УДК 518.9

С. Д. Эйдельман (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
А. А. Чикрий (Ин-т кибернетики НАН Украины, Киев)

ДИНАМИЧЕСКИЕ ИГРОВЫЕ ЗАДАЧИ СБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

We suggest a general method of the solution for game problems of approach for dynamic systems with the Volterra evolution. This method is based on the method of decision functions and uses the apparatus of the theory of many-valued mappings. We study in more detail the game problems for systems with Riemann – Liouville fractional derivatives and regularized Dzhrbashyan – Nersesyan derivatives (fractal games) on the basis of Mittag-Leffler matrix functions introduced here.

Запропоновано загальний метод розв'язку ігрових задач зближення для динамічних систем з вольтеррівською еволюцією. Цей метод базується на методі розв'язуючих функцій і використовує апарат теорії багатозначних відображень. Більш детально вивчено ігрові задачі для систем з дробовими за Ріманом–Ліувіллем похідними та регуляризованими похідними Джрбашяна–Нерсесяна (фрактальні ігри) на основі введених тут матричних функцій Міттаг-Леффлера.

1. Введение. В теории дифференциальных игр существует ряд фундаментальных методов [1–8], позволяющих установить условия разрешимости задач сближения и уклонения в том или ином классе стратегий. В зависимости от взаимной информированности игроков о состоянии процесса, а также о выборе управлений противником, используется различный математический аппарат. В качестве предмета для исследования в данной работе выбран метод разрешающих функций [5, 9–15], который позволяет, в частности, обосновать классическое правило параллельного сближения и основан на использовании обратных функционалов Минковского [13]. Этот метод с успехом применялся при различных формах условия Понтрягина для исследования игровых задач с группами участников [5, 9–11, 14, 15], с терминальным функционалом [16], с фазовыми ограничениями и неполной информацией [5, 10, 14], а также для изучения процессов с более сложной динамикой [9–12, 17–23], чем обыкновенные дифференциальные уравнения.

В данной работе использованы исходные идеи метода разрешающих функций для получения достаточных условий разрешимости игровой задачи при минимальных предположениях на динамический процесс с целью охватить как можно более широкий круг конфликтно-управляемых процессов. Важным классом таких процессов, укладывающихся в общую схему метода, являются игровые задачи для систем с дробными производными. Системы с дробными производными изучались, например, в [24–26].

2. Постановка задачи, схема метода и основной результат. Обозначим через R^n вещественное n-мерное евклидово пространство, а через $R_+ = \{ t : t \geq 0 \}$ положительную полуось и рассмотрим процесс, эволюция которого описывается уравнением

$$z(t) = g(t) + \int_0^t \Omega(t,\tau)\,\varphi(u(\tau), v(\tau))\,d\tau, \qquad t \geq 0. \tag{1}$$

Функция $g(t)$, $g: R_+ \to R^n$, является измеримой (по Лебегу) и ограниченной при $t > 0$, матричная функция $\Omega(t,\tau)$, $t \geq \tau \geq 0$, измерима по t, а также является суммируемой по τ при любом $t \in R_+$. Блок управления задается функцией $\varphi(u,v)$, $\varphi: U \times V \to R^n$, которая предполагается непрерывной по совокупности переменных на прямом произведении непустых компактов U и V, т. е. $U \in K(R^m)$, $V \in K(R^l)$. Управляющие воздействия игроков $u(\tau)$, $u: R_+ \to U$, и $v(\tau)$, $v: R_+ \to V$, — измеримые функции.

© С. Д. ЭЙДЕЛЬМАН, А. А. ЧИКРИЙ, 2000

Кроме процесса (1) задано терминальное множество M^*, имеющее цилиндрический вид

$$M^* = M_0 + M, \tag{2}$$

где M_0 — линейное подпространство из R^n, а $M \in K(L)$, L — ортогональное дополнение к M_0 в R^n.

Цели первого (u) и второго (v) игроков противоположны. Первый стремится привести траекторию процесса (1) на множество (2) за кратчайшее время, второй — максимально оттянуть момент попадания траектории на множество M^*.

Примем сторону первого игрока и будем ориентироваться на выбор противником в качестве управления произвольной измеримой функции со значениями из V. В свою очередь, будем предполагать, что если игра (1), (2) происходит на интервале $[0, T]$, то управление первого игрока — измеримая функция вида

$$u(t) = u(g(T), v_t(\cdot)), \quad t \in [0, T], \quad u(t) \in U, \tag{3}$$

где $v_t(\cdot) = \{v(s) \colon 0 \le s \le t\}$ — предыстория управления второго игрока до момента t.

Если, в частности, $g(t) = A(t)z_0$, где $A(t)$ — матричная функция такая, что $A(0) = E$, E — единичная матрица, а $z(0) = z_0$, то можно считать, что $u(t) = u(z_0, v_t(\cdot))$ и управление первого игрока представляет собой определенный тип квазистратегий [5, 7].

Цель данной работы — установить для процесса (1) и (2) при условии информированности типа (3) достаточные условия разрешимости задачи в пользу первого игрока за некоторое гарантированное время, оценить это время, а также найти управления первого игрока, позволяющие реализовать этот результат.

Перейдем к описанию метода решения задачи. Исходные предположения о функциях $g(t)$, $\Omega(t, \tau)$, $\varphi(u, v)$ позволяют осуществить во многом уже известные для дифференциальных игр построения [5, 9, 12, 13], которые приведем в удобной форме.

Обозначим через π ортопроектор, действующий из R^n в L. Положив

$$\varphi(U, v) = \{\varphi(u, v) \colon u \in U\},$$

рассмотрим многозначные отображения

$$W(t, \tau, v) = \pi\Omega(t, \tau)\varphi(U, v),$$

$$W(t, \tau) = \bigcap_{v \in V} W(t, \tau, v)$$

на множествах соответственно $\Delta \times V$ и Δ, где

$$\Delta = \{(t, \tau) \colon 0 \le \tau \le t < \infty\}.$$

Условие Понтрягина. *Многозначное отображение $W(t, \tau)$ принимает непустые значения на множестве Δ.*

В силу непрерывности функции $\varphi(u, v)$ и условия $U \in K(R^m)$ отображение $\varphi(U, v)$ непрерывно по v в метрике Хаусдорфа [27, 28]. Учитывая предположения о матричной функции $\Omega(t, \tau)$, можно заключить [29], что многозначные отображения $W(t, \tau, v)$ и $W(t, \tau)$ являются измеримыми по τ.

Обозначим через $P(R^n)$ совокупность непустых замкнутых множеств пространства R^n. Тогда очевидно

$$W(t, \tau, v): \Delta \times V \to P(R^n),$$

$$W(t, \tau): \Delta \to P(R^n).$$

В этом случае говорят, что многозначные отображения $W(t, \tau, v)$ и $W(t, \tau)$ являются нормальными по τ [29].

Из условия Понтрягина и результатов работ [29–31] следует, что при любом $t \geq 0$ существует хотя бы один измеримый по τ селектор $\gamma(t, \tau) \in W(t, \tau)$. В силу предположений о параметрах процесса (1) такой селектор $\gamma(t, \tau)$ является суммируемой по τ, $\tau \in [0, t]$, функцией при любом фиксированном $t \geq 0$. Обозначим

$$\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) = \pi g(t) + \int_0^t \gamma(t, \tau)\, d\tau,$$

где $\gamma(t, \tau)$ — упомянутый выше селектор.

С помощью функции $\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot))$ определим функцию $\alpha(t, \tau, v)$:

$$\alpha(t, \tau, v) = \sup\{\alpha \geq 0: [W(t, \tau, v) - \gamma(t, \tau)] \cap \alpha[M - \xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot))] \neq \varnothing\} \tag{4}$$

и назовем ее разрешающей [5]. В дальнейшем эта функция будет играть ключевую роль.

