

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.05.044>

УДК 539.3

**М.П. Семенюк<sup>1</sup>, В.М. Трач<sup>2</sup>, Н.Б. Жукова<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ

<sup>2</sup> Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне

E-mail: zhukova\_n@ukr.net, trach-vm@ukr.net

## **Деформування тришарових циліндричних оболонок з трансверсально пружним заповнювачем в околі критичного стиску**

*Представлено членом-кореспондентом НАН України В.М. Назаренком*

*З використанням асимптотичного методу Коїтера—Будянського розроблено процедуру розв'язання задачі стійкості і закритичної поведінки тришарової оболонки з легким заповнювачем, що має пружність тільки в трансверсальному напрямку. Розв'язувальна система нелінійних рівнянь введена з урахуванням дискретності структури, що дозволяє розглядати загальні та локальні варіанти форм втрати стійкості. Виконано розрахунок конструкцій, що складаються з двох циліндричних вуглепластикових оболонок, які взаємодіють за допомогою пружинного заповнювача.*

**Ключові слова:** тришарові оболонки, стійкість, трансверсально пружний заповнювач, асимптотичний метод, закритична поведінка

На відміну від типових тришарових структур, що розглядалися раніше [1–5], в даний час виникла потреба у вивченні тришарових оболонок з середнім шаром, який можна уявити як тіло, що має пружність тільки в трансверсальному напрямку. Якщо зовнішні шари взаємодіють за допомогою перпендикулярних до їхньої поверхні пружин, то еквівалентне континуальне тіло буде мати зазначені властивості. У роботі [6] модель пружин між шарами двошарової нанотрубки використовується для врахування взаємодії, що обумовлена силою відштовхування—притягнення Ван дер Ваальса. Стійкість і початкова закритична поведінка одношарових циліндричних оболонок із заповнювачем розглядалась в роботі [7].

Ми будемо досліджувати стійкість тришарових оболонок із середнім шаром пружинного типу. Вплив такого заповнювача на критичні навантаження і характер початкової закритичної поведінки тришарових оболонок є предметом вивчення представленої статті.

**Нелінійні рівняння рівноваги тришарових оболонок.** При виведенні нелінійних рівнянь рівноваги тришарових оболонок будемо виходити з варіаційного принципу Лагранжа

$$\delta V - \delta A = 0, \quad (1)$$

де  $V$  — потенціальна енергія деформації оболонки;  $A$  — робота зовнішнього навантаження. Енергія  $V$  складається з енергій зовнішнього шару —  $V_1$ , внутрішнього шару —  $V_2$ , а також

© М.П. Семенюк, В.М. Трач, Н.Б. Жукова, 2019

енергії середнього шару. Відповідно до гіпотез Тимошенка для потенціальної енергії деформації  $V_i$  ( $i = 1, 2$ ) буде справедливим вираз

$$V_i = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (T_{11,i} \varepsilon_{11,i} + T_{12,i} \varepsilon_{2,i} + T_{22,i} \varepsilon_{22,i} + T_{13,i} \varepsilon_{31,i} + T_{23,i} \varepsilon_{231,i} + M_{11,i} k_{11,i} + M_{12,i} k_{12,i} + M_{22,i} k_{22,i}) R_i dx d\varphi, \quad (2)$$

де  $L$  – довжина оболонки;  $R_i$  – радіус серединної поверхні  $i$ -го шару;  $T_{mn,i}$ ,  $M_{mn,i}$  – зусилля і моменти, еквівалентні чинним в шарах напруженням;  $\varepsilon_{mn,i}$  – деформації;  $m, n$  – індекси,  $k_{mn,i}$  – приріст кривин і кручення.

Зв'язок між силовими і деформаційними функціями задається у вигляді закону Гука [8].

Нелінійні вирази деформацій через переміщення приймаються у вигляді, що відповідає теорії Муштарі–Доннелла–Власова (МДВ)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \theta_1^2; & \varepsilon_{12} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \theta_1 \theta_2; & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R_i} + \frac{1}{2} \theta_2^2; & \varepsilon_{13} &= \theta + \theta_1; \\ \varepsilon_{23} &= \psi + \theta_2; & \varepsilon_{33} &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \theta_1 &= \frac{\partial \theta}{\partial x}, & \theta_2 &= \frac{\partial \theta}{\partial y}; & k_{11} &= \frac{\partial \theta}{\partial x}; & k_{12} &= \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}; & k_{22} &= \frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $u, v$  – тангенціальні переміщення;  $w$  – переміщення по нормалі, додатний напрямком якої визначається до центру кола;  $\theta, \psi$  – кути повороту;  $y = R_i \varphi$  – для  $i$ -го шару.

Середній шар (3-й) передбачається абсолютно податливим у всіх напрямках, крім трансверсального (вісь  $z$ ). Початок осі лежить на серединній поверхні цього шару. В такому випадку потенціальна енергія 3-го шару визначається виразом

$$V_3 = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{t_3}{2}}^{\frac{t_3}{2}} \sigma_{33} \varepsilon_{33} R_3 dx d\varphi dz. \quad (4)$$

З співвідношень теорії пружності і умов контакту при  $z = -\frac{t_3}{2}$  і  $z = \frac{t_3}{2}$

$$w_1 = w_0 - \frac{t_3}{2} \chi; \quad w_2 = w_0 + \frac{t_3}{2} \chi.$$

отримуємо переміщення середнього шару

$$w_0 = \frac{w_1 + w_2}{2}; \quad \chi = \frac{w_2 - w_1}{t_3}. \quad (5)$$

Отже,

$$\varepsilon_{33} = \frac{w_2 - w_1}{t_3}; \quad T_{33} = t_3 \sigma_{33} = E_3 t_3 \varepsilon_{33} = E_3 (w_2 - w_1);$$

$$V_3 = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{E_3}{t_3} (w_2 - w_1)^2 R_3 dx d\varphi. \quad (6)$$

В роботі [9] показано, що відношення  $\frac{E_3}{t_3}$  дорівнює коефіцієнту податливості двовимірної основи товщиною  $t_3$  без урахування поперечних напружень. Нехай  $S_3 = E_3/t_3$ .

