

А. Я. Григоренко<sup>1</sup>, И. А. Лоза<sup>2</sup>

**ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ АКУСТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНАХ  
В ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ ИЗ НЕПРЕРЫВНО НЕОДНОРОДНОГО  
ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА**

<sup>1</sup>*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: ayagrigorenko@yandex.ru.*

<sup>2</sup>*Национальный транспортный университет,  
ул. Омеляновича-Павленко, 1, 01010, Киев, Украина; e-mail: dukeigor@ukr.net.*

**Abstract.** The problem on propagation of axisymmetric electroelastic waves in the hollow cylinders made of functionally graded piezoceramic material polarized in the radial direction. The material properties are assumed to be changed over the thickness by the exponential law. The cylinder lateral surfaces are free of loads and are covered by thin electrodes, to which the alternating potential is applied. To solve the problem, an efficient numerical-analytical method is offered. An initial three-dimensional problem of electroelasticity in the partial derivatives is reduced to the boundary-value problem for the ordinary differential equations. For that, the components of elastic properties tensor, displacement vector, electric induction, and electrostatic potential are represented in the form of running waves in the axial direction. The system of equations is solved by the stable method of discrete orthogonalization. The results of numerical analysis for the piezoceramics PZT4 are shown.

**Key words:** kinematic characteristic, progressing elastoelastic waves, hollow cylinder, piezoceramic functionally gradient material.

**Введение.**

К настоящему времени выполнено значительное количество работ, посвященных исследованию волновой картины в бесконечном упругом цилиндре кругового поперечного сечения. Содержание проведенных исследований достаточно полно отражено в обзорах [2, 15 и др.] и монографиях [1, 5 и др.]. Связанные поля значительно усложняют проведение исследований. Так, для пьезокерамического цилиндра только в случае осевой поляризации пьезокерамики для продольных осесимметричных волн и в случае окружной поляризации для крутильных волн возможно представление решения через специальные функции. Учет неоднородности материала цилиндра еще более усложняет задачу, в то время как в большинстве устройств используются именно неоднородные пьезоэлектрические материалы (биморфы). Исследования, посвященные этой проблематике известны [4, 6]. В настоящее время все более широкое применение имеют так называемые функционально-градиентные пьезоэлектрические материалы, сочетающие преимущества биморфов и лишенные проблемной зоны – поверхности соединения материалов с различными коэффициентами температурного расширения. Попытка учесть непрерывно изменяющиеся свойства материала приводит к тому, что модули материала являются не константами, а функциями по одной из координат [8, 9, 13 и др.]. Это является серьезной проблемой для применения многих численных методов.

В данной работе рассмотрена осесимметричная задача о распространении вынужденных акустоэлектрических волн в неоднородном по толщине полом цилиндра из функционально градиентной пьезокерамики, поляризованной в радиальном направлении. Первые наборы частных решений дифференциальных уравнений в частных производных (уравнений Ламе) в цилиндрических координатах были построены в работах Похгаммера [14] и Кри [10, 11]. Для решения задачи о распространении вынужденных акустоэлектрических волн в неоднородном по толщине полом цилиндра из функционально градиентной пьезокерамики, поляризованной в радиальном направлении, предложен эффективный численно-аналитический подход. На основании предложенного подхода проведен кинематический анализ распространяющихся вдоль оси цилиндра акустоэлектрических волн. Исследовано также влияние фактора неоднородности на кинематические характеристики распространяющихся волн.

### 1. Постановка задачи. Основные уравнения для полых цилиндров.

Осесимметричные продольные уравнения движения волн в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$  имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_r = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_z = 0. \quad (1)$$

Уравнения электростатики:

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{1}{r} D_r + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0; \quad E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (2)$$

Геометрические соотношения:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} u_r; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad \varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}. \quad (3)$$

В (1) – (3) принято:  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $\rho$  – плотность материала;  $\omega$  – круговая частота;  $u_i$  – компоненты вектора перемещений;  $D_i$  – компоненты вектора электрической индукции;  $E_i$  – компоненты вектора напряженности электрического поля;  $\varphi$  – электростатический потенциал;  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора деформаций.