В силу предположений о параметрах процесса (1) и известных результатов [5] функция (4) измерима по τ и полунепрерывна сверху по v.

В дальнейшем нас будет интересовать зависимость функции $\alpha(t, \tau, v)$ от совокупности переменных (τ, v). Поэтому зафиксируем t и положим $\alpha(\tau, v) = \alpha(t, \tau, v)$. Будем говорить, что функция $\alpha: [0, T] \times V \to R_+$ суперпозиционно измерима, если для любой измеримой функции $v(\tau)$, $v: [0, T] \to V$, суперпозиция $\alpha(\tau, v(\tau))$, $\alpha: [0, T] \to R_+$ — измеримая функция от τ [30, 31].

Достаточно общим предположением, обеспечивающим суперпозиционную измеримость функции $\alpha(\tau, v)$, является предположение об $L \times B$-измеримости этой функции [30, 31], т. е. об измеримости относительно σ-алгебры, являющейся произведением σ-алгебр $L[0, T)$ и $B(R^n)$. Эта σ-алгебра состоит из подмножеств множества $[0, T] \times R^n$, порождаемых множествами вида $X \times Y$, где X — измеримое по Лебегу подмножество отрезка $[0, T]$, а Y — измеримое по Борелю подмножество из R^n.

Обозначим $W(T, \tau, v) - \gamma(T, \tau) = H(\tau, v)$, $M - \xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot) = M_1$ и введем многозначное отображение

$$\mathfrak{A}(\tau, v) = \{\alpha \in R_+: H(\tau, v) \cap \alpha M_1 \neq \varnothing\}. \tag{5}$$

Тогда

$$\alpha(\tau, v) = \sup\{\alpha \in R_+: \alpha \in \mathfrak{A}(\tau, v)\}.$$

Изучим свойства многозначных отображений вида (5).

Имеет место следующий общий результат, обобщающий известное утверждение [29] и вытекающий, в частности, из работы [32].

Лемма 1. *Пусть* $X \in P(R^k)$, $F(\omega)$, $F: X \to P(R^k)$, $H(\omega)$, $H: X \to P(R^n)$, *— нормальные многозначные отображения, а* $M(\omega, x)$, $M: X \times R^k \to P(R^n)$, *— каратеодориевское (измеримое по* ω *и непрерывное по* x*) отображение. Тогда отображение*

$$\mathfrak{A}(\omega) = \{x \in F(\omega) \colon H(\omega) \cap M(\omega, x) \neq \varnothing\}$$

является нормальным.

Положив в лемме 1 $\omega = (\tau, v)$, $x = \alpha$ и, соответственно, $F(\omega) = R_+$, а $M(\omega, x) = \alpha M_1$, получим, что отображение $\mathfrak{A}(\tau, v)$ является $L \times B$-измеримым, так как отображение $H(\tau, v)$ — $L \times B$-измеримо в силу измеримости по Лебегу по τ и непрерывности по v [30].

Теперь покажем, что функция $\alpha(\tau, v)$ является $L \times B$-измеримой. Действительно, так как

$$\alpha(\tau, v) = \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}(\tau, v)} \alpha = C(\mathfrak{A}(\tau, v); 1),$$

где $C(X; p)$ — опорная функция множества X в направлении p [33], то ее $L \times B$-измеримость вытекает из $L \times B$-измеримости многозначного отображения $\mathfrak{A}(\tau, v)$ [29].

Таким образом, функция $\alpha(\tau, v)$ является $L \times B$-измеримой, ограниченной снизу нулем и полунепрерывной сверху по v. Покажем, что $\inf_{v \in V} \alpha(\tau, v)$ — измеримая функция. Для этого рассмотрим V как постоянное многозначное отображение. Оно измеримо [29]. Аппроксимирующее семейство в нем образуют, например, функции $v_m(\tau) = v_m$, где $V_* = \{v_1, v_2, \dots\}$ — счетное, плотное подмножество множества V. Тогда в силу $L \times B$-измеримости функции $\alpha(\tau, v)$ она суперпозиционно измерима и, следовательно, функции $\alpha(\tau, v_m)$ измеримы по τ. Покажем, что

$$\inf_{v \in V} \alpha(\tau, v) = \inf_{v_m} \alpha(\tau, v_m).$$

Для этого положим $\alpha(\tau) = \inf_{v \in V} \alpha(\tau, v)$ и зафиксируем τ. По определению точной нижней грани для каждого $\varepsilon > 0$ существует элемент $v_\varepsilon \in V$ такой, что

$$\alpha(\tau, v_\varepsilon) \le \alpha(\tau) + \varepsilon.$$

С другой стороны, из полунепрерывности сверху функции $\alpha(\tau, v)$ по v следует, что существует окрестность $O(v_\varepsilon)$ элемента v_ε такая, что для каждого $v \in O(v_\varepsilon)$

$$\alpha(\tau, v) \le \alpha(\tau, v_\varepsilon) + \varepsilon.$$

Отсюда и из определения множества V_*, в свою очередь, вытекает, что существует элемент $v_m \in V_* \cap O(v_\varepsilon)$ такой, что

$$\alpha(\tau, v_m) \le \alpha(\tau, v_m) + \varepsilon \le \alpha(\tau) + 2\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\inf_{v_m} \alpha(\tau, v_m) \le \alpha(\tau),$$

и так как обратное неравенство всегда имеет место в силу включения $V_* \subset V$, то

$$\alpha(\tau) = \inf_{v \in V} \alpha(\tau, v) = \inf_{v_m} \alpha(\tau, v_m),$$

и функция $\alpha(\tau)$ является измеримой функцией, как точная нижняя грань счетной совокупности измеримых функций [29].

Отметим следующее обстоятельство, вытекающее из выражения (4). Если для некоторого t имеет место включение $\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) \in M$, то функция $\alpha(t, \tau, v)$ обращается в ∞ при всех $\tau \in [0, t]$, $v \in V$.

Введем отображение

$$T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \left\{ t \geq 0: \int_0^t \inf_{v \in V} \alpha(t, \tau, v)\, d\tau \geq 1 \right\}. \qquad (6)$$

Если при некотором t интеграл в соотношении (6) принимает значение $+\infty$, то неравенство выполняется автоматически. Если же неравенство в (6) не имеет места ни при каком t, то положим $T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \varnothing$.

Таким образом, можно сформулировать основной результат.

Теорема 1. *Пусть в игре* (1), (2) *выполнено условие Понтрягина и* $M = \operatorname{co} M$, *причем для некоторой измеримой ограниченной при* $t > 0$ *функции* $g(t)$ *и измеримого по* τ *селектора* $\gamma(t, \tau)$, $t \geq \tau \geq 0$, *многозначного отображения* $W(t, \tau)$ *множество*

$$T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) \neq \varnothing \quad \text{и} \quad T \in T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)), \quad T < +\infty.$$

Тогда траектория процесса (1) *может быть приведена на терминальное множество в момент* T *с помощью управления вида* (3).

Доказательство. Рассмотрим случай $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \,\overline{\in}\, M$. Пусть $v_T(\cdot)$ — произвольная измеримая функция со значениями из V. Аналогично [5, 9] введем контрольную функцию

$$h(t) = 1 - \int_0^t \alpha(T, \tau, v(\tau))\, d\tau, \qquad t \in [0, T].$$

Поскольку функция $\alpha(T, \tau, v)$ является $L \times B$-измеримой, то она суперпозиционно измерима, т. е. $\alpha(T, \tau, v(\tau))$ измерима. В силу предположений о параметрах процесса (1), (2) она ограничена при почти всех $\tau < T$ и, следовательно, интегрируема на любом конечном интервале времени. Отсюда вытекает, что функция $h(t)$ непрерывна, не возрастает и $h(0) = 1$. Поэтому в силу построений существует такой момент времени $t_* = t(v(\cdot))$, $\tau_* \in (0, T]$, что $h(t_*) = 0$.