З використанням співвідношень (2)–(6) з варіаційного принципу (1), коли в якості незалежних функцій приймаються переміщення  $u_i, v_i, w_i$  і кути  $\theta_i, \psi_i$ , отримуємо 10 рівнянь в частинних похідних від вказаних функцій. У варіанті теорії оболонки, що використовується, застосування виразів тангенціальних деформацій через зусилля дозволяє скоротити розв'язувальну систему диференціальних рівнянь до 8-ми. Ця система буде мати змішаний вид, так як вона буде містити похідні не тільки від переміщень, але і від функції зусиль. Вважаємо, що в функціоналі (2), крім переміщень  $u, v, w$ , незалежними будуть також тангенціальні зусилля  $T_{11}, T_{12}, T_{22}$ . Для деформацій маємо

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{\Delta}(T_{11}C_{22} - T_{12}C_{12}), \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{\Delta}(-T_{11}C_{12} + T_{22}C_{11}), \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{C_{66}}T_{12}, \quad \Delta = C_{11}C_{22} - C_{12}^2.$$

Складова функціоналу (2) буде мати вигляд

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \theta_1^2 \right) T_{11} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \theta_1 \theta_2 \right) T_{12} + \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \theta_2^2 \right) T_{22} - \right. \\ & - \frac{1}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} (C_{22}T_{11}^2 + C_{11}T_{22}^2 - 2C_{12}T_{11}T_{22}) - \frac{1}{C_{66}} T_{12}^2 + C_{13} \left( \theta + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + C_{23} \left( \psi + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \\ & \left. + D_{11} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + D_{22} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + D_{66} \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy. \end{aligned} \quad (7)$$

Тут індекс “2” опускається, оскільки вираз (7) справедливий для обох несучих шарів. Введемо функцію зусиль  $F$ , прийнявши

$$T_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad T_{12} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}; \quad T_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

З огляду на те, що переміщення середнього шару, деформації  $\varepsilon_{33}$  та зусилля  $T_{33}$  виражаються за допомогою співвідношень (5), варійованими в функціоналі варіаційного принципу Лагранжа (1) будуть функції  $F_1$  і  $F_2$ , прогини  $w_1$  і  $w_2$ , функції  $\theta_1, \theta_2$  і  $\psi_1, \psi_2$ . Внаслідок цього варіаційне рівняння набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ \left[ L_1(w_i, F_i) + \frac{1}{R_i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} - \frac{1}{2} (w_i, w_i) \right] \delta F_i + \right. \\ & \left. + [L_2(w_i, F, \theta_i, \psi_i) + (F_i, w_i) + q_i] \delta w_i + L_3(\theta_i, \psi_i, w_i) \delta \theta_i + L_4(\theta_i, \psi_i, w_i) \delta \psi_i \right\} R_i dx d\varphi - \\ & - \sum_{i=1}^2 \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{1}{R_i^2} \frac{\partial^2 F_i}{\partial \psi^2} + T_{11,0}^i \right) \delta w \right]_0^L R_i d\varphi = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Передбачається, що до торцевих перерізів кожного шару прикладені стискаючі зусилля  $T_{11,i} = T_{11}^0$ , а поверхневий тиск  $q$  – тільки до поверхні першого шару. В (8) використані наступні позначення диференціальних операторів  $L_i(\cdot)$  розв'язувальних функцій

$$L_1(\cdot) = \left( A_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2A_{12} \frac{\partial^4}{R^2 \partial x^2 \partial \varphi^2} + A_{22} \frac{\partial^4}{R^4 \partial \varphi^4} \right) F_i + \frac{1}{R_i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2};$$

$$\begin{aligned}
 L_2() &= \left[ D_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{1}{R^2} (D_{12} + 2D_{16}) \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial \varphi^2} \right] \theta_i + \left[ \frac{1}{R_i} (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \varphi} + \frac{1}{R_i^3} \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} \right] \Psi_i + \\
 &+ \frac{1}{R_i} \frac{\partial^2 F_i}{\partial x^3} - (-1)^i C (\omega_2 - \omega_1) \frac{R_3}{R_i}; \\
 L_3() &= \left( D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R_i^2} D_{66} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \theta_i + \frac{1}{R_i} (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x \partial \varphi} - C_{55} \left( \theta_i + \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \right); \\
 L_4() &= \frac{1}{R_i} (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x \partial \varphi} + \left( D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R_i^2} D_{22} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \Psi_i - C_{44} \left( \Psi_i + \frac{1}{R_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial \varphi} \right). \tag{9}
 \end{aligned}$$

У виразах  $L_1$  є коефіцієнти

$$A_{11} = \frac{C_{11}}{\Delta}; \quad A_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{C_{66}} - \frac{2C_{12}}{\Delta} \right); \quad A_{66} = \frac{C_{22}}{\Delta}; \quad \Delta = C_{11}C_{22} - C_{12}^2.$$

Оператор  $(,)$  має вигляд

$$(F, \omega) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \varphi} \frac{\partial \omega}{\partial x \partial \varphi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2}.$$