Физические соотношения для пьезокерамического материала, поляризованного в радиальном направлении, имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{33}\varepsilon_{rr} + c_{13}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}\varepsilon_{zz} - e_{33}E_r; & \sigma_{\theta\theta} &= c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{11}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{12}\varepsilon_{zz} - e_{13}E_r; \\ \sigma_{zz} &= c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{12}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{11}\varepsilon_{zz} - e_{13}E_r; & \sigma_{rz} &= 2c_{55}\varepsilon_{rz} - e_{15}E_z; \\ D_r &= e_{33}\varepsilon_{rr} + e_{13}\varepsilon_{\theta\theta} + e_{13}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{33}E_r; & D_z &= 2e_{15}\varepsilon_{rz} + \varepsilon_{33}E_z. \end{aligned} \quad (4)$$

где  $c_{ij}$  – компоненты тензора модулей упругости;  $e_{ij}$  – компоненты тензора пьезомодулей;  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора диэлектрической проницаемости материала. Указанные выше компоненты являются функциями радиальной координаты.

Рассмотрим материал, состоящий из двух компонент – стали и пьезокерамики. Характеристики материала изменяются следующим образом по толщине:

$$P(r) = (P_m - P_p)V(r) + P_p, \quad (5)$$

где  $V(z)$  выражает объемную долю керамики и определяется формулой:

$$V(r) = \left( \frac{r - R_0}{2h} + \frac{1}{2} \right)^n. \quad (6)$$

Граничные условия на боковых поверхностях цилиндра (при  $r = R_0 \pm h$ ) примем следующими: поверхности свободны от внешних усилий:  $\sigma_{rr} = \sigma_{rz} = 0$  и покрыты тон-

кими электродами, к которые подведена гармоническая разность потенциалов:  $\varphi = \pm V_0 e^{i(kz - \omega t)}$  ( $R_0$  – радиус срединной поверхности цилиндра;  $h$  – половина толщины цилиндра).

Разрешающий вектор смешанного типа имеет вид

$$\mathbf{R} = \{\sigma_{rr}, \sigma_{rz}, \varphi, u_r, u_z, D_r\}^T. \quad (7)$$

Разрешая систему (1) – (4) относительно вектора  $\mathbf{R}$ , после ряда преобразований получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= \frac{1}{r} \left( \frac{c_{12}}{c_{11}} - 1 \right) \sigma_{rr} - \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\Delta_5}{rc_{11}} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \left( \frac{\Delta_4}{r^2 c_{11}} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_r + \frac{\Delta_1}{rc_{11}} \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} &= -\frac{c_{13}}{c_{11}} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} - \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\Delta_3}{c_{11}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\Delta_1}{rc_{11}} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \left( \frac{\Delta_2}{c_{11}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_z; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \frac{e_{15}}{\Delta} \sigma_{rr} - \frac{e_{55}}{\Delta} D_r; \quad \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1}{c_{11}} \sigma_{rr} - \frac{e_{33}}{c_{11}} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{c_{12}}{rc_{11}} u_r - \frac{c_{13}}{c_{11}} \frac{\partial u_z}{\partial z}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{\varepsilon_{11}}{\Delta} \sigma_{rz} - \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{e_{51}}{\Delta} D_r; \quad \frac{\partial D_r}{\partial r} = -\frac{e_{13}}{c_{11}} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} + \frac{\Delta_6}{c_{11}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\Delta_5}{rc_{11}} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\Delta_3}{c_{11}} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{1}{r} D_r.$$

## 2. Методика решения краевых осесимметричных задач.

Решение задачи будем искать в виде волн бегущих в осевом направлении:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, z, t) &= i\lambda \sigma_{rr}(r) e^{i(kz - \omega t)}; \quad \sigma_{rz}(r, z, t) = \lambda \sigma_{rz}(r) e^{i(kz - \omega t)}; \\ \varphi(r, z, t) &= h \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon_0}} \varphi(r) e^{i(kz - \omega t)}; \quad u_r(r, z, t) = i h u_r(r) e^{i(kz - \omega t)}; \\ u_z(r, z, t) &= h u_z(r) e^{i(kz - \omega t)}; \quad D_r(r, z, t) = \sqrt{\varepsilon_0 \lambda} D_r(r) e^{i(kz - \omega t)}, \end{aligned} \quad (9)$$