Участки $[0, t_*)$ и $[t_*, T]$ будем называть в дальнейшем „активным" и „пассивным" соответственно. Опишем способ управления первым игроком на каждом из них. Для этого рассмотрим многозначное отображение

$$U(\tau, v) = \{ u \in U : \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, v) - \gamma(T, \tau) \in$$
$$\in \alpha(T, \tau, v)[M - \xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))] \}. \qquad (7)$$

Поскольку функция $\alpha(T, \tau, v)$ является $L \times B$-измеримой, $M \in K(R^n)$, а функция $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))$ ограничена, то отображение $\alpha(T, \tau, v)[M - \xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))]\}$ $L \times B$-измеримо. Кроме того, очевидно левая часть включения в (7) является $L \times B$-измеримой функцией по (t, v) и непрерывной по u. Отсюда в силу известного утверждения [29] вытекает, что отображение $U(\tau, v)$ является $L \times B$-измеримым. Следовательно, его селектор

$$u(\tau, v) = \operatorname{lex\,min} U(\tau, v) \qquad (8)$$

является $L \times B$-измеримой функцией. Управление первого игрока на активном участке $[0, t_*)$ положим равным

$$u(\tau) = u(\tau, v(\tau)). \qquad (9)$$

В силу $L \times B$-измеримости функция $u(\tau, v)$ является суперпозиционно измеримой и, следовательно, функция $u(\tau)$ — измерима.

Рассмотрим „пассивный" интервал $[t_*, T]$. Положим в выражении (7) $\alpha(T, \tau, v) \equiv 0$ при $\tau \in [t_*, T]$, $v \in V$, и управление первого игрока выберем согласно предложенной выше процедуре, используя соотношения (7) – (9).

В случае $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \in M$ управление первого игрока на интервале $[0, T]$ выберем из тех же соотношений, что и на „пассивном" участке, т. е. по схеме (7) – (9) с $\alpha(T, \tau, v) \equiv 0$, $\tau \in [0, T]$, $v \in V$.

Покажем, что при выборе управления первым игроком в виде (9) с учетом соотношений (7), (8) в каждом из случаев траектория процесса (1) в момент T будет приведена на множество M^* при любых управлениях второго игрока.

Из выражения (1) имеем

$$\pi z(T) = \pi g(T) + \int_0^T \pi \Omega(T, \tau) \varphi(u(\tau), v(\tau))\, d\tau. \tag{10}$$

Проанализируем сначала случай $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \overline{\in} M$. Для этого прибавим и вычтем из правой части равенства (10) вектор $\int_0^T \gamma(T, \tau)\, d\tau$. Использовав описанный ранее закон выбора управления первым игроком, из (10) получим включение

$$\pi z(T) \in \xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \left[1 - \int_0^{t_*} \alpha(T, \tau, v(\tau))\, d\tau\right] + \int_0^{t_*} \alpha(T, \tau, v(\tau)) M\, d\tau.$$

Поскольку M — выпуклый компакт, $\alpha(T, \tau, v(\tau))$ — неотрицательная функция для $\tau \in [0, t_*)$ и

$$\int_0^{t_*} \alpha(T, \tau, v(\tau))\, d\tau = 1,$$

то $\int_0^{t_*} \alpha(T, \tau, v(\tau)) M\, d\tau = M$ и, следовательно, $\pi z(T) \in M$ или $z(T) \in M^*$.

Пусть $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \in M$. Тогда с учетом закона управления первого игрока из равенства (10) следует включение $\pi z(T) \in M$.

3. Системы с дробными производными. В этом пункте стандартным образом вводятся классические понятия дробного интеграла и дробной производной (в смысле Римана – Лиувилля). Им соответствует уравнение с дробными производными, где вместо обычных данных Коши в начальный момент времени $t = 0$ следует задавать дробный интеграл подходящего дробного порядка. Это связано с тем, что, вообще говоря, решение такого уравнения имеет особенность при $t = 0$ и только такие обобщенные начальные условия естественны в рассматриваемом случае. Однако по физическим соображениям желательно иметь обычную задачу Коши для уравнений с дробными производными. М. М. Джрбашян и А. Б. Нерсесян в работе [25] предложили уравнение с дробными производными, где вместо производных Римана – Лиувилля используются их регуляризованные значения, а начальные данные — обычные данные Коши.

В дальнейшем введенное ими новое понятие дробной производной было названо дробной производной Джрбашяна – Нерсесяна.

Для $\beta \in (0, 1)$ введем дробный интеграл Римана – Лиувилля порядка β [24] от функции $z(t)$, $t \geq 0$, согласно формуле

$$(I_{0+}^{\beta} z)(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \frac{z(s)}{(t-s)^{1-\beta}}\, ds,$$

где $\Gamma(\beta)$ — гамма-функция Эйлера.

Тогда дробная производная Римана – Лиувилля порядка β

$$(D_{0+}^{\beta} z)(t) = \frac{d}{dt}(I_{0+}^{1-\beta})(t),$$

а регуляризованная дробная производная Джрбашяна – Нерсесяна порядка β [25, 26] имеет вид

$$(D^{(\beta)} z)(t) = (D_{0+}^{\beta} z)(t) - \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} z(+0).$$

С каждой из дробных производных свяжем игровую задачу. Итак, пусть эволюция конфликтно управляемого процесса в первой задаче описывается системой дифференциальных уравнений

$$D^{\beta} \hat{z} = A\hat{z} + \varphi(u, v), \quad \hat{z} \in R^n, \quad u \in U, \quad v \in V, \tag{11}$$

с начальными условиями

$$I^{1-\beta} \hat{z}|_{t=0} = \hat{z}_0, \tag{12}$$

а во второй задаче —

$$D^{(\beta)} z = Az + \varphi(u, v), \quad z \in R^n, \quad u \in U, \quad v \in V, \tag{13}$$

с начальными данными Коши

$$z|_{t=0} = z_0. \tag{14}$$

В обозначении дробных производных в (11), (13) некоторые символы опущены для простоты записи.

Кроме динамики процессов (11), (13) задано терминальное множество вида (2) и цели игроков в каждом из случаев аналогичны описанной ранее общей ситуации. Отметим лишь, что в задачах (11), (12) и (13), (14) преследователь выбирает управление в виде измеримых функций $u(t) = u(\hat{z}_0, v_t(\cdot))$ и $u(t) = u(z_0, v_t(\cdot))$ соответственно со значениями из области U.

Найдем интегральные представления функций $\hat{z}(t)$ и $z(t)$. Для этого предварительно определим обобщенную матричную функцию Миттаг-Леффлера

$$E_{\rho}(B; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{\Gamma(k\rho^{-1} + \mu)}$$

для любого положительного ρ и комплексного μ, где B — произвольная квадратная матрица порядка n с комплекснозначными элементами. Матричная функция $E_{\rho}(B; \mu)$ является целой функцией аргумента B.