Прирівнюючи до нуля вирази при варіаціях  $\delta F_i, \delta \omega_i, \delta \theta_i, \delta \Psi_i$ , з варіаційного рівняння (8) отримуємо, вісім нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}
 L_1(F_i) + \frac{1}{2} (\omega_i, \omega_i) &= 0; \quad L_2(\theta_i, \Psi_i) + (F_i, \omega_i) = q, \\
 L_3(\theta_i, \Psi_i, \omega_i) &= 0; \quad L_4(\theta_i, \Psi_i, \omega_i) = 0, \quad i = 1, 2. \tag{10}
 \end{aligned}$$

Використовуючи ці рівняння, можемо досліджувати напружено-деформований стан оболонки на всій траєкторії деформування, включаючи граничні точки, точки біфуркації, закритичну поведінку. Нижче, вважаючи докритичний стан безмоментним, обмежимося розрахунком критичного навантаження і початкової закритичної поведінки в околі критичної точки. Для цього скористаємося асимптотичним методом Койтера [10] в альтернативному варіанті Будянського [11, 12]. Вважаємо, що навантаження на оболонку змінюється пропорційно параметру  $\lambda$ . Навантаження біфуркації визначається значенням цього параметра  $\lambda_c$ . Рівноважний стан оболонки після проходження критичної точки визначається змінним значенням параметра  $\lambda$ , характер якого можна описати за допомогою асимптотичного розкладу

$$\lambda = \lambda_c (1 + a\xi + b\xi^2 + \dots) \tag{11}$$

Таким чином, при відомому значенні параметра  $\lambda_c$ , згідно з теорією [10], закритичну поведінку оболонки можна визначити, якщо знайти значення коефіцієнтів  $a$  і  $b$  ряду (11).

Відповідно до [12], представимо розв'язувальні функції, щодо яких записані рівняння (10), у вигляді асимптотичних рядів за ступенями малого параметра

$$\begin{bmatrix} F_i \\ \omega_i \\ \theta_i \\ \Psi_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{i,0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \xi \begin{bmatrix} F_{i,1} \\ \omega_{i,1} \\ \theta_{i,1} \\ \Psi_{i,1} \end{bmatrix} + \xi^2 \begin{bmatrix} F_{i,2} \\ \omega_{i,2} \\ \theta_{i,2} \\ \Psi_{i,2} \end{bmatrix} + \xi^3 \begin{bmatrix} F_{i,3} \\ \omega_{i,3} \\ \theta_{i,3} \\ \Psi_{i,3} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

де  $\xi$  – малий параметр-амплітуда моди випучування, перший індекс  $i$  визначає номер шару ( $i = 1, 2$ ), другий – номер члена в розкладах. При осьовому стиску зусиллями  $T_{11,0}^i$  і зовнішньому тиску інтенсивністю  $q$  докритичний напружений стан оболонки буде

$$\frac{\partial^2 F_{i,0}}{R_i^2 \partial \varphi^2} = -\lambda a_t; \quad \frac{\partial^2 F_{i,0}}{\partial x^2} = -\lambda a_q; \quad \frac{\partial^2 F_{i,0}}{R_i \partial x \partial \varphi} = 0, \quad (13)$$

де параметр  $\lambda$  має розмірність зусилля, а коефіцієнти  $a_t$  і  $a_q$  визначають співвідношення між зусиллями в осьовому і окружному напрямках, знак “мінус” позначає, що зусилля – стискаючі.

Підставимо ряди (12) у варіаційне рівняння (8). Прирівнюючи до нуля вирази при ступенях параметра  $\xi$ , отримаємо послідовність формулювань задач щодо функцій, які є коефіцієнтами вказаних рядів (12). При першому ступені матимемо варіаційне рівняння рівноваги в точці, де основна траєкторія перетинається з траєкторією іншого розв'язку нелінійних рівнянь. Однорідна задача щодо функцій з індексом “1” виводиться з рівняння

$$\sum_{i=1}^2 \int_0^{L} \int_0^{2\pi} \{L_1(F_{i,1}, \dots) \delta F_{i,1} + [L_2(F_{i,1}, \dots) + \lambda_c(F_{i,0}, w_{i,1})] \delta w_{i,1} + L_3(w_{i,1}, \dots) \delta \theta_{i,1} + L_4(w_{i,1}) \delta \psi_{i,1}\} R_i dx d\varphi = 0. \quad (14)$$

При врахуванні виразу (13) дужка набуває вигляду

$$\lambda(F_{i,0}, w_{i,1}) = -\lambda_c \left( a_t \frac{\partial^2 w_{i,1}}{\partial x^2} + a_q \frac{\partial^2 w_{i,1}}{R_i^2 \partial \varphi^2} \right). \quad (15)$$

Варіації функції в рівнянні (14) можуть приймати значення коефіцієнтів в розкладах (12). В результаті отримаємо співвідношення їх ортогональності в такому вигляді:

$$\sum_{i=1}^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} \{L_1(F_{i,1}, w_{i,1}) F_{i,n} + [L_2(F_{i,1}, \dots) - \lambda(F_{i,1}, w_{i,1})] w_{i,n} + L_3(w_{i,1}, \dots) \theta_{i,n} + L_4(w_{i,1}) \psi_{i,n}\} R_i dx d\varphi = 0. \quad (16)$$

Звідси одержуємо також інший вигляд цього співвідношення

$$\sum_{i=1}^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} \{L_1(F_{i,n}, w_{i,n}) F_{i,1} + [L_2(F_{i,n}, \dots) - \lambda(F_{i,n}, w_{i,1})] w_{i,1} + L_3(w_{i,n}, \dots) \theta_{i,1} + L_4(w_{i,n}) \psi_{i,1}\} R_i dx d\varphi = 0. \quad (17)$$