Используя представление (9), исходную двумерную задачу теории электроупругости в частных производных, можно свести к краевой задаче в обыкновенных дифференциальных уравнениях.

$$\frac{d\mathbf{R}}{dx} = A(x, \Omega) \mathbf{R} \quad (10)$$

с граничными условиями: имеет вид

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{R}(-1) = \mathbf{C}_1; \quad \mathbf{B}_2 \mathbf{R}(1) = \mathbf{C}_2. \quad (11)$$

где вектор  $\mathbf{C}_1^T = \{0, 0, -V_0, 0, 0, 0\}$ , вектор  $\mathbf{C}_2^T = \{0, 0, +V_0, 0, 0, 0\}$ .

Здесь введены безразмерные величины:

$$\Omega = \omega h \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}}; \quad \tilde{c}_{ij} = \frac{c_{ij}^0}{\lambda}; \quad \tilde{e}_{ij} = \frac{e_{ij}^0}{\sqrt{\varepsilon_0 \lambda}}; \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}^0}{\varepsilon_0}; \quad x = \frac{r - R_0}{h}.$$

$\rho$  – плотность материала цилиндра;  $R_0$  – радиус срединной поверхности;  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость вакуума;  $\lambda = 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>.

Решение задачи (8), (9) выполнено устойчивым методом дискретной ортогонализации.

### 3. Анализ численных результатов.

Ниже приведены результаты численного анализа задачи (10), (11). Выражение (6) представляет собой общую формулу для физико-химических характеристик материала,  $P_p$ ,  $P_m$  – соответствующие характеристики керамики и металла. Показатель степени объёмной доли керамики в формуле (6) может изменяться в пределах  $0 \leq n < 1000$ . При этом если  $n = 0$ , то структура является полностью металлической, если же  $n = \infty$ , то – пьезокерамической (рис. 1).

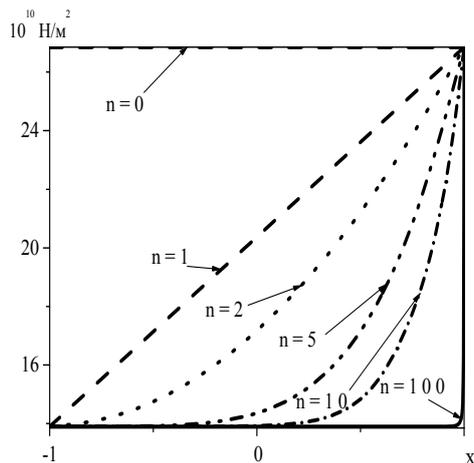


Рис. 1

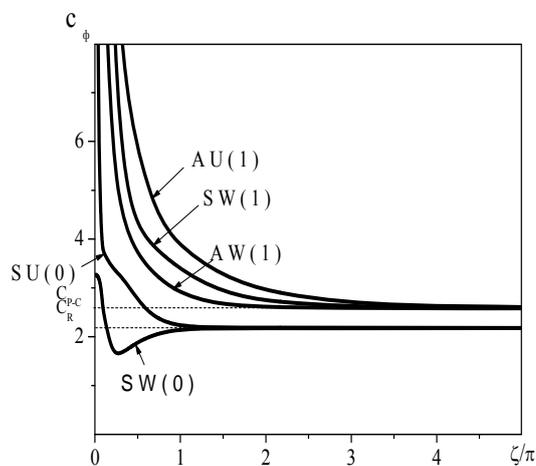


Рис. 2

Для случая однородной задачи (свободные движения) наблюдаются (как это было отмечено в работе [11]) качественные различия в дисперсионных соотношениях. Лучше это видно, если рассмотреть фазовые скорости распространяющихся волн. Так для однородного цилиндра из пьезокерамики PZT 4 (рис. 2) первые две волны  $SW(0)$  и  $AU(0)$  в коротковолновом диапазоне выходят на поверхностную волну рэлеевского типа. Скорость этих волн меньше наименьшей из скоростей объёмных волн в безграничном пространстве.

$$c_R < \min \left( \sqrt{c_{55}/\rho}; \sqrt{(c_{33} + e_{33}^2/\epsilon_{33})/\rho} \right).$$

Ниже проведен детальный анализ распределения перемещений в данных волнах. На рисунках используются обозначения для волн, принятые в работе [7]. Маркировка  $SW(0)$  означает, что волна рождается ( $k=0$ ) как симметричные продольные колебания (планарные колебания),  $AU(0)$  – антисимметричные радиальные колебания. Остальные ветви в коротковолновом диапазоне довольно быстро выходят на волны, распространяющиеся без дисперсии, с постоянной скоростью, которая больше скорости поверхностных волн и меньше скоростей объемных волн в безграничном пространстве. Назовем эти волны – волнами Похгаммера – Кри (по аналогии с волнами Лэмба в пластине).