Теорема 2. *При выбранных управлениях игроков решение* $\hat{z}(t)$ *задачи* (11), (12) *определяется формулой*

$$\hat{z}(t) = t^{\beta-1} E_{1/\beta}(At^{\beta}; \beta) z_0 + \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} E_{1/\beta}(A(t-\tau)^{\beta}; \beta)\, \varphi(u(\tau), v(\tau))\, d\tau, \tag{15}$$

а решение $z(t)$ *задачи* (13), (14) — *формулой*

$$z(t) = E_{1/\beta}(At^{\beta}; 1) z_0 + \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} E_{1/\beta}(A(t-\tau)^{\beta}; \beta)\, \varphi(u(\tau), v(\tau))\, d\tau. \tag{16}$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что функция $F(\tau) = \varphi(u(\tau), v(\tau))$

— измеримая существенно ограниченная при $\tau > 0$. Из этого следует, что интегралы в формулах (15), (16) абсолютно сходятся.

Доказательство состоит из двух частей. В первой докажем, что первые слагаемые в формулах (15), (16) являются решениями однородных уравнений, удовлетворяющих начальным условиям (12) и (14) соответственно. Во второй покажем, что второе слагаемое в формулах (15), (16)

$$z_2(t) = \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} E_{1/\beta}(A(t-\tau)^\beta; \beta) F(\tau)\, d\tau \tag{17}$$

является решением неоднородных уравнений (15), (16).

То, что $z_2(t)$ удовлетворяет нулевым начальным условиям, непосредственно следует из ограниченности функций $E_{1/\beta}(A(t-\tau)^\beta; \beta)$ и $F(\tau)$ и того факта, что $\beta > 0$.

Обозначив

$$\hat{z}_1(t) = t^{\beta-1} E_{1/\beta}(A t^\beta; \beta)\hat{z}_0,$$

перейдем к вычислениям

$$\begin{aligned}
(D^\beta \hat{z}_1)(t) &\equiv D^\beta [t^{\beta-1} E_{1/\beta}(A t^\beta; \beta)\, \hat{z}_0] = \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dt}\left(\int_0^t (t-\tau)^{-\beta}\, \tau^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \tau^{\beta k}}{\Gamma(\beta(k+1))}\, d\tau \right) = \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \hat{z}_0}{\Gamma(\beta k + \beta)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^\beta\, \tau^{\beta(k+1)-1}\, d\tau = \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \hat{z}_0 B(1-\beta, \beta k + \beta)}{\Gamma(\beta k + \beta)} \frac{d}{dt} t^{\beta k} = \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k \Gamma(1-\beta)\, \Gamma(\beta k + \beta)}{\Gamma(\beta k + \beta)\, \Gamma(\beta k + 1)} \beta k t^{\beta k - 1} \hat{z}_0 = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta k A^k t^{\beta k - 1}}{\Gamma(\beta k + 1)} \hat{z}_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k t^{\beta k - 1}}{\Gamma(\beta k)} \hat{z}_0 \overset{k=k'+1}{=} \\
&\overset{k=k'+1}{=} A t^{\beta-1} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{A^{k'} t^{\beta k'}}{\Gamma(\beta k' + \beta)} \hat{z}_0 = A\, \hat{z}_1(t).
\end{aligned}$$

Здесь

$$B(z, \omega) = \int_0^1 x^{z-1} (1-x)^{\omega-1}\, dx = \frac{\Gamma(z)\, \Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)}$$

— бета-функция Эйлера.

Покажем теперь, что $\hat{z}_1(t)$ удовлетворяет начальным условиям (12):

$$\begin{aligned}
(I^{1-\beta} \hat{z}_1)(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{\hat{z}_1(\tau)}{(t-\tau)^\beta}\, d\tau = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{\tau^{\beta-1}}{(t-\tau)^\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \tau^{\beta k}}{\Gamma(\beta k + \beta)} \hat{z}_0\, d\tau = \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \hat{z}_0}{\Gamma(\beta k + \beta)} \int_0^t \tau^{\beta(k+1)-1} (t-\tau)^{-\beta}\, d\tau =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{\beta k}}{\Gamma(\beta k + \beta)} \frac{\Gamma(\beta(k+1))\,\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta k + 1)} \hat{z}_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{\beta k}}{\Gamma(\beta k + 1)} \hat{z}_0 \overset{t \to 0}{\to} \hat{z}_0 .$$

Рассмотрим функцию

$$z_1(t) = E_{1/\beta}(At^{\beta};1) z_0 \equiv E_{1/\beta}(At^{\beta}) z_0,$$

где $E_{1/\beta}(At^{\beta})$ — матричная функция Миттаг-Леффлера. При этом имеем

$$(D^{(\beta)} z_1)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \left[\frac{d}{dt} \left(\int_0^t (t-\tau)^{-\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \tau^{\beta k}}{\Gamma(\beta k + 1)} d\tau \right) - t^{-\beta} \right] z_0 =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(\beta k + 1)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\beta} \tau^{\beta k} d\tau - t^{-\beta} \right] z_0 =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(\beta k + 1)} \frac{d}{dt} B(1-\beta, \beta k + 1)\, t^{1-\beta+\beta k} - t^{-\beta} \right] z_0 =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \left[\sum_{k=0}^{\infty} A^k t^{\beta k - \beta} \frac{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\beta k + 1)}{\Gamma(\beta k + 1)\,\Gamma(2 + \beta k - \beta)} (1 - \beta + \beta k) - t^{-\beta} \right] z_0 =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \left[\Gamma(1-\beta) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{\beta(k-1)}}{\Gamma(1 + \beta(k-1))} - t^{-\beta} \right] z_0 =$$

$$= A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1} t^{\beta(k-1)}}{\Gamma(1 + \beta(k-1))} z_0 = A z_1(t).$$

Кроме того, $z_1(t)$ удовлетворяет начальным условиям (14), так как

$$\lim_{t \to \infty} z_1(t) = \lim_{t \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{\beta k}}{\Gamma(\beta k + 1)} z_0 = z_0 .$$

Рассмотрим теперь функцию $z_2(t)$, задаваемую формулой (17), и покажем, что она удовлетворяет уравнениям (11), (13) при нулевых начальных условиях. Имеем

$$(D^{\beta} z_2)(t) = (D^{(\beta)} z_2)(t) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\beta} \left(\int_0^{\tau} (\tau - s)^{\beta-1} E_{1/\beta}(A(t-\tau)^{\beta}; \beta) F(s)\, ds \right) d\tau . \tag{18}$$

Отдельно изучим функцию

$$\psi(t) = \int_0^t (t-\tau)^{-\beta} \left(\int_0^{\tau} (\tau - s)^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k (\tau - s)^{\beta k}}{\Gamma(k\beta + \beta)} F(s)\, ds \right) d\tau =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(k\beta + \beta)} \int_0^t (t-\tau)^{-\beta} \left(\int_0^{\tau} (\tau - s)^{\beta(k+1)-1} F(s)\, ds \right) d\tau . \tag{19}$$

Для этого рассмотрим интегралы

$$I_k = \int_0^t \int_0^\tau (t-\tau)^{-\beta} (\tau - s)^{\beta(k+1)-1} F(s)\, ds\, d\tau =$$

$$= \iint_{(\Delta_t)} (t-\tau)^{-\beta} (\tau - s)^{\beta(k+1)-1} F(s)\, d\tau\, ds,$$

$$\Delta_t = \{(s, \tau):\ 0 \le s \le \tau \le t\}.$$

Последний двойной интеграл абсолютно сходится, что позволяет (в силу теоремы Фубини) заменить порядок интегрирования, используя формулу Дирихле. Тогда

$$I_k = \int_0^t \left(\int_s^t (t-\tau)^{-\beta} (\tau - s)^{\beta(k+1)-1} d\tau \right) F(s)\, ds =$$

$$= B(1-\beta, \beta k + \beta) \int_0^t (t-s)^{\beta k} F(s)\, ds = \frac{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(k\beta + \beta)}{\Gamma(k\beta + 1)} \int_0^t (t-s)^{\beta k} F(s)\, ds. \tag{20}$$