Використовуємо умови (17) для знаходження коефіцієнтів  $a$  і  $b$  в розкладі (11). Розглянемо співвідношення, з якого можна отримати значення коефіцієнта  $a$ . При  $\xi^2$  матимемо

$$\sum_{i=1}^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ \left[ L_1(F_{i,2}, \dots) + \frac{1}{2}(w_{i,1}, w_{i,1}) \right] F_{i,1} + [L_2(w_{i,2}, \dots) - a \lambda_c(F_{i,0}, w_{i,2}) + (F_{i,1}, w_{i,2})] w_{i,1} + L_3(w_{i,2}, \dots) \theta_{i,1} + L_4(w_{i,2}, \dots) \psi_{i,1} \right\} R_i dx d\varphi = 0. \quad (18)$$

З огляду на умови (17) при  $n = 2$ , а також, що

$$\int_0^{2\pi} \int_0^L \left[ \frac{1}{2} (w_{i,1}, w_{i,1}) F_{i,1} + (F_{i,1}, w_{i,1}) w_{i,1} \right] R_i dx d\varphi = 0,$$

з (18) знаходимо  $a = 0$ .

Аналогічний інтеграл при  $\xi^3$  набуває вигляду

$$\sum_{i=1}^2 \int_0^{2\pi} \int_0^L \left\{ L_1(F_{i,3}, \dots) (w_{i,1}, w_{i,2}) F_{i,1} + [L_2(w_{i,3}, \dots) - \lambda_c (F_{i,0}, w_{i,3}) + (F_{i,1}, w_{i,2}) + (F_{i,2}, w_{i,1}) - \lambda_c b (F_{i,0}, w_{i,1}) w_{i,1} + L_3(F_{i,3}, \dots) \theta_{i,1} + L_4(w_{i,3}, \dots) \psi_{i,1}] R_i \right\} dx d\varphi = 0.$$

Якщо врахувати умови ортогональності (17), отримаємо

$$\sum_{i=1}^2 \int_0^{2\pi} \int_0^L \left\{ (w_{i,1}, w_{i,2}) F_{i,1} + [(F_{i,1}, w_{i,2}) + (F_{i,2}, w_{i,1})] w_{i,1} - \lambda_c b (F_{i,0}, w_{i,1}) w_{i,1} \right\} R_i dx d\varphi = 0.$$

Ці рівняння дозволяють обчислити коефіцієнт  $b$ , що визначає характер початкової за- критичної поведінки даної оболонки. При відомих розв'язках однорідної задачі (14) і нео- однорідною (18) знайдемо

$$b = -\frac{B}{\lambda_c A}, \quad (19)$$

де

$$B = \sum_{i=1}^2 \int_0^{2\pi} \int_0^L \left\{ [(w_{i,1}, w_{i,2}) F_{i,1} + (F_{i,1}, w_{i,2})] w_{i,1} + (F_{i,2}, w_{i,1}) w_{i,1} \right\} R_i dx d\varphi;$$

$$A = \sum_{i=1}^2 \int_0^{2\pi} \int_0^L (F_{i,0}, w_{i,1}) w_{i,1} R_i dx d\varphi. \quad (20)$$

**Розв'язок задачі стійкості і початкової закритичної поведінки.** Для розрахунку кри- тичного значення параметра навантаження скористаємось варіаційним рівнянням (14). При заданих граничних умовах, з огляду на сталість коефіцієнтів при шуканих функціях, розв'язок можна представити у вигляді одного члена тригонометричного ряду. Матимемо

$$F_{i,1} = B^i \sin l_m x \cos n\varphi, \quad w_{i,1} = C^i \sin l_m x \cos n\varphi,$$

$$\theta_{i,1} = D^i \cos l_m x \cos n\varphi, \quad \psi_{i,1} = E^i \sin l_m x \sin n\varphi, \quad (21)$$

для зовнішнього ( $i = 1$ ) і внутрішнього ( $i = 2$ ) шарів, де

$$l_m = \frac{m\pi}{L}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad n = 2, 3, \dots$$

Після підстановки (21) в рівняння (20) і виконання необхідних процедур отримаємо систему однорідних алгебраїчних рівнянь

$$[X_{ij}] \bar{Y} = 0, \quad i, j = 1, \dots, 8; \quad \bar{Y} = (B^1, C^1, D^1, E^1, B^2, C^2, D^2, E^2), \quad (22)$$

Рівняння (22) використовуються для знаходження критичного значення параметра  $\lambda_c$  і хвильових чисел  $m$  і  $n$ , що визначають форму вигину при біфуркації.