Для случая, когда материал цилиндра неоднородный наблюдается существенная перестройка спектра фазовых скоростей. Для значения параметра неоднородности  $n=5$  соответствующие фазовые скорости распространяющихся волн представлены на рис. 3. Из приведенного рисунка следует, что только первая ветвь выходит на бездисперсионную волну, а все остальные распространяются с существенной дисперсией.

На частотах запирания ( $\zeta=0$ ) имеют место чисто упругие продольные колебания и связанные электроупругие радиальные колебания [7]. Анализ распределения амплитуд перемещений в бегущих волнах в непосредственной близости к частотам запирания показывает, что движения сохраняют характер, принятый в обозначениях. На рис. 4 представлены результаты численного анализа распределения амплитуд перемещений первых пяти ветвей для случая однородного цилиндра ( $n=1000$ ) ( $\zeta=0,01\pi$ ).

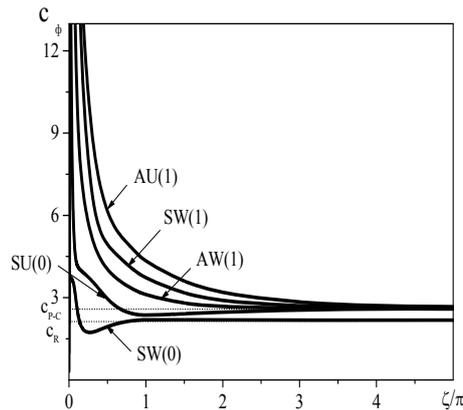
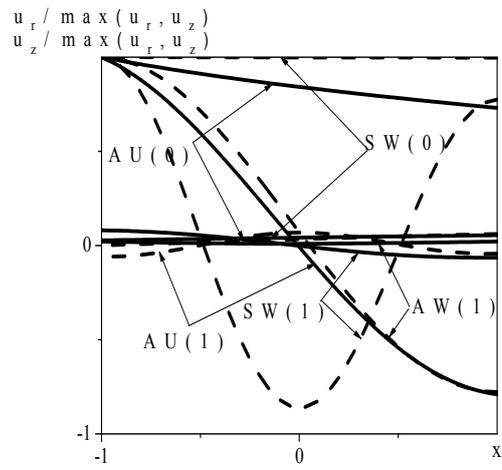
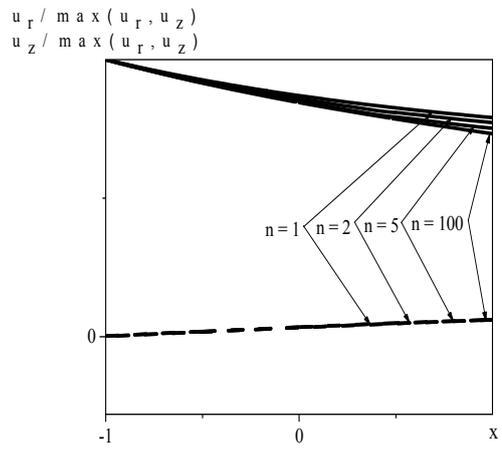


