}$  и осевых  $p_{zz}$  деформаций ползучести.

Рис. 5 иллюстрирует изменение во времени параметра повреждаемости  $\psi$  (кривые 1) и окружных напряжений (кривые 2) в центре цилиндра на внутренней поверхности для  $h/R = 1/50$  (рис. 5, а),  $h/R = 1/10$  (рис. 5, б) и  $h/R = 1/5$  (рис. 5, в). Следует отметить, что для оболочки с  $h/R = 1/50$  графики изменения окружных напряжений качественно отличаются от соответствующих графиков при  $h/R = 1/10$  и  $h/R = 1/5$  (в начальные моменты времени для оболочки с  $h/R = 1/50$  напряжения возрастают, а для других соотношений – ниспадают).

В табл. 2 для разных соотношений  $h/R$  приведено сравнение результатов в различные моменты времени для радиальных перемещений срединной поверхности  $w$ , окружных напряжений  $\sigma_{\varphi\varphi}$ , параметра повреждаемости  $\psi$  и окружных деформаций ползучести  $p_{\varphi\varphi}$ , полученных в рамках пространственной постановки (над чертой) и на базе теории оболочек (под чертой) в центре цилиндра. Знаками «-» и «+» обозначены величины на внутренней и наружной поверхностях цилиндра, соответственно.

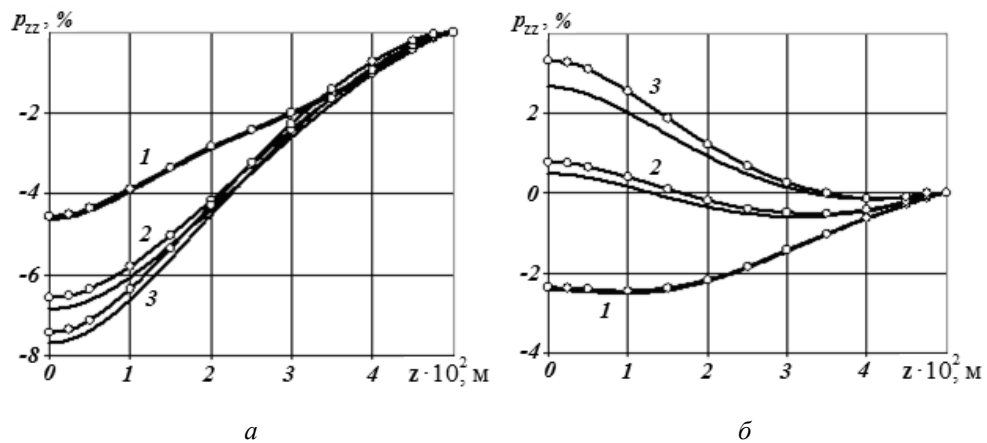


Рис. 4



Таблица 2

$h/R$	$t$ , ч	$w \cdot 10^4$ , м	$\sigma_{\text{фр}}^-$ , МПа	$\sigma_{\text{фр}}^+$ , МПа	$\psi^-$ , МДж/м <sup>3</sup>	$\psi^+$ , МДж/м <sup>3</sup>	$p_{\text{фр}}^-$ , %	$p_{\text{фр}}^+$ , %
1/50	0	2,14/2,13	131	125	0	0	0	0
	2000	14,6/13,9	125/126	134/133	1,66/1,55	1,60/1,51	1,26/1,19	1,22/1,16
	$t_{\text{с1}} = 4360$ $t_{\text{с2}} = 4594$	$\frac{71,6}{72,0}$	$\frac{58,8}{60,4}$	$\frac{123}{121}$	$\frac{9,02}{9,01}$	$\frac{8,84}{8,87}$	$\frac{7,13}{7,14}$	$\frac{6,88}{6,96}$
1/10	0	2,46/2,43	133/134	158/157	0	0	0	0
	2000	$\frac{16,3}{13,5}$	$\frac{64,7}{72,5}$	$\frac{150}{148}$	$\frac{2,37}{1,91}$	$\frac{2,05}{1,66}$	$\frac{1,58}{1,26}$	$\frac{1,30}{1,09}$
	$t_{\text{с1}} = 4291$ $t_{\text{с2}} = 5200$	$\frac{61,9}{62,1}$	$\frac{22,9}{32,2}$	$\frac{114}{113}$	$\frac{9,03}{9,00}$	$\frac{8,46}{8,39}$	$\frac{6,51}{6,44}$	$\frac{5,52}{5,76}$
1/5	0	2,30/2,22	99,7/105	161/161	0	0	0	0
	2000	14,5/11,1	4,0/26,6	134/137	2,86/2,21	2,48/1,77	1,52/1,12	1,04/0,84
	$t_{\text{с1}} = 4203$ $t_{\text{с2}} = 5562$	$\frac{46,6}{44,9}$	$\frac{-21,3}{4,26}$	$\frac{89,3}{100}$	$\frac{9,0}{9,0}$	$\frac{8,51}{7,97}$	$\frac{5,17}{4,93}$	$\frac{3,70}{3,97}$