Записуючи систему рівнянь відносно функцій з індексом “2” обмежимося тільки 1-м і 2-м, 5-м і 6-м, так як рівняння (3), (4), (7), (8) залишаються однорідними такого ж вигляду, що і в попередній задачі. При  $a = 0$  будемо мати

$$\begin{aligned} L_1(F_{i,2}) &= \frac{1}{2}(\omega_{i,1}, \omega_{i,1}); \\ L_2(\omega_{i,2}, \dots) - \lambda_c(F_{i,0}, \omega_{i,1}) &= -(F_{i,1}, \omega_{i,1}). \end{aligned} \quad (23)$$

При  $i=1$  це буде 1-е і 2-е рівняння вихідної системи, а при  $i=2$  — 5-е і 6-е рівняння. При підстановці виразів (21) для біфуркаційних функцій  $\omega_{i,1}$  і  $F_{i,1}$  в (23) для правих частин отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\omega_{i,1}, \omega_{i,1}) &= \gamma_1^{(i)} \left( \sum_k b_k \sin l_k x - \cos 2n\varphi \sum_k c_k \sin l_k x \right); \\ (F_{i,1}, \omega_{i,1}) &= \gamma_1^{(i)} \left( \sum_k b_k \sin l_k x - \cos 2n\varphi \sum_k c_k \sin l_k x \right), \end{aligned} \quad (24)$$

де

$$\gamma_1^{(i)} = \frac{1}{2}(C^i)^2 l_m^2 n^2, \quad \gamma_2^{(i)} = B^i C^i l_m^2 n^2, \quad b_k = \frac{4k}{\pi(k^2 - 4m^2)}, \quad c_k = \frac{4}{n\pi}, \quad k = 1, 3, \dots$$

Розв’язок рівнянь (23) задаємо у вигляді

$$\begin{aligned} F_{i,2} &= \sum_k B_{k,0}^{(i)} \sin l_k x + \cos 2n\varphi \sum_k B_{k,2n}^{(i)} \sin l_k x; \\ \omega_{i,2} &= \sum_k C_{k,0}^{(i)} \sin l_k x + \cos 2n\varphi \sum_k C_{k,2n}^{(i)} \sin l_k x; \\ \theta_{i,2} &= \sum_k D_{k,0}^{(i)} \cos l_k x + \cos 2n\varphi \sum_k D_{k,2n}^{(i)} \cos l_k x; \\ \Psi_{i,2} &= \sum_k E_{k,2n}^{(i)} \sin l_k x \sin 2n\varphi. \end{aligned} \quad (25)$$

Отримавши розв’язок однорідної (14) і неоднорідної (23) систем рівнянь, можемо застосувати вираз (20) для визначення коефіцієнта  $b$ , за знаком і величиною якого можна судити про характер початкової закритичної поведінки оболонок, що розглядаються. Чисельник рівняння (19) представимо в такому вигляді:

$$\begin{aligned} B_i &= \sum_{i=1}^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[ \frac{R}{R_i^2} \left( \frac{\partial^2 F_{i,1}}{\partial \varphi^2} \frac{\partial \omega_{i,1}}{\partial x} - \frac{\partial^2 F_{i,1}}{\partial x \partial \varphi} \frac{\partial \omega_{i,1}}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial \omega_{i,2}}{\partial x} + \frac{2}{R_i^2} \left( \frac{\partial^2 F_{i,1}}{\partial x^2} \frac{\partial \omega_{i,1}}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 F_{i,1}}{\partial x \partial \varphi} \frac{\partial \omega_{i,1}}{\partial x} \right) \frac{\partial \omega_{i,2}}{\partial \varphi} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{R_i^2} \left( \frac{\partial \omega_{i,1}}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 F_{i,2}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R_i^2} \left( \frac{\partial \omega_{i,1}}{\partial \varphi} \right)^2 \frac{\partial^2 F_{i,2}}{\partial x^2} - \frac{2}{R_i^2} \left( \frac{\partial \omega_{i,1}}{\partial \varphi} \frac{\partial \omega_{i,1}}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 F_{i,2}}{\partial x \partial \varphi} \right] R_i dx d\varphi. \end{aligned} \quad (26)$$

Для знаменника в разі дії осьового  $\lambda a_t$  і  $\lambda a_q$  колового зусиль

$$A_i = -\lambda_c \sum_{i=1}^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[ a_t^i \left( \frac{\partial \omega_{i,1}}{\partial x} \right)^2 + a_q^i \left( \frac{\partial \omega_{i,1}}{R_i \partial \varphi} \right)^2 \right] R_i dx d\varphi. \quad (27)$$

Враховуючи ці позначення отримаємо

$$b = -\frac{(B_1 + B_2)}{(A_1 + A_2)}. \quad (28)$$

Функції  $w_{i,1}, w_{i,2}, F_{i,1}, F_{i,2}$ , що задані у вигляді тригонометричних функцій (21) і тригонометричних рядів (25), стають відомими після рішення однорідної системи алгебраїчних рівнянь (22) і неоднорідної системи (23). Підстановка цих функцій в вирази (27) і (28) з подальшим інтегруванням приводить до таких виразів для чисельника і знаменника дробу (18):

$$B = -2n^2 l_m^2 \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{1}{R_i^2} \sum_k \left[ 2 \left( 2 \frac{B^i}{C^i} C_{k,0} + B_{k,0} \right) \frac{k}{4m^2 - k^2} + \left( 2 \frac{B^i}{C^i} C_{k,2n} + B_{k,2n} \right) \frac{1}{k} \right] \right\};$$

$$A = \frac{\pi}{2} \sum_i (C^i)^2 \left( a_i^i l_m^3 + \frac{n^2}{R_i^2} a_i^i \right).$$

При відомому коефіцієнті  $b$  можна обчислити критичні навантаження  $\lambda_s$  оболонки з геометричними недосконалотями у вигляді моди вигинання [10]

$$\left( 1 - \frac{\lambda_s}{\lambda_c} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{-3b} \bar{\xi} \frac{\lambda_s}{\lambda_c},$$

де  $\bar{\xi}$  — амплітуда початкового прогину.