Рис. 3

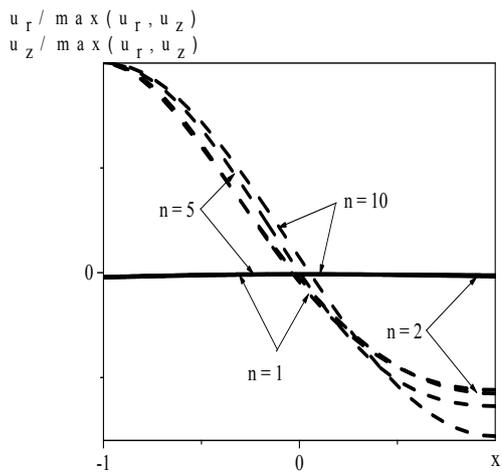
Исследуем влияние параметра неоднородности на распределение амплитуд перемещений. Влияние указанного параметра существенно зависит от частоты. Так, для первой ветви  $SW(0)$  это влияние столь незначительно, что не может быть представлено графически. Перемещения в этой волне являются преимущественно продольными, что и отражено в обозначении этой ветки. На рис. 5 представлены результаты численного анализа влияния параметра неоднородности на распределение амплитуд перемещений для второй ветви  $AU(0)$  ( $\zeta=0,01\pi$ ) для различных значений фактора неоднородности  $n$ . Сплошными линиями показаны амплитуды радиальных перемещений ( $u_r$ ), пунктирными – продольных ( $u_z$ ). Для этих волн характерно преобладание радиальных перемещений. Для ветвей  $SW(0)$  и  $AU(0)$  характерно почти линейное распределение амплитуд перемещений по толщине. На рис. 6 – 8 представлено влияние фактора неоднородности  $n$  на распределение амплитуд перемещений для ветвей  $AW(1)$ ,  $SW(1)$  и  $AU(1)$ , соответственно ( $\zeta=0,01\pi$ ).



*Puc. 4*



*Puc. 5*



*Puc. 6*

Для ветвей  $AW(1)$  и  $SW(1)$  в случае однородного материала характерно преобладание продольных перемещений. С ростом частоты наблюдается увеличение числа полуволн на единицу. Для случая неоднородного материала для ветви  $AW(1)$  (рис. 6)

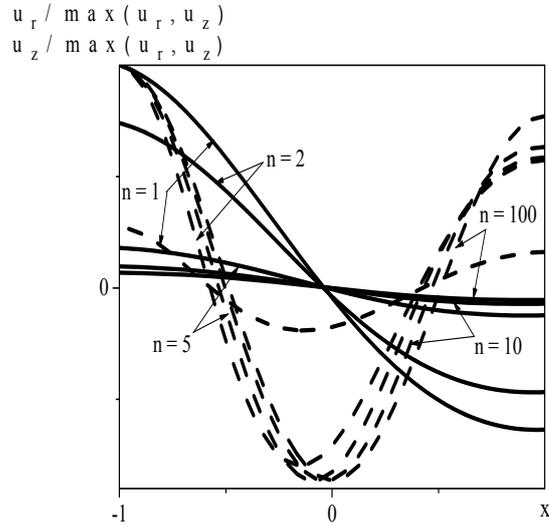


Рис. 7

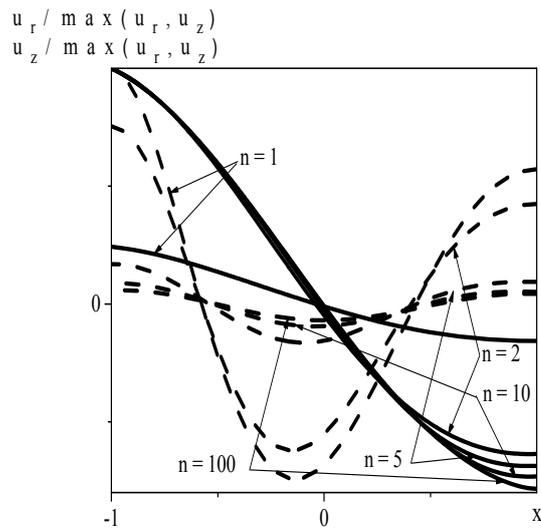


Рис. 8

наблюдается незначительное влияние параметра неоднородности на характер распределения перемещений. Для ветви  $SW(1)$  (рис. 7) можно отметить, что изменение параметра неоднородности приводит к значительным изменениям характера распределения перемещений. Для больших значений параметра  $n$ , т.е. когда материал цилиндра, в основном, состоит из пьезокерамики, преобладают осевые перемещения (так же, как в случае однородного пьезокерамического материала). С уменьшением параметра  $n$ , т.е. уменьшением объемной доли пьезокерамики, перемещения становятся, преимущественно, радиальными.