Из анализа числовых данных рисунков и таблиц можно сделать вывод, что погрешность вычисления перемещений, напряжений, деформаций и параметра повреждаемости по оболочечным теориям возрастает с ростом относительной толщины цилиндра. Из таблиц также следует, что с ростом времени увеличивается также погрешность вычисления перемещений и напряжений.

#### Анализ результатов.

В рассмотренных задачах при малых значениях относительных толщин ( $h/R \leq 1/10$ ) получено хорошее согласование результатов как для параметров НДС, так и для времени до разрушения. При дальнейшем увеличении относительной толщины оболочки погрешность вычисления параметров НДС и времени до разрушения возрастает. Наилучшее согласование оболочечных результатов с пространственными дает модель, основанная на гипотезах прямолинейного элемента при удержании в разрешающих уравнениях величины  $\zeta/R$ . Данную модель можно рекомендовать для исследования ползучести, повреждаемости и оценки длительной прочности оболочек средней толщины при отсутствии температурных воздействий. При наличии же таковых следует использовать модель прямолинейного элемента без учета величины  $\zeta/R$ .

#### Заключение.

Получено решение задачи по определению напряженно-деформированного состояния и повреждаемости цилиндрических оболочек, находящихся в условиях ползучести под действием внутреннего давления. Решения для оболочек различной толщины, основанные на гипотезах прямолинейного элемента и Кирхгофа – Лява,

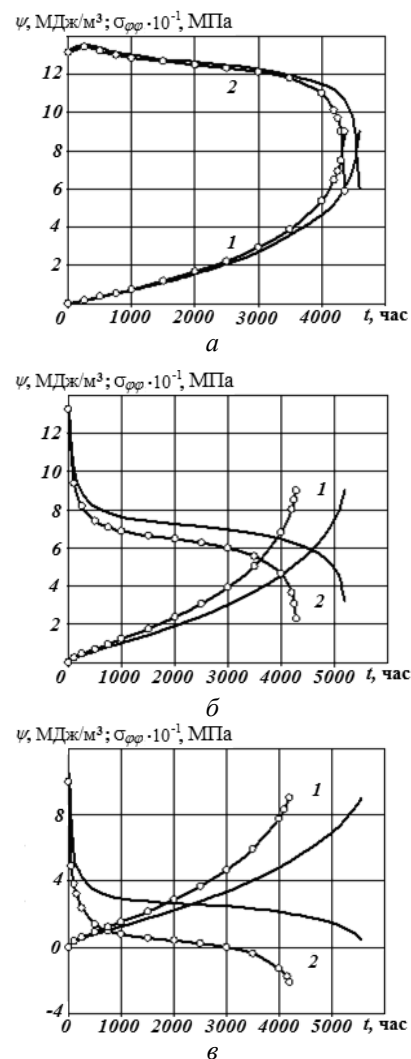


Рис. 5

сопоставлены с пространственными решениями для осесимметрично нагруженного полого цилиндра. Исследовано влияние соотношения геометрических параметров на точность оболочечных решений. Даны практические рекомендации по применению оболочечных моделей в инженерных расчетах на ползучесть и повреждаемость вследствие ползучести цилиндрических оболочек.

