В. Д. К у б е н к о, П. С. К о в а л ь ч у к

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЗАПОЛНЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С НАЧАЛЬНЫМИ НЕСОВЕРШЕНСТВАМИ

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; vdk@inmech.kiev.ua

Abstract. The theoretical approaches are proposed for studying the natural vibrations of non-ideal (with small imperfections of geometrical character) orthotropic cylindrical shells with a fluid filler. The corresponding problem is considered in the geometrically nonlinear statement. The main attention is drawn to analysis of interaction and energy interchange among the «onjugated» bending shell modes, which are taken into account in the radial dynamical deflection. An effect of deflections on processes of interaction of the modes of initial deflections is analyzed.

Key words: cylindrical shell, initial imperfection, ideal incompressible fluid, nonlinear vibrations, mode interaction, running and standing waves, energy integral.

Введение.

Исследованию нелинейных изгибных колебаний тонких, полностью заполненных жидкостью изотропных и композитных цилиндрических оболочек посвящено большое количество публикаций. Систематические обзоры таких исследований представлены в работе [11], во вводных частях статей [10, 12, 20], в ряде других публикаций [15 – 19 и др.]. В большинстве исследований рассмотрены задачи динамики оболочки с жидкостью в предположении, что эти оболочки имеют идеальную (без начальных несовершенств) цилиндрическую форму и являются изотропными. Однако, как показывают многочисленные экспериментальные исследования [5, 6, 14] практически каждая натурная цилиндрическая оболочка характеризуется технологическими «искажениями» идеальной формы, к которым очень «чувствительны» мембранные усилия [2]. Начальные прогибы, даже очень малые по сравнению с динамическим прогибом, могут существенно влиять на собственные формы оболочек, их частотный спектр (обусловить, к примеру, его «расщепление» на два подспектра [4, 5, 14]), значительно уменьшить величины критических (при которых происходит потеря устойчивости конструкции) статических и динамических нагрузок; изменить величины флаттерных скоростей обтекания газовым потоком аэроупругих элементов конструкций [2, 6, 13]. В ряде случаев геометрические несовершенства могут обусловить также качественное изменение характера геометрической нелинейности – «жесткий» тип нелинейности может перейти в «мягкий» и наоборот.

Относительно жидкости, заполняющей оболочки, отметим, что ее влияние проявляется в том, что частотные кривые несущего оболочечного объекта становятся более пологими, вследствие чего частотный спектр «сгущается» и появляются близкие и кратные (резонирующие) частоты [7, 17]. Это приводит к появлению интенсивного взаимодействия между изгибными формами, отвечающего указанным частотам. В результате значительно усложняется напряженно-деформированное состояние объекта вследствие появления бегущих в окружном направлении изгибных волн, нестационарных и циклических процессов плавного или скачкообразного перехода от одних изгибных форм к другим, наложения различных форм [4, 6, 14].

Следует отметить, что композитная структура материала (ортотропная модель) в сочетании со статическим нагружением также приводят к «сгущению» частотного спектра и появлению так называемых внутренних резонансов.

В данной работе изложены теоретические подходы к исследованию двухмодовых (в прогибе учитывается одна пара сопряженных изгибных форм) свободных нелинейных колебаний заполненных жидкостью статически нагруженных ортотропных квазицилиндрических оболочек при реализации в упруго-жидкостной системе внутреннего резонанса, который наиболее часто встречается в практических приложениях.

§1. Исходные динамические уравнения.

Рассмотрим замкнутую, полностью заполненную жидкостью квазицилиндрическую (с малым начальным прогибом в радиальном направлении $w_0\ (x,y)$) ортотропную оболочку конечной длины l, на обоих краях которой реализуются условия классического свободного опирания (*SS1/SS1*). Координаты x и y точек срединной поверхности направлены, соответственно, вдоль образующей и по дуге. Предполагаем, что оболочка испытывает одновременно воздействие всестороннего радиального внешнего давления $q_0 = \text{const}$, а также осевого сжатия $N_x = N_0 = \text{const}$, равномерно распределенного вдоль обеих дуговых кромок.

Для описания процесса динамического деформирования оболочки используем уравнения среднего изгиба типа Доннелла – Муштари – Власова [2, 3, 5], имеющие следующий вид:

$$\begin{gathered}\frac{1}{h}\Delta_D^4\, w_1 = \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + L\left(w_1 + w_0, \Phi\right) - \rho\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - \frac{P_h}{h} - N_0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{q_0 R}{h}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2};\\ \Delta_{\delta}\,\Phi = -\frac{1}{2}L\left(w_1 + 2w_0, w_1\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}.\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь h и R – толщина и радиус оболочки; $w_1\left(x,y,t\right)$ – «дополнительный» динамический прогиб ($w = w_1 + w_0$ – полный, направленный вдоль оси z радиальный прогиб, положителен к центру кривизны); $\Delta_D^4,\ \Delta_\delta^4,\ L\left(M,N\right)$ – дифференциальные операторы вида

$$\begin{gathered}\Delta_D^4(w_1) = D_1\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2D_3\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2\partial y^2} + D_2\frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4};\ \Delta_\delta^4(\Phi) = \delta_2\frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial x^4} + 2\delta_3\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2\partial y^2} + \delta_1\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4};\\ L(M,N) = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2}\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 N}{\partial x\partial y},\end{gathered} \tag{1.2}$$