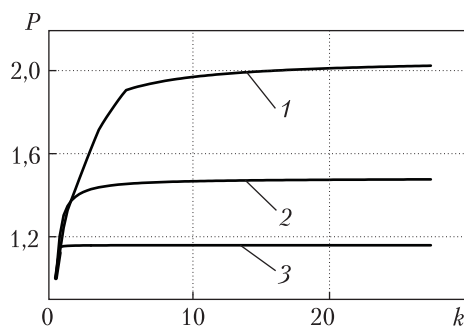
**Результати розрахунку.** Використовуємо отримане рішення для аналізу особливостей вигинання тришарових оболонок, середній шар яких перешкоджає тільки зближенню або віддаленню зовнішніх шарів, але не чинить опору їх взаємному проковзуванню. Вважаємо, що несучі зовнішні шари виготовлені з армованого вуглецевими волокнами епоксидного сполучного. Об'ємний вміст волокон в композиті становить 0,6. Модуль пружності вуглецевого волокна  $E_a$  прийнятий рівним 420 ГПа, матриці —  $E = 3,5$  ГПа, коефіцієнти Пуассона відповідно рівні  $\nu_a = 0,21$  і  $\nu = 0,35$ . Отримані за формулами [8] механічні характеристики вуглепластика будуть такими:

$$E_{11} = 253,42 \text{ ГПа}; E_{22} = 17,41 \text{ ГПа}; G_{12} = G_{13} = 5,04 \text{ ГПа};$$

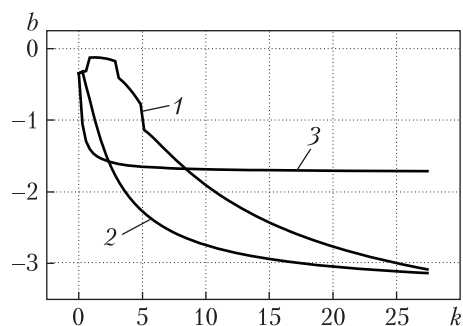
$$G_{23} = 4,36 \text{ ГПа}; \nu_{12} = 0,257; \nu_{21} = 0,011.$$

При аналізі критичних навантажень і особливостей закритичної поведінки тришарових оболонок будемо розглядати три варіанти, що відрізняються радіусом внутрішнього шару при заданій довжині  $L$ . Радіус зовнішнього шару  $R_1 = 100$  мм вважаємо незмінним. Внутрішній шар буде мати радіус  $R_2 = 75, 50$  чи  $25$  мм. Радіус середнього шару  $R_3$  в кожному варіанті визначається напівсумою  $(R_1 + R_2)/2$ . Товщини зовнішнього і внутрішнього шарів  $t = 5$  мм. Для середнього шару товщина  $t_3$  обчислюється відповідно до розглянутого варіанта:  $t_3 = R_1 - R_2 - t$ . Модуль пружності середнього шару  $E_3$  приймається рівним 20 МПа, жорсткість  $S_3 = E_3 / t_3$  зменшується обернено пропорційно товщині. Ця жорсткість при дослідженні її впливу на стійкість оболонки буде збільшуватися кратно цілому коефіцієнту  $k$ .

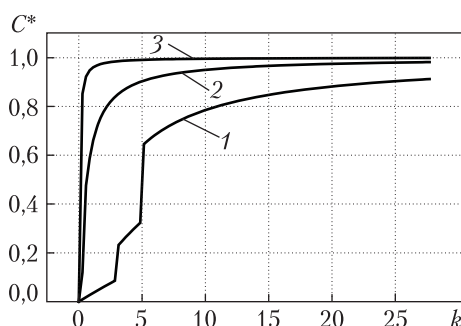




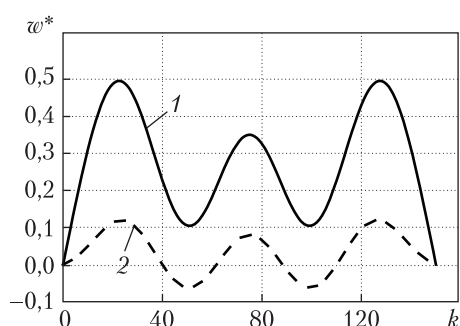
**Рис. 1.** Залежність критичних значень осевих зусиль  $T_{11,kr}$  від жорсткості  $S_3$



**Рис. 2.** Залежність коефіцієнта початкової закритичної поведінки  $b$  від жорсткості  $S_3$



**Рис. 3.** Відношення амплітуд мод вигинання внутрішньої оболонки до зовнішньої



**Рис. 4.** Форми вигинання зовнішньої (1) та внутрішньої (2) оболонок в околі критичної точки

Якщо між шарами зв'язку немає або він дуже незначний, то критичні осеві зусилля кожного шару будуть різними. Для оболонки з радіусом 100 мм  $T_{11,c} = 3604$  Н/мм, а для оболонки з радіусами 75; 50 та 25 мм ці зусилля будуть рівні відповідно 4927; 7642 та 13650 Н/мм.

За наявності між шарами вуглепластика лінійних пружин або радіально армованого легкого матеріалу нормальні переміщення  $w_1$  і  $w_2$  взаємопов'язані. Врахування цього чинника в розробленій моделі дозволяє виявити ряд особливостей, супутніх втраті стійкості оболонок, що розглядаються, включаючи біфуркацію рівноважного стану і початкову закритичну поведінку. На рис.1 наведені криві, що ілюструють залежність критичних значень осевих зусиль  $T_{11,kr}$  від жорсткості  $S_3$ . На цьому рисунку по осі абсцис відкладені значення коефіцієнта  $k$ , кратно якому збільшується трансверсальна жорсткість заповнювача: по осі ординат – значення  $P = T_{11,kr} / T_{11,c}$ , де  $T_{11,c}$  – критичне зусилля одношарової оболонки з радіусом  $R_1$ . Крива 1 отримана для варіанта з  $R_2 = 25$ мм, крива 2 – при  $R_2 = 50$  мм, крива 3 – при  $R_2 = 75$  мм. Кожна з цих кривих має дві характерні ділянки. Перша ділянка відповідає значному впливу жорсткості  $S_3$  на критичні зусилля, хоча максимальна ордината для кожного варіанта тришарової оболонки різна. На кривій 1 ця ордината незначно більше 1,9; на кривій 2 – 1,5; на кривій 3 – 1,2. Друга ділянка кожної кривої майже паралельна