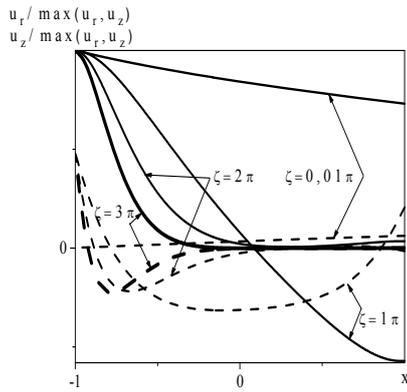


Рис. 9

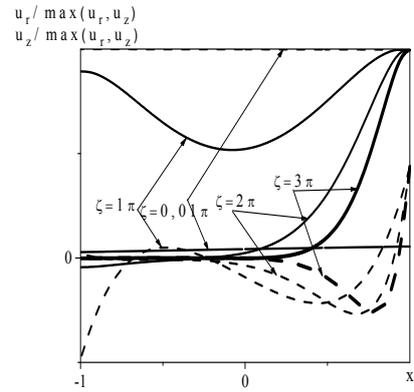


Рис. 10

Для ветви  $AU(1)$  (рис. 8), для больших значений параметра неоднородности  $n$  характерно преобладание радиальных перемещений, что и отражено в обозначении ветви.

С уменьшением параметра неоднородности перемещения становятся преимущественно продольными. Можно отметить на основании анализа приведенных рисунков тенденцию к смещению движений частиц цилиндра в сторону меньших значений модулей материала.

Рассмотрим, как происходит трансформация распределения перемещений по толщине при уменьшении длины волны. Для случая однородного материала (рис. 9), первая ветвь  $SW(0)$  выходит на поверхностную волну рэлеевского типа, распространяющуюся вдоль внутренней поверхности цилиндра. Вторая ветвь  $AU(0)$  в коротковолновом диапазоне выходит на поверхностную волну рэлеевского типа, распространяющуюся вдоль внутренней поверхности цилиндра (рис. 10, жирная линия).

В случае, когда материал цилиндра неоднородный (параметр неоднородности  $n = 5$ ), наблюдаются качественные отличия в характере распределения амплитуд перемещений. Как это отмечено выше, первая ветвь  $SW(0)$  также выходит на поверхностную волну рэлеевского типа (рис. 11, жирная линия). Вторая ветвь  $AU(0)$  уже не выходит на поверхностную волну рэлеевского типа (рис. 12).

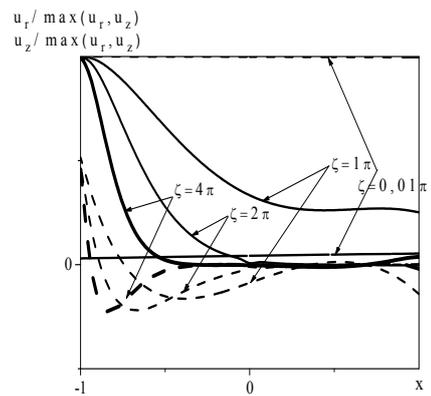


Рис. 11

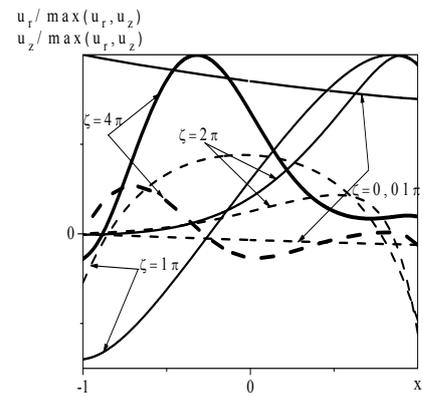


Рис. 12

Для следующих ветвей  $AW(1)$  и  $SW(1)$  (рис. 13 и рис. 14) в случае однородного материала наблюдается выход в коротковолновой области на почти симметричное (относительно срединной поверхности цилиндра) или почти антисимметричное распределение перемещений по толщине цилиндра. Рождаются волны ( $\zeta = 0$ )  $AW(1)$  и  $SW(1)$  как продольные колебания антисимметричные и симметричные, соответственно, с уменьшением длины волны перемещения становятся, в основном, радиальными. Причем радиальное

перемещение для волны  $AW(1)$  имеет одну полуволну по толщине, продольное – две. Для волны  $SW(1)$  радиальное перемещение имеет две волны, продольное – три.