где Φ – функция напряжений в срединной поверхности; $D_1,\ D_2,\ D_3$ – жесткостные параметры оболочки, причем $D_{1,2} = \dfrac{E_{1,2}h^3}{12\left(1-\mu_1\mu_2\right)}$, $\quad D_3 = D_1\mu_2 + 2D_G,\ \ \left(D_G = Gh^3/12\right);$ $\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3$ – компоненты матрицы податливости ортотропного материала: $\delta_{1,2} = 1\big/E_{1,2}$, $\delta_3 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{G} - \dfrac{2\mu_1}{E_1}\right)$; $E_1,\ E_2$ – модули упругости в направлении осей x и y, соответственно; G – модуль сдвига в плоскости армирования; μ_1 и μ_2 – соответствующие коэффициенты Пуассона (в силу симметрии упругих свойств ортотропного материала выполняется соотношение $E_1\mu_2 = E_2\mu_1$); P_h – гидродинамическое давление жидкости, для определения которого используется полученная из линеаризованного уравнения Бернулли формула

$$P_г = -\rho_0\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{r=R}, \tag{1.3}$$

где ρ_0 – плотность жидкости (жидкость предполагается идеальной и несжимаемой, ее движение – потенциальное); $\varphi = \varphi(t,x,r,\theta)$ – потенциал скоростей жидкости, который определим, решая краевую задачу [3, 12, 17, 19]:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}=0;\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=R}=-\frac{\partial w_1}{\partial t};\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=0}<\infty;\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{\substack{x=0\\x=l}}=0, \tag{1.4}$$

(x, r, θ) – цилиндрические координаты: x – направлена вдоль оси оболочки ($0 \le x \le l$); r – радиальная ($0 \le r \le R$) и θ – угловая ($0 \le \theta \le 2\pi$) координаты.

В дальнейшем полагаем, что оболочка при ее контакте с жидкостью не имеет близких (или совпадающих) собственных частот, отвечающих различным параметрам окружного волнообразования. Это дает основание аппроксимировать динамический прогиб w_1 упрощенным трехмодовым разложением [2, 6, 13, 18]

$$w_1 = \left(f_1\cos s_n y + f_2\sin s_n y\right)\sin\lambda_m x + f_3 X_0(x), \tag{1.5}$$

в котором рассматриваются сопряженные формы, отвечающие следующим параметрам волнообразования: $s_n = n/R$, $\lambda_m = m\pi/l$ (n – количество полных волн в окружном направлении; m – количество полуволн в продольном направлении, $m \ne 0$).

Входящие в (1.5) функции времени f_1, f_2, f_3 подлежат определению. Дополнительное («корректирующее») слагаемое $X_0(x)$ отражает обнаруженный в экспериментах специфический эффект «преимущественного выпучивания вовнутрь» [2], характерный для колебаний оболочек с большими прогибами [4 – 6, 14].

Учитывая граничные условия на краях оболочки, зададим функцию $X_0(x)$ в виде $X_0(x) = \sin^4\lambda_m x$. Тогда соответствующий прогибу (1.5) потенциал скоростей φ, полученный из (1.4), имеет вид

$$\varphi = -\frac{1}{\lambda}T_{nm}\left(\dot f_1\cos s_n y + \dot f_2\sin s_n y\right)\sin\lambda_m x - \frac{\dot f_3}{2l}\sum_{k=1,3,5...}^{\infty} M_k\frac{I_0(\lambda_k r)}{\lambda_k I_0'(\lambda_k R)}\sin\lambda_k x, \tag{1.6}$$

где обозначено: $T_{nm} = \dfrac{I_n(\lambda_m r)}{I_n'(\lambda_m R)}$; $M_k = \dfrac{192\lambda_m^4}{\lambda_k\left(\lambda_k^2 - 4\lambda_m^2\right)\left(\lambda_k^2 - 16\lambda_m^2\right)}$; $\lambda_k = \dfrac{k\pi}{l}$; I_n, I_0 – модифицированные функции Бесселя соответствующего порядка;

$$I_n'(\zeta_m) = \frac{I_{n-1}(\zeta_m) + I_{n+1}(\zeta_m)}{2};\quad \left(\zeta_m = (\lambda_m R)\right);\ I_0'(\lambda_k R) = I_1(\lambda_k R).$$