осі абсцис. Залежності коефіцієнта  $b$  від геометричних параметрів шарів і трансверсальної жорсткості  $S_3$  у вигляді кривих показані на рис. 2. Номерами 1, 2 та 3 позначені графіки для тих же оболонок, що і на рис. 1. Для всіх розглянутих оболонок коефіцієнт  $b$  — негативний, що говорить про те, що критичний стан цих оболонок буде нестійким.

Уявлення про те, як деформується внутрішній шар оболонки при біфуркації дає рис. 3. Тут  $C^* = C_2 / C_1$ , де  $C_i$  — амплітуди хвиль зовнішніх шарів при втраті стійкості. З постановки задачі виходить, що хвилеутворення обох несучих оболонок однакове за формою, але може відрізнятись за амплітудами. Якщо амплітуда моди вигинання зовнішньої оболонки дорівнює одиниці, то амплітуда моди внутрішньої оболонки в залежності від жорсткості  $S_3$  для варіантів, що розглядаються, буде змінюватись так, як показано на рис. 3. Амплітуда зростає від 0 до 1, але кожного разу — з різною швидкістю. З цього випливає, що при деякій жорсткості середнього шару рознесені вуглепластикові шари, незважаючи на відмінність в їх радіусах, будуть втрачати стійкість по однаковій формі. Критичне зусилля для тришарової оболонки  $T_{11,кр} > T_{11,c}$  для шару з радіусом  $R_1$  і  $T_{11,кр} < T_{11,c}$  для шару з радіусом  $R_2$ . У прийнятій розрахунковій моделі при нульовій жорсткості середнього шару критичне зусилля  $T_{11,кр} = T_{11,c}$  зовнішнього шару.

На рис. 4 наведені графіки, що ілюструють форму, яку будуть мати твірні зовнішнього і внутрішнього циліндрів в околі критичної точки (тобто в початковому закритичному стані). Крива 1 на цих рисунках відноситься до зовнішньої оболонки, крива 2 — до внутрішньої. На рис. 4 наведені графіки для  $S_3 = 1,704$  Н/мм. Зі збільшенням трансверсальної жорсткості форми вигинання шарів, як при біфуркації, так і в початковому закритичному стані зближуються. Такий характер втрати стійкості тришарових оболонок спостерігається в тому випадку, якщо у вихідній розрахунковій моделі використовується гіпотеза ламаної лінії [1].

Таким чином, нами розглянуто стійкість нового типу тришарових оболонок з композитів з трансверсально пружним легким заповнювачем. Його відмінною рисою є те, що він має незначну зсувну жорсткість, якою можна знехтувати. При цьому виникає можливість вивчити вплив поперечного обтиснення на критичні навантаження незалежно від інших механічних властивостей заповнювача.

Розроблено процедуру розв'язання задачі стійкості і закритичної поведінки тришарової оболонки з використанням асимптотичного методу Койтера—Будяньського.

Проведено розрахунок на стійкість оболонок, що складаються з двох коаксіальних взаємодіючих вуглепластикових циліндрів різного радіуса при осьовому стиску. Показано, що втрата стійкості такої конструкції відбувається при зусиллі, більшому за критичне зусилля окремо взятої зовнішньої оболонки і меншому — від внутрішньої. Починаючи з деякого значення трансверсальної жорсткості заповнювача, критичне навантаження на оболонку не росте, не дивлячись на зростання жорсткості. Чутливості до недосконалостей також стабілізуються, але не так різко, як критичні навантаження. Відзначимо, що умови застосування асимптотичного методу в розглянутій задачі виконуються.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. Москва: Машиностроение, 1973. 172 с.
2. Hunt G.W., Wadee M.A. Localization and Mode Interaction in Sandwich Structure. *Prec. Math., Phys. Eng. Sci.* 1998. **454**, № 1972. P. 1197–1216.
3. Vinson J.R. Sandwich Structures: Past, Present, Future. Sandwich Structures 7: Advancing in Sandwich Structures and Materials: Proc. of the 7 th inter. Conf. on Sandwich Structures. Aalborg Univ., Denmark, 2005. P. 29–31.
4. Wadee M.A., Yiatros S., Theofanous M. Comparative Studies of Localized Bending of Sandwich Struts with Different Core Bending Models. *Int. J. Non-linear Mech.* 2010. **45**. P. 111–120.
5. Yuan C., Bergsma O., Koussios S., Zu L., Beukers A. Optimization of Sandwich Composites Fuselages under Flight Loads. *Appl. Compos. Mater.* 2012. **19**, № 1. P. 47–64.
6. Wang C.M., Ma Y.Q., Zhang Y., Ang K. Buckling of double-walled carbon nanotubes modeled by solid shell elements. *J. Appl. Phys.* 2006. **99**(11). P. 114317.
7. Семенюк Н.П. О начальном закритическом поведении стеклопластиковых цилиндрических оболочек с наполнителем при осевом сжатии. *Прикл. механика*. 1988. **24**, № 5. С. 54–60.
8. Ванин Г. А., Семенюк Н.П. Устойчивость оболочек из композиционных материалов с несовершенствами. Киев: Наук. думка, 1987. 200с.
9. Пастернак П. Л. Основы метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. Москва: Стройиздат, 1954. 56 с.
10. Koiter W.T. Elastic stability and post-buckling behavior. Proc. Symp. Nonlinear Problems. Madison: Univ. of Wisconsin Press. 1963. P. 257–275.
11. Ямаки Н. Закритическое поведение и чувствительность к несовершенствам круглой цилиндрической оболочки, подверженной сжатию. Теоретическая и прикладная механика: Тр. XIV Международ. конгр. IUTAM. Москва: Мир, 1979. С. 715–750.
12. Buidiansky B. Theory of Buckling and Post-buckling Behavior of Elastic Structures. *Adv. Appl. Mech.* 1974. **14**. P. 2–65.