Из равенств (19), (20) следует

$$\psi(t) = \Gamma(1-\beta) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(k\beta + 1))} \int_0^t (t-s)^{\beta k} F(s)\, ds.$$

Поскольку функция $F(t)$ измерима и ограничена, то $\psi(t)$ почти всюду имеет производную

$$\frac{d\psi}{dt} = \Gamma(1-\beta) \left\{ F(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k \beta k}{\Gamma(\beta k + 1))} \int_0^t (t-s)^{k\beta - 1} F(s)\, ds \right\} =$$

$$= \Gamma(1-\beta) \left\{ F(t) + \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k (t-s)^{k\beta-1}}{\Gamma(\beta k)} F(s)\, ds \right\} =$$

$$= \Gamma(1-\beta) \left\{ F(t) + A \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{1/\beta}(A(t-\tau)^\beta; \beta) F(s)\, ds \right\}. \tag{21}$$

Подставляя (21) в (18), получаем равенство

$$D^\beta z_2 = D^{(\beta)} z_2 = A z_2 + \varphi(u, v).$$

4. Фрактальные игры с интегральным блоком управления. Наряду с конфликтно управляемыми процессами (11), (12) и (13), (14) рассмотрим процессы, отличающиеся от уже упомянутых тем, что блок управления входит в интегральном виде, а именно, в случае производных Римана – Лиувилля рассматривается процесс

$$D^\beta \hat{y} = A\hat{y} + \int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1} \varphi(u(\tau), v(\tau))\, d\tau, \quad 0 < \gamma < 1, \quad 0 < \beta < 1, \tag{22}$$

с начальными условиями

$$I^{1-\beta} \hat{y}|_{t=0} = \hat{y}_0, \tag{23}$$

в случае регуляризованных производных Джрбашяна – Нерсесяна — процесс

$$D^{(\beta)} y = Ay + \int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1} \varphi(u(\tau), v(\tau))\, d\tau \tag{24}$$

с начальными условиями

$$y|_{t=0} = y_0. \tag{25}$$

Теорема 3. *При выбранных управлениях игроков решение* $\hat{y}(t)$ *задачи* (22), (23) *определяется формулой*

$$\hat{y}(t) = t^{\beta-1} E_{1/\beta}(At^{\beta};\beta)\hat{y}_0 +$$

$$+ \int_0^t \Gamma(\gamma)(t-\tau)^{\gamma+\beta-1} E_{1/\beta}(A(t-\tau)^{\beta};\gamma+\beta)\,\varphi(u(\tau),v(\tau))\,d\tau, \tag{26}$$

а решение $y(t)$ *задачи* (24), (25) — *формулой*

$$y(t) = E_{1/\beta}(At^{\beta};1)y_0 + \int_0^t \Gamma(\gamma)(t-\tau)^{\gamma+\beta-1} E_{1/\beta}(A(t-\tau)^{\beta};\gamma+\beta)\,\varphi(u(\tau),v(\tau))\,d\tau. \tag{27}$$

Доказательство. Учитывая доказательство теоремы 2, достаточно показать, что функция

$$y_2(t) = \int_0^t \Gamma(\gamma)(t-\tau)^{\gamma+\beta-1} E_{1/\beta}(A(t-\tau)^{\beta};\gamma+\beta)\,\varphi(u(\tau),v(\tau))\,d\tau$$

является решением уравнений (26), (27) при нулевых начальных условиях.

Применяя формулы (15), (16) к системам (22), (24) при нулевых начальных условиях, получаем

$$\hat{y}(t) \equiv y(t) = \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} E_{1/\beta}(A(t-\tau)^{\beta};\beta) \int_0^{\tau} (t-s)^{\gamma-1} F(s)\,ds\,d\tau =$$

$$= \int_0^t \underbrace{\int_s^t (t-\tau)^{\beta-1} E_{1/\beta}(A(t-\tau)^{\beta};\beta)(\tau-s)^{\gamma-1}\,d\tau}_{I(t-s)}\, F(s)\,ds.$$

Вычислим интеграл

$$I(t-s) = \int_s^t (t-\tau)^{\beta-1} E_{1/\beta}(A(t-\tau)^{\beta};\beta)(\tau-s)^{\gamma-1}\,d\tau =$$

$$= \int_0^{t-s} (t-s-\hat{\tau})^{\beta-1} E_{1/\beta}(A(t-s-\hat{\tau})^{\beta};\beta)\hat{\tau}^{\gamma-1}\,d\tau =$$

$$= \int_0^{t-s} \hat{\tau}^{\beta-1} E_{1/\beta}(A\hat{\tau}^{\beta};\beta)(t-s-\hat{\tau})^{\gamma-1}\,d\hat{\tau}, \qquad \tau-s = \hat{\tau}.$$

В силу матричного аналога формулы (1.16) [3, с. 120] окончательно получаем

$$I(t-s) = \Gamma(\gamma)(t-\tau)^{\gamma+\beta-1} E_{1/\beta}(A(t-s)^{\beta};\gamma+\beta).$$

Отсюда следует

$$\hat{y}(t) = y(t) = \Gamma(\gamma)\int_0^t (t-s)^{\gamma+\beta-1} E_{1/\beta}(A(t-s)^{\beta};\gamma+\beta)\,F(s)\,ds.$$

***Замечание* 1.** Если $\gamma + \beta \geq 1$, то решения (26), (27) являются абсолютно непрерывными [24] и имеют почти всюду ограниченную производную.

***Замечание* 2.** Уравнения (22), (24) могут быть рассмотрены с произвольными суммируемыми по τ ядрами. При этом общие теоремы сохраняются, но явные формулы для решений будут иметь более громоздкий вид.

***Замечание* 3.** В случае $\alpha > 1$ решения систем уравнений с дробными производными могут быть представлены формулами, аналогичными полученным в [24, с. 601 – 602].

Таким образом, для игровых задач с дробными производными Римана – Лиувилля, Джрбашяна – Нерсесяна типа (11), (12); (13), (14); (22), (23); (24), (25) решение представимо формулами (15), (16), (26), (27), что является частным случаем представления (1) и, следовательно, для решения каждой из перечисленных игровых задач применим изложенный выше общий метод.

5. Решение игровых задач с простой матрицей и шарообразными областями управления. Для иллюстрации метода рассмотрим различные частные ситуации, когда вычисления можно провести до конца.

В дальнейшем для сокращения записи и универсализации обозначений будем различать описанные выше четыре задачи, присваивая их параметрам значения индексов i, j: $i = 1, 2$, $j = 1, 2$. Таким образом, траектория $z_{11}(t)$ соответствует процессу (11) с производной Римана – Лиувилля без интегрального блока управления, а $z_{12}(t)$ — с интегральным блоком управления. В свою очередь, траектория $z_{21}(t)$ соответствует процессу с регуляризованной производной Джрбашяна – Нерсесяна без интегрального блока управления, а $z_{22}(t)$ — с интегральным блоком управления. Тогда имеем четыре процесса

$$z_{ij}(t) = g_{ij}(t) + \int_0^t \Omega_{ij}(t,\tau)\,\varphi(u(\tau), v(\tau))\,d\tau, \qquad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \tag{28}$$