Подставляя (1.6) в (1.3) и (1.1) и реализуя метод Бубнова – Галеркина (в качестве весовых функций выбраны функции $\cos s_n y\sin\lambda_m x$, $\sin s_n y\sin\lambda_m x$, $\sin^4\lambda_m x$, соответственно), выводим систему разрешающих уравнений, составленных относительно искомых функций f_1, f_2, f_3 из (1.5):

$$\ddot f_1 + \omega_1^2 f_1 = k_{11}\left(f_1^2 + f_2^2\right)f_1 + k_{12}f_1 f_3 + k_{13}f_1 f_3^2 + F_1(\cdots);$$

$$\ddot{f}_2+\omega_2^2 f_2=k_{11}\left(f_1^2+f_2^2\right)f_2+k_{12}f_2 f_3+k_{13}f_2 f_3^2+F_2(\cdots); \tag{1.7}$$

$$\ddot{f}_3+\omega_3^2 f_3=k_{31}\left(f_1^2+f_2^2\right)+k_{32}\left(f_1^2+f_2^2\right)f_3+F_3(\cdots).$$

Здесь обозначено ω_1, ω_2, ω_3 – частоты собственных колебаний оболочки:

$$\omega_1^2=\omega_2^2=\frac{1}{\rho m_{01}}\left[\frac{1}{h}\left(D_1\lambda_m^4+2D_3\lambda_m^2 s_n^2+D_2 s_n^{\,4}\right)+\frac{\lambda_m^4}{R^2\Delta_\delta\left(\lambda_m,s_n\right)}-N_0\left(\lambda_m^2+s_n^2\mu_2\right)-\frac{q_0 R s_n^2}{h}\right];$$

$$\omega_3^2=\frac{64}{35\rho m_{03}}\left(\frac{8D_1\lambda_m^4}{h}+\frac{35}{64\delta_2 R^2}-\frac{5}{4}N_0\lambda^2\right)+\frac{2\lambda_m^4 s_n^4}{3\rho m_{03}}\left[\frac{1}{\Delta_\delta\left(\lambda_m,s_n\right)}+\frac{1}{\Delta_\delta\left(3\lambda_m,s_n\right)}\right], \tag{1.8}$$

где Δ_δ – оператор вида $\Delta_\delta\left(\lambda_m,s_n\right)=\delta_2\lambda_m^4+2\delta_3\lambda_m^2 s_n^2+\delta_1 s_n^4$; m_{01},m_{03} – параметры присоединенных масс жидкости:

$$m_{01}=1+\frac{\rho_0}{\rho\lambda_m h}\,\frac{2I_n\left(\lambda_m R\right)}{\left[I_{n-1}\left(\lambda_m R\right)+I_{n+1}\left(\lambda_m R\right)\right]};\quad m_{03}=1+\frac{16}{35}\frac{\rho_0}{\rho h l^2}\sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{I_0\left(\lambda_k R\right)M_k^2}{\lambda_k I_0'\left(\lambda_k R\right)};$$

k_{ij} $\left(i=1,\,3;\ j=1,\,2,\,3\right)$ – постоянные коэффициенты, характеризующие геометрическую нелинейность идеальной оболочки (когда $w_0=0$). Для их значений имеем формулы:

$$k_{11}=-\frac{1}{16\rho\, m_{01}}\left(\frac{\lambda_m^4}{\delta_1}+\frac{3s_n^4}{\delta_2}\right);\ k_{12}=\frac{s_n^2}{\rho R\, m_{01}}\left[\frac{5}{8\delta_2}+\frac{2\lambda_m^2}{\Delta_\delta(\lambda_m,s_n)}\right];$$

$$k_{13}=\frac{\lambda_m^4 s_n^4}{\rho}\left[\frac{1}{\Delta_\delta(\lambda_m,s_n)}+\frac{4}{\Delta_\delta(3\lambda_m,s_n)}+\frac{1}{\Delta_\delta(5\lambda_m,s_n)}\right];\ k_{31}=\frac{16}{35}\frac{m_{01}}{m_{03}}k_{12};\ k_{32}=\frac{32}{35}\frac{m_{01}}{m_{03}}k_{13}.$$

$F_k\left(k=1,2,3\right)$ – функции, зависящие от обобщенных координат f_1, f_2, f_3 и параметров задаваемых начальных прогибов, причем, при $w_0\equiv 0$ функции F_k отсутствуют $(F_k=0)$.