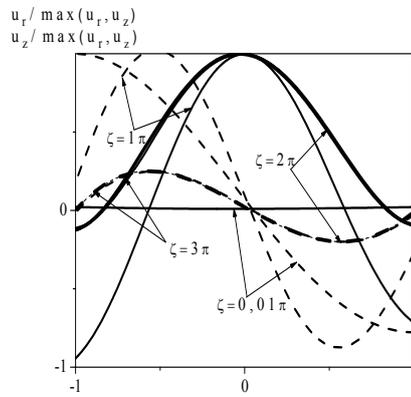


Рис. 13

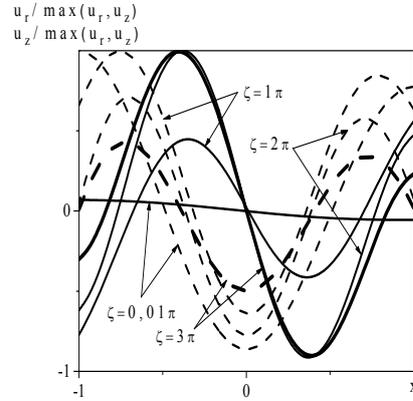


Рис. 14

Для более высоких ветвей сохраняется эта тенденция: перемещения либо почти симметричны, либо почти антисимметричны (с увеличением количества полуволн на единицу при увеличении порядкового номера волны на единицу).

В случае неоднородного материала наблюдается нарушение симметрии распределения перемещений относительно срединной поверхности. Перемещения увеличиваются в более «мягких» участках цилиндра и уменьшаются в более «жестких».

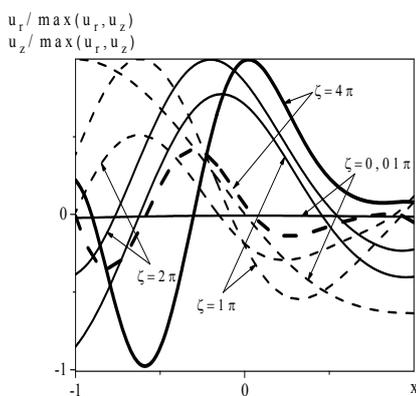


Рис. 15

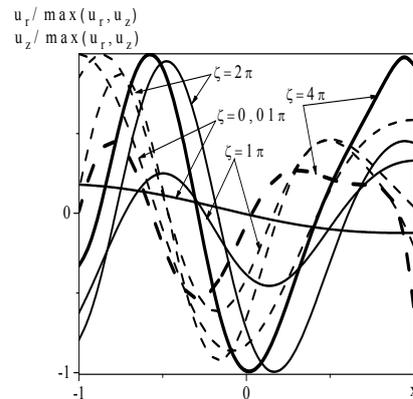


Рис. 16

На рис. 15 представлено распределение перемещений для ветви  $AW(1)$  для различных значений волнового числа. Жирными линиями, как и в предыдущих случаях, выделены перемещения для наибольшего из представленных волновых чисел. На рис. 16 дано распределение перемещений для ветви  $SW(1)$  для различных волновых чисел.

#### Заключение.

Неоднородность материала цилиндра приводит к существенным отличиям в характере распределения амплитуд перемещений бегущих волн. Особенно существенные отличия наблюдаются для второй ветви дисперсионных соотношений. Так, в случае однородного материала цилиндра первая ветвь в коротковолновом диапазоне выходит на поверхностную волну рэлеевского типа, распространяющуюся вдоль внешней поверхности цилиндра. Вторая ветвь выходит на поверхностную волну рэлеевского типа, распространяющуюся вдоль внутренней поверхности цилиндра.

В случае неоднородного материала только первая ветвь выходит на поверхностную волну рэлеевского типа, распространяющуюся вдоль поверхности с наименьшими значениями модулей. Вторая ветвь не выходит на поверхностную волну. Для более высоких ветвей наблюдается нарушение симметрии в распределении по толщине амплитуд перемещений и смещений их в область с наименьшими значениями модулей.