где

$$g_{11}(t) = G_{11}(t)\hat{z}_0, \qquad G_{11}(t) = t^{\beta-1} E_{1/\beta}(A\,t^{\beta}; \beta),$$

$$\Omega_{11}(t,\tau) = (t-\tau)^{\beta-1} E_{1/\beta}(A(t-\tau)^{\beta}; \beta),$$

$$g_{12}(t) = G_{12}(t)\hat{y}_0, \qquad G_{12}(t) = t^{\beta-1} E_{1/\beta}(A\,t^{\beta}; \beta),$$

$$\Omega_{12}(t,\tau) = \Gamma(\gamma)(t-\tau)^{\gamma+\beta-1} E_{1/\beta}(A(t-\tau)^{\beta}; \gamma+\beta),$$

$$g_{21}(t) = G_{21}(t)z_0, \qquad G_{21}(t) = E_{1/\beta}(A\,t^{\beta}; 1),$$

$$\Omega_{21}(t,\tau) = (t-\tau)^{\beta-1} E_{1/\beta}(A(t-\tau)^{\beta}; \beta),$$

$$g_{22}(t) = G_{22}(t)z_0, \qquad G_{22}(t) = E_{1/\beta}(A\,t^{\beta}; 1),$$

$$\Omega_{22}(t,\tau) = \Gamma(\gamma)(t-\tau)^{\gamma+\beta-1} E_{1/\beta}(A(t-\tau)^{\beta}; \gamma+\beta).$$

Пусть

$$A = \lambda E, \quad \varphi(u,v) = u - v, \quad M^* = \{0\}, \quad U = aS, \quad a > 1, \quad V = S,$$

где S — единичный шар с центром в нуле, λ — число. Тогда $L = R^n$ и π является оператором тождественного преобразования, который задается единичной матрицей. Все матричные функции $G_{ij}(t)$ и $\Omega_{ij}(t,\tau)$ имеют вид

$$G_{ij}(t) = \hat{g}_{ij}(t)E, \qquad \Omega_{ij}(t,\tau) = w_{ij}(t,\tau)E, \qquad i = 1, 2, \quad j = 1, 2,$$

где $\hat{g}_{ij}(t)$ и $w_{ij}(t,\tau)$ — скалярные функции. При этом заметим только, что для матрицы $B = \lambda E$ справедливо равенство

$$E_\rho(B;\mu) = E_\rho(\lambda;\mu)E,$$

где $E_\rho(\lambda;\mu)$ — обобщенная скалярная функция Миттаг-Леффлера [24, 34]. Тогда

$$W_{ij}(t,\tau,v) = w_{ij}(t,\tau)(aS - v),$$

$$W_{ij}(t,\tau) = |w_{ij}(t,\tau)|(a-1)S.$$

Следовательно, условие Понтрягина выполнено при $a \geq 1$.

Положим $\gamma_{ij}(t,\tau) \equiv 0$. Тогда

$$\xi_{ij}(t, g_{ij}(t), \gamma_{ij}(t,\cdot)) = g_{ij}(t) = \hat{g}_{ij}(t)z_{ij}^0, \qquad z_{ij}^0 \neq 0,$$

$$\alpha_{ij}(t,\tau,v) = \sup\{\alpha \geq 0\colon\ \alpha\hat{g}_{ij}(t)z_{ij}^0 \in w_{ij}(t,\tau)(aS - v)\}$$

является большим корнем квадратного уравнения

$$\|w_{ij}(t,\tau)v - \alpha\hat{g}_{ij}(t)z_{ij}^0\| = |w_{ij}(t,\tau)|a$$

относительно α, из которого получаем

$$\alpha_{ij}(t,\tau,v) = \frac{(v_0,q) + \sqrt{(v_0,q)^2 + \|q\|^2(a_0^2 - \|v_0\|^2)}}{\|q\|^2},$$

где $v_0 = w_{ij}(t,\tau)v$, $q = \hat{g}_{ij}(t)z_{ij}^0$, $a_0 = |w_{ij}(t,\tau)|a$.

Следует заметить, что $\hat{g}_{ij}(t) \neq 0$ вплоть до момента окончания игры. Обращение в 0 этой функции означает возможность закончить игру по первому прямому методу Понтрягина в этот момент [5].

Очевидно,

$$\min_{\|v\|\leq 1}\alpha_{ij}(t,\tau,v) = \frac{|w_{ij}(t,\tau)|(a-1)}{\|\hat{g}_{ij}(t)z_{ij}^0\|},$$

причем минимум достигается на элементе

$$v_{ij}(t,\tau) = -\operatorname{sign}\{\hat{g}_{ij}(t)w_{ij}(t,\tau)\}\frac{z_{ij}^0}{\|z_{ij}^0\|}.$$

Тогда время окончания игры является наименьшим корнем уравнения

$$\int_0^t \frac{(a-1)|w_{ij}(t,\tau)|}{|\hat{g}_{ij}(t)|\,\|z_{ij}^0\|}\,d\tau = 1,$$

так как $w_{ij}(t,\tau)$ — непрерывные по t функции.

Введем в рассмотрение функции

$$\Phi_{ij}(t) = \int_0^t \frac{|w_{ij}(t,\tau)|}{|\hat{g}_{ij}(t)|}\,d\tau.$$

Тогда время окончания игры в каждом из случаев задается формулой

$$T_{ij}(z_{ij}^0, 0) = \min\left\{t \geq 0\colon\ \Phi_{ij}(t) \geq \frac{\|z_{ij}^0\|}{a-1}\right\}, \tag{29}$$

где функции $\Phi_{ij}(t)$ принимают вид

$$\Phi_{11}(t) = \frac{\int_0^t |\tau^{\beta-1} E_{1/\beta}(\lambda \tau^{\beta}; \beta)|\, d\tau}{|t^{\beta-1} E_{1/\beta}(\lambda t^{\beta}; \beta)|},$$

$$\Phi_{12}(t) = \Gamma(\gamma) \frac{\int_0^t |\tau^{\gamma+\beta-1} E_{1/\beta}(\lambda \tau^{\beta}; \beta+\gamma)|\, d\tau}{|t^{\beta-1} E_{1/\beta}(\lambda t^{\beta}; \beta)|},$$

$$\Phi_{21}(t) = \frac{\int_0^t |\tau^{\beta-1} E_{1/\beta}(\lambda \tau^{\beta}; \beta)|\, d\tau}{E_{1/\beta}(\lambda t^{\beta}; 1)},$$

$$\Phi_{22}(t) = \Gamma(\gamma) \frac{\int_0^t |\tau^{\gamma+\beta-1} E_{1/\beta}(\lambda \tau^{\beta}; \beta+\gamma)|\, d\tau}{E_{1/\beta}(\lambda t^{\beta}; 1)}.$$

Для определения конечности времени $T_{ij}(z_{ij}^0, 0)$ окончания игры из заданного начального состояния z_{ij}^0 в дальнейшем существенную роль будут играть асимптотические представления обобщенной скалярной функции Миттаг-Леффлера. Нас интересует конкретизация формул (2.23), (2.24) из [34, 134], дающих такое представление для функции $E_\rho(x; \mu)$ при вещественном x, $\rho > \frac{1}{2}$ и любом μ.

Из этих формул следует, что при положительных x

$$E_\rho(x; \mu) = \rho x^{\rho(1-\mu)} e^{x^\rho} - \sum_{k=1}^{p} \frac{x^{-k}}{\Gamma(\mu - k\rho^{-1})} + O(|x|^{-1-p}), \tag{30}$$

при отрицательных x

$$E_\rho(x; \mu) = -\sum_{k=1}^{p} \frac{x^{-k}}{\Gamma(\mu - k\rho^{-1})} + O(|x|^{-1-p}). \tag{31}$$

Как видно из асимптотических представлений (30), (31), в нашем примере естественно рассмотреть два случая: $\lambda > 0$, $\lambda < 0$.