Поскольку влияние начального прогиба w_0 на динамические характеристики оболочек наиболее существенно проявляется при учете в нем тех же форм, что и в динамическом прогибе [2, 4 – 6, 7], в дальнейшем принимаем

$$w_0=f_{10}\cos s_n y\sin\lambda_m x+f_{20}\sin s_n y\sin\lambda_m x, \tag{1.9}$$

где f_{10}, f_{20} = const. Кроме того, по аналогии с [2, 5] определим функцию $f_3(t)$, решая «квазистатическую задачу», полагая $\ddot{f}_3=0$. Теоретико-экспериментальное обоснование такого упрощения приведено в ряде публикаций [2, 14 и др.]. Система (1.7) преобразуется тогда к виду

$$\ddot{f}_1+\omega_{11}^2 f_1+\gamma_1 f_2=G_{11}\left(f_1,f_2\right)+G_{12}(f_1,f_2,f_{10},f_{20});$$

$$\ddot{f}_2+\omega_{22}^2 f_2+\gamma_2 f_1=G_{22}\left(f_1,f_2\right)+G_{21}(f_1,f_2,f_{10},f_{20}); \tag{1.10}$$

$$f_3\approx\frac{k_{31}}{\omega_3^2}\left[1+\frac{k_{32}}{\omega_3^2}(f_1^2+f_2^2)\right](f_1^2+f_2^2),$$

где приняты обозначения

$$\omega_{11}^2 = \omega_1^2 + \frac{\lambda_m^4}{8\rho\, m_{01}\,\delta_1}(f_{10}^2 + f_{20}^2) + \frac{s^4 f_{10}^2}{8\rho\, m_{01}\,\delta_2};$$

$$\omega_{22}^2 = \omega_2^2 + \frac{\lambda_m^4}{8\rho\, m_{01}\,\delta_1}(f_{10}^2 + f_{20}^2) + \frac{s^4 f_{20}^2}{8\rho\, m_{01}\,\delta_2}; \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \frac{s^4}{8\rho\, m_{01}\delta_2} f_{10} f_{20};$$

G_{11}, G_{22} – нелинейные функции, имеющие вид

$$G_{11} = \gamma_{11}(f_1^2 + f_2^2) f_1 + \gamma_{13}(f_1^2 + f_2^2)^2 f_1;\; G_{22} = \gamma_{22}(f_1^2 + f_2^2) f_2 + \gamma_{23}(f_1^2 + f_2^2)^2 f_2$$

$$\left(\gamma_{11} = k_{11} + \frac{k_{12}k_{31}}{\omega_3^2} = \gamma_{22};\; \gamma_{13} = \frac{k_{31}}{\omega_3^4}\left(k_{12}k_{32} + k_{13}k_{31}\right) = \gamma_{23}\right);$$

G_{12}, G_{21} – нелинейные функции переменных f_1, f_2, коэффициенты которых зависят от параметров начального прогиба f_{10}, f_{20}.

Отметим, что в случае малых начальных прогибов w_0 в сравнении с полным прогибом w $\left(w_0 \ll w\right)$ функции G_{12}, G_{21} будут иметь более высокий порядок малости, чем соответствующие функции G_{11}, G_{22}. Поэтому при построении решений уравнений (1.10) в первом приближении эти функции можно не учитывать.

§2. Построение усредненных уравнений.

Для построения приближенных периодических решений уравнений (1.10) с использованием асимптотического метода Боголюбова – Митропольского целесообразно предварительно ввести в них замену переменных

$$f_1 = \xi + \eta;\; f_2 = A\xi + B\eta, \tag{2.1}$$

где

$$A = \frac{\lambda_1^2 - \omega_{11}^2}{\gamma_1};\; B = \frac{\gamma_2}{\lambda_2^2 - \omega_{22}^2};\; \lambda_{1,2}^2 = \frac{\omega_{11}^2 + \omega_{22}^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\omega_{11}^2 - \omega_{22}^2)^2}{4} + \gamma_1\gamma_2}.$$

В новых переменных ξ, η получим систему уравнений, представленную в «квазинормальной» форме [1, 9] (разделение переменных осуществлено лишь в линейных частях системы):

$$\ddot{\xi} + \lambda_1^2\xi = \frac{H_2 - BH_1}{A - B};\;\; \ddot{\eta} + \lambda_2^2\eta = \frac{H_2 - AH_1}{B - A}. \tag{2.2}$$

Функции H_1, H_2 совпадают с правыми частями уравнений (1.10), в которых следует учесть замену (2.1). В конечном виде система (2.2) сводится к виду

$$\begin{aligned} &\ddot{\xi} + \lambda_1^2\xi = k_1\xi^3 + k_2\xi\eta + k_3\xi^2\eta + k_4\eta^3 + k_5\xi^5 + k_6\xi^4\eta + k_7\xi^3\eta^2 + k_8\xi^2\eta^3 + k_9\xi\eta^4 + k_{10}\eta^5;\\ &\ddot{\eta} + \lambda_2^2\eta = c_1\eta^3 + c_2\eta\xi^2 + c_3\xi\eta^2 + c_4\xi^3 + c_5\xi^5 + c_6\xi^4\eta + c_7\xi^3\eta^2 + c_8\xi^2\eta^3 + c_9\xi\eta^4 + c_{10}\eta^5. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Постоянные коэффициенты $k_i, c_i (i = 1 \div 10)$ в данных уравнениях имеют следующий вид:

