УДК 519

Р. Ф. Шамоян (Брянск. пед. ун-т, Россия)

О МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ ИЗ ПРОСТРАНСТВ ТИПА БЕРГМАНА В ПРОСТРАНСТВА ХАРДИ В ПОЛИКРУГЕ

Coefficient multipliers from spaces of the Bergman type to the Hardy spaces are described.

Описано коефіцієнтні мультиплікатори із просторів типу Бергмана у простори Харді.

Введение. Пусть $U^n = \left\{ z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n,\ \left| z_j \right| < 1,\ j = 1, \ldots, n \right\}$ — единичный полидиск в n-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, T^n — его остов, $H(U^n)$ — множество всех голоморфных в U^n функций, m_n — n-мерная мера Лебега на T^n.

Если $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $r = (r_1, \ldots, r_n) \in I^n$, $I^n = I \times \ldots \times I$, $I = (0, 1)$, $-\infty < \gamma < \infty$, $0 < p, s < \infty$, то будем использовать обозначения:

$$rz := (r_1 z_1, \ldots, r_n z_n), \qquad |1 - z|^\gamma = \prod_{k=1}^{n} |1 - z_k|^\gamma, \qquad z_k \neq 1, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

$$M_p(f, r) := \left(\int_{T^n} |f(r\xi)|^p \, dm_n(\xi) \right)^{1/p},$$

$$dR = dR_1 \ldots dR_n, \qquad Z_+^n = Z_+ \times \ldots \times Z_+,$$

где Z_+ — множество всех неотрицательных целых чисел, $H^s(U^n)$ — класс Харди в поликруге.

С каждой функцией f, $f \in H(U^n)$, свяжем функцию

$$(D^\alpha f)(z) = \sum_{|k| \geq 0} \frac{\Gamma(k + \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(k + 1)} a_k z^k, \qquad f(z) = \sum_{|k| \geq 0} a_k z^k, \qquad \alpha > -1,$$

$$\Gamma(k + \alpha + 1) = \prod_{j=1}^{n} \Gamma(k_j + \alpha + 1),$$

и назовем ее дробной производной функции f порядка α.

Легко видеть,что $(D^\alpha f)(z) \in H(U^n)$, если $f \in H(U^n)$.

Определение. *Пусть X и Y — подпространства $H(U^n)$. Будем говорить, что последовательность комплексных чисел $\left\{ (c_k)_{k \in Z_+^n} \right\}$ является мультипликатором из X в Y, если для любой функции f, $f \in X$, $f(z) = \sum_{|k| \geq 0} a_k z^k$, следует, что функция g, $g(z) = \sum_{|k| \geq 0} a_k c_k z^k$, принадлежит Y. Множество таких последовательностей обозначим через $M_T(X, Y)$.*

Задача описания мультипликаторов в различных парах пространств голоморфных функций была предметом многих исследований (см., например, [1 – 3]).

Введем в рассмотрение следующие пространства голоморфных в полидиске функций:

$$F_\alpha^{p,q}(U^n) =$$
$$= \left\{ f \in H(U^n) \colon \|f\|^p_{F_\alpha^{p,q}} = \int\limits_{T^n} \left(\int\limits_{I^n} |f(R\xi)|^q (1-R)^{\alpha q - 1} dR \right)^{p/q} dm_n(\xi) < \infty \right\},$$
$$0 < p, q \le 1, \quad 0 < \alpha < \infty.$$

Легко заметить, что введенные пространства являются F-пространствами с метрикой $\rho(f, g) = \|f - g\|^{\min\{p, q\}}$.

При $q = p$ $F_\alpha^{p,q}(U^n) = A_\alpha^p(U^n)$, где $A_\alpha^p(U^n)$ — известные пространства Бергмана в поликруге. Отметим также, что пространства типа $F_\alpha^{p,q}$ в $\mathbb{R}^n$ изучались в [4].

Формулировка основного результата и доказательство вспомогательных утверждений. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $g \in H(U^n)$, $g(z) = \sum_{|k| \ge 0} c_k z^k$, $0 < \max(p, q) \le s \le 1$. *Тогда следующие условия равносильны*:

1) $\left\{ (c_k)_{k \in Z_+^n} \right\} \in M_T\left(F_\alpha^{p,q}(U^n), H^s(U^n) \right)$;

2) $\sup\limits_{r \in I^n} M_s(D^m g, r)(1-r)^{m+1-\alpha-1/p} < \infty$ *для некоторого* m, $m \in \mathbb{N}$, $m > \dfrac{1}{p} + \alpha - 1$.