Пусть $\lambda > 0$. Тогда все фигурирующие в формулах для $\Phi_{ij}(t)$ обобщенные функции Миттаг-Леффлера положительны. Воспользуемся этим обстоятельством, а также формулой (1.15) из [34, с. 120]

$$\int_0^x E_\rho(\lambda x^{1/\beta}; \mu)\, \tau^{\mu-1} d\tau = x^{\mu} E_\rho(\lambda x^{1/\beta}; \mu+1), \quad \mu > 0, \quad \lambda \in R.$$

Тогда функции $\Phi_{ij}(t)$ принимают вид

$$\begin{aligned}
\Phi_{11}(t) &= \frac{t^{\beta} E_{1/\beta}(\lambda t^{\beta}; \beta+1)}{t^{\beta-1} E_{1/\beta}(\lambda t^{\beta}; \beta)}, \\
\Phi_{12}(t) &= \Gamma(\gamma) \frac{t^{\gamma+\beta} E_{1/\beta}(\lambda t^{\beta}; \beta+\gamma+1)}{t^{\beta-1} E_{1/\beta}(\lambda t^{\beta}; \beta)}, \\
\Phi_{21}(t) &= \frac{t^{\beta} E_{1/\beta}(\lambda t^{\beta}; \beta+1)}{E_{1/\beta}(\lambda t^{\beta}; 1)}, \\
\Phi_{22}(t) &= \Gamma(\gamma) \frac{t^{\gamma+\beta} E_{1/\beta}(\lambda t^{\beta}; \beta+\gamma+1)}{E_{1/\beta}(\lambda t^{\beta}; 1)}.
\end{aligned} \tag{32}$$

Положим в формуле (30) $\rho = \dfrac{1}{\beta}$, $x = \lambda t^{\beta}$. Заметим при этом, что поскольку $\beta \in (0, 1)$, то $\rho \in (1, \infty)$ и, следовательно, $\rho > \dfrac{1}{2}$. Тогда имеет место асимптотическое представление

$$E_{1/\beta}(\lambda t^{\beta}; \mu) = \frac{1}{\beta}(\lambda t^{\beta})^{(1-\mu)/\beta} e^{(\lambda t^{\beta})^{1/\beta}} - \sum_{k=1}^{p} \frac{(\lambda t^{\beta})^{-k}}{\Gamma(\mu - k\beta)} + O((t^{\beta})^{-1-p}) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \lambda^{(1-\mu)/\beta} t^{1-\mu} e^{\lambda^{1/\beta} t} + \ldots .$$

Используя это представление, получаем

$$t^{\beta} E_{1/\beta}(\lambda t^{\beta}; \beta+1) = \frac{1}{\beta} \lambda^{(1-(\beta+1))/\beta} t^{\beta} t^{-\beta} e^{\lambda^{1/\beta} t} + \ldots = \frac{1}{\beta} \lambda^{-1} e^{\lambda^{1/\beta} t} + \ldots ,$$

$$t^{\beta-1} E_{1/\beta}(\lambda t^{\beta}; \beta) = \frac{1}{\beta} t^{\beta-1} \lambda^{(1-\beta)/\beta} t^{1-\beta} e^{\lambda^{1/\beta} t} + \ldots = \frac{1}{\beta} \lambda^{1/\beta-1} e^{\lambda^{1/\beta} t} + \ldots , \tag{33}$$

$$\Gamma(\gamma) t^{\gamma+\beta} E_{1/\beta}(\lambda t^{\beta}; \beta+\gamma+1) =$$

$$= \Gamma(\gamma) \frac{1}{\beta} t^{\gamma+\beta} \lambda^{(1-(\gamma+\beta+1))/\beta} t^{1-(\gamma+\beta+1)} e^{\lambda^{1/\beta} t} + \ldots = \frac{\Gamma(\gamma)}{\beta} \lambda^{-(\gamma+\beta)/\beta} e^{\lambda^{1/\beta} t} + \ldots ,$$

$$E_{1/\beta}(\lambda t^{\beta}; 1) = \frac{1}{\beta} \lambda^{(1-1)/\beta} t^{(1-1)} e^{\lambda^{1/\beta} t} + \ldots = \frac{1}{\beta} e^{\lambda^{1/\beta} t} + \ldots .$$

Из формул (32) и асимптотических представлений (33) следуют равенства

$$\lim_{t \to \infty} \Phi_{11}(t) = \frac{\frac{1}{\beta} \lambda^{-1}}{\frac{1}{\beta} \lambda^{1/\beta-1}} = \lambda^{-1/\beta},$$

$$\lim_{t \to \infty} \Phi_{12}(t) = \frac{\frac{\Gamma(\gamma)}{\beta} \lambda^{-(\gamma+\beta)/\beta}}{\frac{1}{\beta} \lambda^{1/\beta-1}} = \Gamma(\gamma) \lambda^{-(\gamma+1)/\beta},$$

$$\lim_{t \to \infty} \Phi_{21}(t) = \frac{\frac{1}{\beta} \lambda^{-1}}{\frac{1}{\beta}} = \lambda^{-1},$$

$$\lim_{t \to \infty} \Phi_{22}(t) = \frac{\frac{\Gamma(\gamma)}{\beta} \lambda^{-(\gamma+\beta)/\beta}}{\frac{1}{\beta}} = \Gamma(\gamma) \lambda^{-(\gamma+\beta)/\beta}.$$

Таким образом, при $\lambda > 0$ время $T_{11}(z_{11}^0, 0)$ конечно, если выполняется неравенство

$$\lambda^{-1/\beta} > \frac{\|z_{11}^0\|}{a-1},$$

время $T_{12}(z_{12}^0, 0)$ конечно при условии

$$\Gamma(\gamma)\,\lambda^{-(\gamma+1)/\beta} > \frac{\|z_{12}^0\|}{a-1},$$

время $T_{21}(z_{21}^0, 0)$ конечно, если

$$\lambda^{-1} > \frac{\|z_{21}^0\|}{a-1},$$

и, наконец, время $T_{22}(z_{22}^0, 0)$ конечно при условии

$$\Gamma(\gamma)\,\lambda^{-(\gamma+\beta)/\beta} > \frac{\|z_{22}^0\|}{a-1}.$$

Рассмотрим теперь случай $\lambda < 0$. Положим в формуле (31) $\rho = \dfrac{1}{\beta}$, $x = \lambda t^{\beta}$. Тогда

$$E_{1/\beta}(\lambda t^{\beta}; \mu) = -\sum_{k=1}^{p} \frac{\lambda^{-k} t^{-k\beta}}{\Gamma(\mu - k\beta)} + O(t^{-(1+p)\beta}).$$

Использовав это асимптотическое представление, получим

$$t^{\beta} E_{1/\beta}(\lambda t^{\beta}; \beta+1) = t^{\beta}\left[-\sum_{k=1}^{p} \frac{\lambda^{-k} t^{-k\beta}}{\Gamma(\beta + 1 - k\beta)} + O(t^{-\beta(1+p)})\right] =$$

$$= t^{\beta}\left[-\frac{\lambda^{-1} t^{-\beta}}{\Gamma(1)} - \frac{\lambda^{-2} t^{-2\beta}}{\Gamma(1-\beta)} - \ldots\right] = -\lambda^{-1} - \frac{\lambda^{-2} t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} - \ldots,$$

$$t^{\beta-1} E_{1/\beta}(t\lambda^{\beta}; \beta) = t^{\beta-1}\left[-\sum_{k=1}^{p} \frac{\lambda^{-k} t^{-k\beta}}{\Gamma(\beta - k\beta)} + \ldots\right] =$$

$$= t^{\beta-1}\left[-\sum_{k=2}^{p} \frac{\lambda^{-k} t^{-k\beta}}{\Gamma(\beta - k\beta)} + \ldots\right] = t^{\beta-1}\left[-\frac{\lambda^{-2} t^{-2\beta}}{\Gamma(-\beta)} - \ldots\right] = -\frac{\lambda^{2} t^{-\beta-1}}{\Gamma(-\beta)} - \ldots, \tag{34}$$

$$\Gamma(\gamma)\, t^{\gamma+\beta} E_{1/\beta}(t\lambda^{\beta}; \gamma+\beta+1) =$$

$$= \Gamma(\gamma)\, t^{\gamma+\beta}\left[-\sum_{k=1}^{p} \frac{\lambda^{-k} t^{-k\beta}}{\Gamma(\gamma + \beta + 1 - k\beta)} - \ldots\right] = -\Gamma(\gamma)\frac{\lambda^{-1} t^{-\gamma}}{\Gamma(\gamma+1)} - \ldots,$$

$$E_{1/\beta}(\lambda t^{\beta}; 1) = -\sum_{k=1}^{p} \frac{\lambda^{-k} t^{-k\beta}}{\Gamma(1 - k\beta)} + O(t^{-\beta(1+p)}) = -\frac{\lambda^{-1} t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} - \ldots .$$