$$k_1 = \left(\gamma_{11} + A^2\gamma_{22}\right);\quad k_2 = \left(\gamma_{11} + A^2\gamma_{22}\right)\left(1 + B^2\right)/\left(1 + A^2\right);\; k_3 = \left(\gamma_{11} + AB\gamma_{22}\right);$$

$$k_4 = \left(\gamma_{11} + AB\gamma_{22}\right)\left(1 + B^2\right)/\left(1 + A^2\right);\;\; k_5 = \left(\gamma_{13} + A^2\gamma_{23}\right)\left(1 + A^2\right);$$

$$k_6 = (\gamma_{13} + AB\gamma_{23})(1+A^2);\ k_7 = 2(\gamma_{13} + A^2\gamma_{23})(1+B^2);\ k_8 = 2(\gamma_{13} + AB\gamma_{23})(1+B^2);$$

$$k_9 = (\gamma_{13} + A^2\gamma_{23})(1+B^2)^2 / (1+A^2);\ k_{10} = (\gamma_{13} + AB\gamma_{23})(1+B^2)^2 / (1+A^2);$$

$$c_1 = (\gamma_{11} + B^2\gamma_{22});\ c_2 = (\gamma_{11} + B^2\gamma_{22})(1+A^2)/(1+B^2);\ c_3 = (\gamma_{11} + AB\gamma_{22});$$

$$c_4 = (\gamma_{11} + AB\gamma_{22})(1+A^2)/(1+B^2);\ c_5 = (\gamma_{13} + AB\gamma_{23})(1+A^2)^2 / (1+B^2);$$

$$c_6 = (\gamma_{13} + B^2\gamma_{23})(1+A^2)^2 / (1+B^2);\ c_7 = 2(\gamma_{13} + AB\gamma_{23})(1+A^2);$$

$$c_8 = 2(\gamma_{13} + B^2\gamma_{23})(1+A^2);\ c_9 = (\gamma_{13} + AB\gamma_{23})(1+B^2);\ c_{10} = (\gamma_{13} + B^2\gamma_{23})(1+B^2).$$

Так как $\lambda_1 \approx \lambda_2$ (из-за малых значений прогиба w_0), тогда периодическое решение уравнения (2.3) можно представить в первом приближении в виде

$$\xi = a_1 \cos(\Omega\, t + \vartheta_1);\ \eta = a_2 \cos(\Omega\, t + \vartheta_2) \quad (\Omega = \lambda_1), \tag{2.4}$$

Используя асимптотический метод усреднения Боголюбова – Митропольского [1, 9] выводим уравнения для определения неизвестных функций a_k, ϑ_k, $(k = 1, 2)$:

$$\frac{da_1}{dt} = -\frac{a_1 a_2^2}{16\Omega}(2k_2 + k_7 a_1^2 + 2k_9 a_2^2)\sin 2\theta\,;\ \frac{da_2}{dt} = \frac{a_1 a_2^2}{16\Omega}(2c_2 + 2c_6 a_1^2 + c_8 a_2^2)\sin 2\theta;$$

$$\frac{d\vartheta_1}{dt} = -\frac{1}{8\Omega}(3k_1 a_1^2 + 2k_2 a_2^2 + 10k_5 a_1^4 + 3k_7 a_1^2 a_2^2 + 3k_9 a_2^4) - \frac{a_2^2}{8\Omega}(k_2 + k_7 a_1^2 + k_9 a_2^2)\cos 2\theta; \tag{2.5}$$

$$\frac{d\vartheta_2}{dt} = -\frac{1}{8\Omega}(3c_1 a_2^2 + 2c_2 a_1^2 + 10c_{10} a_2^4 + 3c_6 a_1^4 + 3c_8 a_1^2 a_2^2) + \frac{\Delta}{2\Omega} - \frac{a_1^2}{8\Omega}(c_2 + c_6 a_1^2 + c_8 a_2^2)\cos 2\theta$$

(здесь введены обозначения $\Delta = \lambda_2^2 - \lambda_1^2$, $\theta = \vartheta_2 - \vartheta_1$).

Анализируя приведенные выше уравнения, можно исследовать характер деформирования оболочек с жидкостью при наличии начальных прогибов.

Рассмотрим сначала частный случай системы (2.2), учитывая в ней нелинейные члены до третьей степени включительно. Именно нелинейность такого порядка рассматривается в преобладающем большинстве нелинейных задач по динамике оболочек и оболочек с жидкостью. Из первых двух уравнений (2.5) можно тогда получить первый интеграл

$$\frac{a_1^2(t)}{\gamma_{11}(1 + f_{10}^2 / f_{20}^2)} + \frac{a_2^2(t)}{\gamma_{11}(1 + f_{20}^2 / f_{10}^2)} = C_{00}, \tag{2.6}$$

где C_{00} – постоянная интегрирования $\left(C_{00} = \frac{1}{\gamma_{11}} \left[\frac{a_1^2(0)}{1+B^2} + \frac{a_2^2(0)}{1+A^2} \right] \right)$.