**РЕЗЮМЕ.** Досліджено напружено-деформований стан та пошкоджуваність циліндричних оболонок, що перебувають в умовах повзучості під дією внутрішнього тиску. Розв'язки задачі для оболонок різної товщини, що базуються на гіпотезах прямолінійного елемента та Кірхгофа – Лява, співставлено з просторовими розв'язками для осесиметрично навантаженого порожнистого циліндра. Досліджено вплив співвідношення геометричних розмірів на точність оболонкових розв'язків. Запропоновано практичні рекомендації щодо застосування оболонкових моделей в інженерних розрахунках повзучості та пошкоджуваності внаслідок повзучості циліндричних оболонок.

1. Горев Б.В., Рубанов В.В., Соснин О.В. О ползучести материалов с разными свойствами при растяжении и сжатии // Пробл. прочности. – 1979. – № 7. – С. 62 – 67.
2. Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – К.: Наук. думка, Академперіодика, 2006. – 474 с.
3. Гудрамович В. С. Теория ползучести и ее приложения к расчету элементов тонкостенных конструкций. – К.: Наук. думка, 2005. – 221 с.
4. Золочевский А.А. Об учете разносопротивляемости материалов растяжению и сжатию в задачах ползучести оболочек // Динамика и прочность машин. – 1980. – 32. – С. 8 – 13.
5. Золочевский А.А., Склепус А.Н., Склепус С.Н. Нелинейная механика деформируемого твердого тела. – Харьков: «Бізнес Інвестор Груп», 2011. – 720 с.
6. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.
7. Склепус С.Н. Ползучесть и повреждаемость пологих оболочек средней толщины из материалов с характеристиками, зависящими от вида нагружения // Пробл. машиностроения. – 2010. – 13, № 6. – С. 28 – 35.
8. Altenbach H., Naumenko K. Shear correction factors in creep-damage analysis of beams, plates and shells // JSME Int. J. Ser. A. – 2002. – 45, N 1. – P. 77 – 83.
9. Babeshko M.E., Galishin A.Z., Semenets A.I., Shevchenko Yu.N. Influence of the Stress Mode on the Strength of High-Pressure Vessels // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 3. – P. 319 – 325.
10. Bepalova E.I., Urusova G.P. Stress State of Branched Shells of Revolution Subject to Transverse Shear and Reduction // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 4. – P. 410 – 419.
11. Galishin A.Z. Axisymmetric Thermoelastoplastic State of Laminar Orthotropic Shells of Revolution with a Branched Meridian // Int. Appl. Mech. – 1993. – 29, N 1. – P. 53 – 60.
12. Galishin A.Z., Shevchenko Yu.N. Calculating the Thermoelastic Stress State of Medium-Thickness Shells of Revolution // Int. Appl. Mech. – 2008. – 44, N 5. – P. 526 – 533.
13. Galishin A., Zolochevsky A., Kühhorn A., Springmann M. Transversal shear effect in moderately thick shells from materials with characteristics dependent on the kind of stress state under creep-damage conditions: Numerical modeling // Tech. Mech. – 2009. – 29, N. 1. – P. 48 – 59.
14. Naumenko K. On the use of the first order shear deformation models of beams, plates and shells in creep lifetime estimations // Tech. Mech. – 2000. – 20, N. 3. – P. 215 – 226.
15. Rvachev V.L., Sheiko T.I. R-functions in boundary value problems in mechanics // Appl. Mech. Reviews. – 1995. – 48. – P. 151 – 188.
16. Shevchenko Yu.N., Galishin A.Z., Babeshko M.E. Thermoelastoplastic Deformation of Compound Shells of Revolution made of a Damageable Material // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 6. – P. 607 – 613.
17. Zolochevsky A., Galishin A., Kühhorn A., Springmann M. Transversal shear effect in moderately thick shells from materials with characteristics dependent on the kind of stress state under creep-damage conditions: Theoretical framework // Tech. Mech. – 2009. – 29, N 1. – P. 38 – 47.
18. Zolochevsky A., Sklepus S., Galishin A., Kühhorn A., Kober M. A comparison between the 3D and the Kirchhoff-Love solutions for cylinders under creep-damage conditions // Tech. Mech. – 2014. – 34, N 2. – P. 104 – 113.

Поступила 12.07.2016

Утверждена в печать 14.03.2017