В случае однородного материала более высокие ветви в коротковолновом диапазоне выходят на волны, распространяющиеся без дисперсии. Распределение амплитуд перемещений в этом случае происходит либо симметрично, либо антисимметрично по отношению к срединной поверхности с увеличением числа полуволн на единицу с увеличением номера волны. В случае, когда материал цилиндра неоднородный, наблюдается нарушение симметрии в распределении амплитуд перемещений, происходит смещение движений частиц материала цилиндра в сторону с меньшими значениями модулей.

**РЕЗЮМЕ.** Досліджено поширення вісесиметричних електропружних хвиль у порожнистих циліндрах з функціонально градієнтного п'єзокерамічного матеріалу, поляризованого в радіальному напрямі. Властивості матеріалу змінюються по степеневому закону по товщині. Бічні поверхні циліндра вільні від навантажень та вкриті тонкими електродами, до яких підведена знакозмінна різниця потенціалів  $\pm V_0 \exp[i(kz - \omega t)]$ . Для розв'язання задачі запропоновано ефективний чисельно-аналітичний метод. Початкова тривимірна задача теорії електропружності в частинних похідних (шляхом представлення компонентів тензора пружності, компонент векторів переміщень, електричної індукції та електростатичного потенціалу біжучими хвилями в осьовому напрямі) зведена до крайової задачі на власні значення для звичайних диференціальних рівнянь. Отриману задачу розв'язано стійким методом дискретної ортогоналізації.

Наведено результати чисельного аналізу для циліндра, виготовленого з функціонально градієнтного п'єзокерамічного матеріалу (металу та п'єзокераміки PZT 4).

1. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наук. думка, 1981. – 283 с.
2. *Кольский Г.* Волны напряжений в твердых телах. – М.: ИЛ, 1955. – 192 с.
3. *Лоца І.А.* О распространении осесимметричных волн в полом цилиндре из функционально градиентного пьезоэлектрического материала // Доп. НАН України. – 2015. – № 3. – С. 50 – 57.
4. *Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга / Отв. ред. А.Н. Гузь; АН УССР Ин-т механики.* – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с.
5. *Физическая акустика / Под редакцией У. Мэзона. Р. Терстона.* – М.: Мир, 1966. – т. 1–7. – 663 с.
6. *Шульга Н.А.* Распространение гармонических волн в анизотропных пьезоэлектрических цилиндрах, волноводы с усложненными свойствами / В кн.: Успехи механики в 6-ти томах, Т. 3. – 2007. – С. 681 – 702.
7. *Шульга Н.А., Григоренко А.Я., Лоца І.А.* Осесимметричные электроупругие волны в полом пьезокерамическом цилиндре // Прикл. механика. – 1984. – **20**, № 1. – С. 79 – 86.
8. *Birman V., Byrd L.W.* Modeling and analysis of functionally graded materials and structures. ASME Appl. Mech. Rev., 2007. – **195**. – pp. 195 – 216.
9. *Chih-Ping Wu, Tsu-Chieh Tsai.* Exact solutions of functionally graded piezoelectric material sandwich cylinders by a modified Pagano method // Applied Mathematical Modelling. – 2012. – **36**, N 5. – P. 1910 – 1930.
10. *Cree C.* Longitudinal vibration of circular bar // Quart. J. Pure and Appl. Math. – 1886. – **21**, N 83/84. – P. 287 – 298.
11. *Cree C.* The equation of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solution and application // Trans. Cambridge Philos. Soc. – 1889. – Pt III. – P. 250 – 369.
12. *Grigorenko A.Ya., Loza I.A.* Axisymmetric Waves in Layered Hollow Cylinders with Axially Polarized piezoelectric Layers // Int. Appl. Mech. – 2011. – **47**, N 6. – P. 707 – 713.
13. *Grigorenko A., Müller W.H., Wille R., Loza I.* Non axisymmetric vibrations of radially polarized hollow cylinders made of functionally gradient piezoelectric materials / Continuum Mech. Thermodyn. – 2012. – **24** (4–6). – P. 515 – 524.
14. *Pochhammer L.* Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiszyylinder // J. Reine Angew. Math. – 1876. – **81**, N 4. – P. 324 – 336.
15. *Thurston R.N.* Elastic waves in rods and clad rods // J. Acoust. Soc. Am. – 1978. – **64**, N 1. – P. 1 – 37.

Поступила 01.07.2016

Утверждена в печать 14.03.2017