С учетом (2.6) порядок системы (2.5) можно уменьшить и свести поставленную задачу к исследованию двух уравнений, составленных относительно неизвестных функций $\zeta = a_1^2 / k_2$ и θ, т.е.

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\frac{k_1 k_2}{4\Omega}\zeta(C_{00} - \zeta)\sin 2\theta;\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{8\Omega}\left[k_1 k_2 (2\zeta - C_{00})(1 - \cos 2\theta) + 4\Delta\right]. \tag{2.7}$$

Отсюда выводим еще один интеграл такого вида:

$$M\zeta+\frac{N\zeta^2}{2}+\frac{k_1k_2}{8}\zeta\left(C_{00}-\zeta\right)\cos 2\theta=C_{01}=\text{const}, \tag{2.8}$$

где приняты обозначения

$$M=-\frac{1}{8\Omega}\left(k_1k_2C_{00}-4\Delta\right);\quad N=\frac{k_1k_2}{4\Omega}.$$

Постоянная интегрирования C_{01} равна левой части уравнения (2.8) при подстановке в него начальных значений $\zeta=\zeta(0),\ \theta=\theta(0)$.

Полученные интегралы (2.6) и (2.8) являются важнейшими динамическими характеристиками рассматриваемой упруго-жидкостной системы, описывающими особенности ее свободных колебаний при наличии внутреннего резонанса и начальных прогибов оболочки. В частности, первый интеграл (2.6) показывает, как приданная в начальный момент времени энергия будет впоследствии определенным образом «перераспределяться» между сопряженными формами, учитываемыми в прогибе w_1 (1.5). В зарубежной литературе эти формы именуются driven and companion mode. Очевидно, что увеличение амплитуды колебаний по одной из сопряженных изгибных форм будет сопровождаться соответствующим уменьшением амплитуд по второй форме и наоборот. Соответствующие эксперименты [4 – 6, 14] показывают, что переход энергии от одной формы к другой осуществляется как бы самопроизвольно – этим процессом «управляет» сама упругая система посредством нелинейных связей между указанными формами.

Второй интеграл (2.8) характеризует энергетическую связь между каждой из форм изгибных колебаний и разностью фаз между колебаниями по обеим взаимодействующим сопряженным формам.

Используя уравнение (2.7), рассмотрим установившиеся (стационарные) режимы деформирования несущей оболочки. Приравнивая правые части этих уравнений к нулю, получим три различных стационарных решения

$$\begin{aligned}
&1.\ \ \zeta=0;\ \ \cos 2\theta_0=1-\frac{4\Delta}{C_{00}S};\ \ 0\le\Delta\le\frac{SC_{00}}{2};\\
&2.\ \ \zeta=C_{00};\ \ \cos 2\theta=1+\frac{4\Delta}{C_{00}S};\ -\frac{SC_{00}}{2}\le\Delta\le 0;\\
&3.\ \ \zeta=\frac{C_{00}}{2}-\frac{\Delta}{S};\ \ \cos 2\theta=-1;\ \left|\Delta\right|\le\frac{SC_{00}}{2}\quad\left(S=\gamma_{11}^2\frac{(f_{10}^2+f_{20}^2)^2}{f_{10}^2f_{20}^2}\right).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Очевидно, что первые два решения (2.9) описывают деформирование несущей оболочки по типу «стоячие» волны. Однако эти решения всегда являются неустойчивыми. Третье решение отвечает деформированию оболочки в виде двух бегущих в окружном направлении изгибных волн, на которые накладывается осесимметричная форма w_0. Бегущие волны аналитически можно представить в виде

$$w_1=C_1(t)\cos(\varphi_1(t)-s_ny)\sin\lambda_m x;\ \ w_2=C_2(t)\sin(\varphi_2(t)+s_ny)\sin\lambda_m x, \tag{2.10}$$

где

$$C_1(t)=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2B^2}{2}+\frac{a_1^2-a_2^2B^2}{2}\cos 2\left(\Omega t+\vartheta_1\right)};$$

$$C_2(t)=\sqrt{\frac{a_1^2A^2+a_2^2}{2}+\frac{a_1^2A^2-a_2^2}{2}\cos 2\left(\Omega t+\vartheta_1\right)};$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1(t) = -\frac{a_2 B}{a_1} tg\left(\Omega t + \vartheta_1\right); \quad \operatorname{tg}\varphi_2(t) = -\frac{a_1 A}{a_2}\operatorname{ctg}\left(\Omega t + \vartheta_1\right).$$

Следует отметить, что в общем случае бегущие волны типа (2.10) характеризуются переменными (периодически изменяющимися со временем) амплитудами C_1, C_2 и соответствующими им фазовыми скоростями $v_f = \dot{\varphi}_1/s_n$ и $v_f = \dot{\varphi}_2/s_n$.