Надійшло до редакції 21.02.2019

REFERENCES

1. Grigolyuk, E. I. & Chulkov, P. P. (1973). Stability and vibrations of sandwich shells. Moscow: Maschinostroenie (in Russian).
2. Hunt, G. W. & Wadee, M. A. (1998) Localization and Mode Interaction in Sandwich Structures. *Prec. Math., Phys. Eng. Sci.*, 454, No. 1972, pp. 1197-1216.
3. Vinson, J. R. (2005). Sandwich Structures: Past, Present, Future /Sandwich Structures 7: Advancing in Sandwich Structures and Materials: Proc. of the 7 th inter. Conf. on Sandwich Structures. Aalborg Univ., Denmark. P. 29-31.
4. Wadee, M A., Yiatros, S. & Theofanous, M. (2010). Comparative Studies of Localized Bending of Sandwich Struts with Different Core Bending Models. *Int. J. Non-linear Mech.*, 45, pp. 111-120.
5. Yuan, C., Bergsma, O., Koussios, S., Zu, L. & Beukers, A. (2012). Optimization of Sandwich Composites Fuselages under Flight Loads. *Appl. Compos. Mater.*, 19, No. 1, pp. 47-64.
6. Wang, C. M., Ma, Y. Q., Zhang, Y. & Ang, K. (2006). Buckling of double-walled carbon nanotubes modeled by solid shell elements. *J. Appl. Phys.*, 99(11), pp. 114317.
7. Semenyuk, N. P. (1998). Initial Supercritical Behavior of Fiberglasses Cylindrical Shells with Filler under Axial Compression. *Int. Appl. Mech.*, 24, No. 5, pp. 478-484.
8. Vanin, G. A. & Semenyuk, N. P. (1987). Stability of shells made of composite materials with imperfections. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
9. Pasternak, P. L (1954). Fundamentals of the method for calculation of base on the elastic foundation using two stiffness coefficients. Moscow: Stroiizdat (in Russian).
10. Koiter, W. T. (1963). Elastic stability and post-buckling behavior. Proc. Symp. Nonlinear Problems. Madison: Univ. of Wisconsin Press. P. 257-275.

11. Yamaki, N. (1979). Post-buckling behavior and sensitivity to the imperfections of a circular cylindrical shell subjected to compression. Theoretical and applied mechanics: Proc. XIV int. congr. IUTAM. Moscow: Mir. P. 715-750 (in Russian).
12. Budiansky, B. (1974). Theory of Buckling and Post-buckling Behavior of Elastic Structures. Adv. Appl. Mech., 14, pp. 2-65.

Received 21.02.2019

Н.П. Семенюк<sup>1</sup>, В.М. Трач<sup>2</sup>, Н.Б. Жукова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко НАН України, Київ

<sup>2</sup> Национальный университет водного хозяйства и природопользования, Ровно

E-mail: zhukova\_n@ukr.net, trach-vm@ukr.net

#### ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ТРАНСВЕРСАЛЬНО УПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ В ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКОГО СЖАТИЯ

С использованием асимптотического метода Койтера—Будянского разработана процедура решения задачи об устойчивости и закритическом поведении трехслойной оболочки с легким заполнителем, обладающим упругостью только в трансверсальном направлении. Разрешающая система нелинейных уравнений выведена с учетом дискретности структуры, что позволяет рассматривать общие и локальные варианты форм потери устойчивости. Выполнен расчет конструкций, состоящих из двух цилиндрических углепластиковых оболочек, взаимодействующих посредством пружинного заполнителя.

**Ключевые слова:** трехслойные оболочки, устойчивость, трансверсально упругий заполнитель, асимптотический метод, закритическое поведение.

N.P. Semenyuk<sup>1</sup>, V.M. Trach<sup>2</sup>, N.B. Zhukova<sup>1</sup>

<sup>1</sup> S.P.Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine, Kiev

<sup>2</sup> National University of Water and Environmental Engineering, Rivne

E-mail: zhukova\_n@ukr.net, trach-vm@ukr.net

#### DEFORMATION OF THREE-LAYER CYLINDRICAL SHELLS WITH TRANSVERSALLY ELASTIC CORE IN A VICINITY OF THE CRITICAL COMPRESSION

Using the asymptotic Koiter—Budyansky method, a procedure is developed for solving the problem of stability and the postbuckling behavior of a sandwich shell with a lightweight core, which has elasticity only in the transverse direction. The resolving system of nonlinear equations is derived, by taking the discreteness of the structure into account, which allows us to consider general and local variants of the forms of buckling. The calculation of the structures consisting of two cylindrical carbon-fiber shells interacting by means of a spring core was performed.

**Keywords:** sandwich shells, stability, transversally elastic filler, asymptotic method, postbuckling behavior.