А теперь проанализируем асимптотическое поведение функций $\Phi_{ij}(t)$, заданных формулами (32), при $\lambda < 0$. Заметим, что функции (34) при $\lambda < 0$ не обязательно положительны. Однако, учитывая неравенство

$$\left|\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right| \le \int_0^t |f(\tau)|\,d\tau$$

для произвольной суммируемой функции $f(\tau)$, асимптотические представления (34), а также (32), нетрудно заключить, что

$$\Phi_{ij}(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} \infty \quad \forall\, i, j = 1, 2.$$

Таким образом, время $T_{ij}(z_{ij}^0, 0)$, которое задается формулой (29), конечно при любых z_{ij}^0, $i, j = 1, 2$, т. е. для рассматриваемого процесса при $\lambda < 0$ имеет место полная конфликтная управляемость [5] для всех задач (11), (12); (13), (14); (22), (23) и (24), (25).

Пусть $\lambda = 0$. Тогда, учитывая формулы (32) для функции $\Phi_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2$, а также выражение (29), после несложных подсчетов получаем точные значения для времени окончания рассматриваемых игр, а именно:

$$T_{11}(z_{11}^0, 0) = \beta \frac{\|z_{11}^0\|}{a-1},$$

$$T_{21}(z_{21}^0, 0) = \left[\Gamma(\beta+1)\frac{\|z_{21}^0\|}{a-1}\right]^{1/\beta},$$

$$T_{12}(z_{12}^0, 0) = \left[\frac{\beta+\gamma}{B(\gamma+\beta)}\frac{\|z_{12}^0\|}{a-1}\right]^{1/(\gamma+1)},$$

$$T_{22}(z_{22}^0, 0) = \left[\frac{\Gamma(\beta+\gamma+1)}{\Gamma(\gamma)}\frac{\|z_{22}^0\|}{a-1}\right]^{1/(\gamma+\beta)}.$$

1. *Понтрягин Л. С.* Избранные труды. – М.: Наука, 1988. – Т. 2. – 576 с.
2. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. – М.: Наука, 1970. – 420 с.
3. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. – М.: Мир, 1967. – 480 с.
4. *Hajek O.* Pursuit games. – New York: Acad. Press, 1975. – V. 12. – 266 p.
5. *Chikrii A. A.* Conflict-controlled processes. – Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. – 424 p.
6. *Friedman A.* Differential games. – New York: Wiley, 1971. – 350 p.
7. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. – М.: Наука, 1974. – 455 с.
8. *Пшеничный Б. Н., Остапенко В. В.* Дифференциальные игры. – Киев: Наук. думка, 1992. – 260 с.
9. *Chikrii A. A.* Quasilinear controlled processes under conflict. Dynamical systems. 2 // J. Math. Sci. – 1996. – **80**, № 1. – P. 1489–1518.
10. *Чикрий А. А.* Дифференциальные игры с несколькими преследователями // Тр. Междунар. мат. центра им. С. Банаха. – 1985. – **14**. – С. 81–107.
11. *Григоренко Н. Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. – 198 с.
12. *Чикрий А. А.* Многозначные отображения и их селекторы в игровых задачах управления // Пробл. управления и информатики. – 1994. – № 1, 2. – С. 3–14.
13. *Чикрий А. А.* Функционалы Минковского в теории преследования // Докл. РАН. – 1993. – **329**, № 3. – С. 243–248.
14. *Пшеничный Б. Н., Чикрий А. А., Раппопорт И. С.* Групповое преследование в дифференциальных играх // Оптимизационные исследования и статистика. – Лейпциг, 1982. – С. 13–27.
15. *Пшеничный Б. Н., Чикрий А. А., Раппопорт И. С.* Эффективный метод решения дифференциальных игр со многими преследователями // Докл. АН СССР. – 1981. – **23**, № 1. – С. 104–109.
16. *Chikrii A. A., Rappoport J. S.* Guaranteed result in differential games with terminal payoff // Ann. Int. Sci. Dyn. Games, New Trends Dyn. Games Appl. – 1995. – **3**. – P. 323–330.
17. *Eidelman S. D., Chikrii A. A., Rurenko A. G.* Game problems for fractional systems // Dokl. Akad. Nauk Ukrainy. – 1999. – № 1. – P. 92–96.
18. *Eidelman S. D., Chikrii A. A., Rurenko A. G.* Game problems for dynamic system. Having quasiregular Volterra evolution // Proc. Int. Congr. Math. – Berlin, 1998. – P. 338.
19. *Eidelman S. D., Chikrii A. A., Rurenko A. G.* Quasilinear integral games of approach // IEEE Int. Symp. Intelligence Control. – Gaithersburg, USA,1998. – P. 152–158.

20. *Eidelman S. D., Chikrii A. A., Rurenko A. G.* Quasilinear integral games with summable kernels possessing polar peculiarity // VIII-th Int. Symp. Dynamic Games and Appl. – Maastricht: Netherlands, 1998. – P. 158–163.
21. *Eidelman S. D., Chikrii A. A., Rurenko A. G.* Quasilinear integral games of approach // Dokl. Akad. Nauk Ukrainy. – 1998. – № 7. – P. 92–98.
22. *Эйдельман С. Д., Чикрий А. А., Руренко А. Г.* Линейные интегро-дифференциальные игры сближения // Пробл. управления и информатики. – 1998. – № 2. – С. 5–19.
23. *Чикрий А. А., Чикрий Г. Ц.* Групповое преследование в дифференциально-разностных играх // Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 5. – С. 802–810.
24. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Техника, 1987. – 688 с.
25. *Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б.* Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН АрмССР. – 1968. – **3**, № 1. – С. 3–29.
26. *Кочубей А. Н.* Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения. – 1989. – **25**, № 8. – С. 1359–1367.
27. *Обен Ж.-П., Екланд И.* Прикладной нелинейный анализ. – М.: Мир, 1984. – 512 с.
28. *Куратовский К.* Топология. – М.: Мир, 1966. – Т. 1. – 594 с.
29. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974. – 479 с.
30. *Кларк Ф. Н.* Оптимизация и негладкий анализ. – М.: Наука, 1988. – 280 с.
31. *Aubin J.-P., Frankovska He.* Set-valued analysis. – Boston: Birkhauser, 1990. – 324 p.
32. *Ляшко В. И., Прокопович П. В.* Нормальные интегранты в дифференциальных играх преследования // Докл. НАН Украины. – 1997. – № 5. – С. 98–101.
33. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973. – 472 с.
34. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1966. – 672 с.

Получено 17.07.2000