Для осесимметричной формы деформирования w_0 имеем формулу

$$w_0 = \frac{k_{31}}{2\omega_3^2}\left[a_1^2\left(1+A^2\right)\left(1+\cos 2\left(\Omega t+\vartheta_1\right)\right)+a_2^2\left(1+B^2\right)\left(1-\cos 2\left(\Omega t+\vartheta_1\right)\right)\right]\sin^4\lambda_m x. \quad (2.11)$$

Если параметры начального прогиба f_{10}, f_{20} удовлетворяют условию $f_{20}^2 / f_{10}^2 = = a_2^2 / a_1^2$, то обобщенные бегущие волны (2.10) вырождаются в «классические» бегущие волны, имеющие постоянные амплитуды a_1 и a_2, соответственно, и постоянные фазовые скорости $v_f = \pm\Omega / s_n$.

§3. Интегралы нелинейной системы 5-го порядка.

При рассмотрении общей системы (2.2) (с учетом нелинейностей 5-го порядка) первые интегралы типа (2.6) и (2.8) в аналитическом виде построить не удается. Эта проблема может быть решена при определенной «симметрии» начального прогиба (1.9) в окружном направлении, в частности, при $f_{10} = f_{20}$. Вместо интеграла (2.6) тогда имеем [6, 8, 15]

$$a_1^2 + a_2^2 = C_{20} \ \left(C_{20} = \text{const}\right), \quad (3.1)$$

так как в данном случае $k_2 = c_2;\ k_7 = 2c_6;\ k_9 = c_8 / 2.$

Для выведения интеграла типа (2.8) введем замену $\zeta_1 = a_1^2 / C_{20}$. В результате на основании (2.3), (2.1) получим уравнения

$$\frac{d\zeta_1}{dt} = p\zeta_1(1-\zeta_1)\sin 2\theta; \quad \frac{d\theta}{dt} = M_0 + N_0\zeta_1 - \frac{p}{2}(2\zeta - 1)\cos 2\theta, \quad (3.2)$$

где, как и выше $\theta = \vartheta_2 - \vartheta_1$; кроме того,

$$M_0 = -\frac{C_{20}}{8\Omega}(k_1 + 7k_5 C_{20}) + \frac{\Delta}{2\Omega}; \quad N_0 = -\frac{C_{20}}{8\Omega}(k_1 + 7k_5 C_{20}); \quad p = -\frac{C_{20}}{4\Omega}(k_1 + k_5 C_{20}).$$

Данные уравнения допускают интеграл

$$2M_0\zeta_1 + N_0\zeta_1^2 + p\zeta_1(1-\zeta_1)\cos 2\theta = C_{30} \quad (C_{30} = \text{const}), \quad (3.3)$$

который устанавливает связь между параметрами сопряженных форм неидеальной (с начальным прогибом) оболочки заполненной жидкостью при ее свободных колебаниях. Стационарные решения в данном случае будут иметь вид:

$$1.\ \zeta_1 = 0;\ \cos 2\theta = -\frac{2M_0}{p};\ \left|\frac{M_0}{p}\right| \le \frac{1}{2};$$

$$2.\ \zeta_1 = 1;\ \cos 2\theta = -\frac{2(M_0 + N_0)}{p},\ \left|\frac{M_0 + N_0}{p}\right| \le \frac{1}{2}; \quad (3.4)$$

$$3.\ \zeta_1 = \frac{p + 2M_0}{2(p - N_0)};\ \cos 2\theta = 1;$$

$$4.\ \zeta_1 = \frac{p - 2M_0}{2(p + N_0)}; \quad \cos 2\theta = -1.$$

Как и в предыдущем случае (когда рассмотрена упрощенная нелинейная модель оболочки), устойчивым является 4-е решение, которое описывает бегущие волны типа (2.10), которые распространяются в окружном направлении.

Заключение.

Таким образом, в статье предложен подход к аналитическому расчету нелинейных колебаний ортотропных квазицилиндрических (с неосесимметричным начальным прогибом) оболочек, полностью заполненных жидкостью. Прогиб оболочек аппроксимирован одной парой сопряженных изгибных форм в сочетании с корректирующим слагаемым, отражающим специфику нелинейного деформирования оболочечных объектов. Выведена система динамических уравнений для построения приближенных решений, которой использован асимптотический метод Боголюбова – Митропольского.

На основании анализа усредненных уравнений получены первые интегралы, описывающие особенности нелинейного взаимодействия и энергообмена между сопряженными формами несущих оболочек при свободных колебаниях рассматриваемой упруго-жидкостной системы. Определены возможные стационарные режимы деформирования оболочек и исследована их устойчивость. Выявлено, что при взаимодействии сопряженных форм деформирование оболочек по типу «стоячие волны» не могут быть реализованы. Устойчивыми являются лишь режимы бегущих волн, возбуждаемые при определенных, формируемых начальными прогибами «расстройках» частот, отвечающих сопряженным формам.

Р Е З Ю М Е . Запропоновано теоретичні підходи до дослідження вільних коливань неідеальних (з малими недосконалостями геометричного характеру) ортотропних циліндричних оболонок при наявності рідинного наповнювача. Відповідну задачу розглянуто в геометрично нелінійній постановці. Основну увагу приділено дослідженню взаємодії та енергообміну між «спряженими» згинними формами оболонок, які враховуються в радіальному динамічному прогині. Проаналізовано вплив початкових прогинів на процеси взаємодії форм початкових прогинів.

1. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.

2. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек.– М.: Наука, 1972. – 432 с.

3. *Вольмир А.С.* Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. – М.: Наука, 1979. – 416 с.

4. *Ганиев Р.Ф., Ковальчук П.С.* Динамика систем твердых и упругих тел. (Резонансные явления при нелинейных колебаниях). – М.: Машиностроение, 1980. – 208 с.

5. *Динамика* элементов конструкций / Под ред. чл.- корр. НАН Украины В.Д.Кубенко. – К.: «АСК», 1999. – 379 с. (Механика композитов. В 12-ти томах. Т. 9).

6. *Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Краснопольская Т.С.* Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. – К.: Наук. думка, 1984. – 220 с.

7. *Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Подчасов Н.П.* Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. – К.: Вища шк., 1989. – 280 с.

8. *Маневич А.Ю.* Взаимодействие сопряженных форм при нелинейных колебаниях кругового кольца // Прикл. матем. и механика. – 1994. – **42**, № 6. – С. 119 – 125.

9. *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – К.: Наук. думка, 1971. – 440 с.

10. *Amabili M.* Theory and experiments for large amplitude vibrations of empty and fluid-filled circular cylindrical shell with imperfections // J. Sound and Vibr. – 2003. – **262**. – P. 921 – 975.

11. *Amabili M., Païdoussis M.P.* Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels with and without fluid-structure interaction // Appl. Mech. Rev. – 2003. – **56**, N 4. – P. 349 – 381.

12. *Amabili M., Pellicano F., Vakakis A.F.* Nonlinear vibrations and multiple resonances of fluid – filled circular shells. – P.1: Equations of motion and numerical results // J. Vibr. And Acoust. – 2000. – **122**. – P. 346 – 354.

13. *Kubenko V.D., Kovalchuk P.S.* The Stability and Nonlinear Vibrations of Closed Cylindrical Shells Interacting with Fluid Flow (Review) // Int. Appl. Mech. – 2015.– **51**, N 1. – P. 18 – 77.
14. *Kubenko V.D., Koval`chuk P.S.* Experimental Studies of the Vibrations and Dynamic Stability of Laminated Composite Shells // Int. Appl. Mech. – 2010. – **45**, N 9. – P. 514 − 534.
15. *Kubenko V.D., Koval'chuk P.S.* The Modelling of Resonance Processes Nonlinear Interacting Standing and Running Waves in Cylindrical Shells Containing Flowing Fluid // Int.Appl. Mech, − 2014. − **50**, N 4. − P. 353 − 364.
16. *Kubenko V.D., Kova`lchuk P.S., Kruk L.A*. Nonlinear interaction of bending deformation of free oscillating cylindrical shells // J. of Sound and Vibr. – 2003. – N 265. – P. 245 – 268.
17. *Kubenko V.D., Koval`chuk P.S., Kruk L.A.* On Free Nonlinear Vibrations of Fluid – Filled Cylindrical Shells with Multiple Natural Frequencies // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 10. – P.1193 − 1203.
18. *Kubenko V.D., Koval`chuk P.S., Kruk L.A.* Nonlinear Vibrations of Fluid – Filled Cylindrical Shells under Combined Longitudinal-Transverse Periodic Excitation // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 2. – P. 186 − 194.
19. *Pellicano F., Amabili M.* Stability and vibration of empty and fluid – filled circular cylindrical shells under static and periodic axial loads // Int. J. of Solids Struct. – 2003. – **40**. – P. 3229 – 3251.
20. *Pellicano F., Amabili M., Vakakis A.F.* Nonlinear vibrations and multiple resonances of fluid – filled circular cylindrical shells. P. 2: Perturbation analysis. Equations of motion and numerical results // J. Vibr. and Acoust. – 2000. – **122**. – P. 346 – 354.

Поступила 16.06.2016 Утверждена в печать 29.11.2016