Доказательству теоремы предпошлем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. 1. *Пусть* $r \in I$, $\beta > 1$. *Тогда*

$$\int\limits_T \frac{dm(\xi)}{|1 - r\xi|^\beta} \le \frac{c}{(1-r)^{\beta - 1}}$$

(здесь и в дальнейшем через c, c_1, c_1', c_2, c_2', $\ldots$ *обозначены фиксированные положительные константы, зависящие от* p, q, α *и т. д.).*

2. *Пусть* $q, \alpha \in (0, \infty)$, $m \in \mathbb{N}$, $m > \alpha - 1$, $w \in U^n$, $w = (w_1, \ldots, w_n)$, $w_k = r_k \xi_k$, $k = 1, \ldots, n$. *Тогда*

$$\int\limits_{I^n} \frac{(1-R)^{q\alpha - 1} dR}{|1 - RW|^{(m+1)q}} \le \frac{c_1}{|1 - w|^{q(m+1-\alpha)}}.$$

Доказательство. Оценка в первом утверждении леммы известна [5]. Докажем второе утверждение. Пусть

$$I = \int\limits_{I^n} \frac{(1-R)^{q\alpha - 1} dR}{|1 - Rw|^{(m+1)q}} = \prod_{k=1}^n \int\limits_I \frac{(1-R_k)^{q\alpha - 1} dR_k}{|1 - R_k w_k|^{(m+1)q}}.$$

Для доказательства леммы достаточно оценить интеграл

$$I = \int\limits_I \frac{(1-R)^{q\alpha-1} dR}{|1 - Rr\xi|^{(m+1)q}} = \int\limits_0^\theta \frac{(1-R)^{q\alpha-1} dR}{|1 - Rr\xi|^{(m+1)q}} + \int\limits_\theta^1 \frac{(1-R)^{q\alpha-1} dR}{|1 - Rr\xi|^{(m+1)q}},$$
$$\theta = 1 - \frac{|1 - r\xi|}{4}, \quad \xi \in T, \quad 0 < r < 1.$$

Очевидно, что $1/2 < \theta < 1$. Отсюда, оценивая каждый интеграл, получаем

$$\int_0^{\theta} \frac{(1-R)^{q\alpha-1}dR}{|1-Rr\xi|^{(m+1)q}} \le \int_0^{\theta} (1-R)^{q\alpha-1-(m+1)q}dR \le$$
$$\le c_2|1-r\xi|^{q(\alpha-m-1)}$$

ввиду неравенств $m > \alpha - 1$, $|1-Rr\xi| \ge 1 - rR \ge 1 - R$. Далее, используя оценку $|1-Rr\xi| \ge |1-r\xi|/4$, при $R > 1/2$ находим

$$\int_{\theta}^{1} \frac{(1-R)^{q\alpha-1}dR}{|1-Rr\xi|^{(m+1)q}} \le c_3\left(\int_{\theta}^{1} (1-R)^{q\alpha-1}dR\right)|1-r\xi|^{-(m+1)q} \le c_4|1-r\xi|^{q(\alpha-m-1)}.$$

Следовательно,

$$I = \prod_{k=1}^{n} \int_I \frac{(1-R_k)^{q\alpha-1}dR_k}{|1-R_k w_k|^{(m+1)q}} \le \frac{c_5(q,\alpha,m)}{\prod_{k=1}^{n}|1-r_k\xi_k|^{q(m+1-\alpha)}} = \frac{c_5(q,\alpha,m)}{|1-w|^{q(m+1-\alpha)}},$$
$$w = (w_1,\ldots,w_n), \quad w_k = r_k\xi_k, \quad k = 1,\ldots,n.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $f, g \in H(U^n)$, $r \in I^n$, $m \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n} f(rt)g(r\bar{t})dm_n(t) = \left(\frac{m}{\pi}\right)^n r_1^{-2m}\ldots r_n^{-2m} \times$$
$$\times \int_0^{r_1}\ldots\int_0^{r_n}\int_{T^n} D^m g(R\xi)f(R\bar{\xi})\prod_{l=1}^{n}\left(r_l^2-R_l^2\right)^{m-1}RdRdm_n(\xi).$$

Доказательство. Пусть

$$f(z) = \sum_{|k|\ge 0} a_k z^k, \qquad g(z) = \sum_{|m|\ge 0} b_m z^m.$$

Имеем

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n} f(rt)g(r\bar{t})dm_n(t) = \sum_{|k|\ge 0} a_k b_k r_1^{2k_1}\ldots r_n^{2k_n}.$$

Далее положим

$$I = \left(\frac{m}{\pi}\right)^n r_1^{-2m}\ldots r_n^{-2m}\int_0^{r_1}\ldots\int_0^{r_n}\int_{T^n} D^m g(R\xi)f(R\bar{\xi})\prod_{l=1}^{n}\left(r_l^2-R_l^2\right)^{m-1}RdRdm_n(\xi) =$$
$$= \left(\frac{m}{\pi}\right)^n (2\pi)^n r_1^{-2m}\ldots r_n^{-2m}\int_0^{r_1}\ldots\int_0^{r_n}\sum_{|k|\ge 0} a_k b_k \prod_{j=1}^{n}\frac{\Gamma(m+k_j+1)}{\Gamma(k_j+1)(\Gamma(m+1))^n} \times$$
$$\times R_1^{2k_1}\ldots R_n^{2k_n}\prod_{l=1}^{n}\left(r_l^2-R_l^2\right)^{m-1}RdR.$$

Выполняя замену переменной $t_j = R_j/r_j$, $j = 1,\ldots,n$, в интеграле, получаем

$$I = (2m)^n r_1^{-2m}\ldots r_n^{-2m}\int_0^1\ldots\int_0^1 \sum_{|k|\ge 0} a_k b_k \prod_{j=1}^{n}\frac{\Gamma(m+k_j+1)}{\Gamma(k_j+1)(\Gamma(m+1))^n}\times$$

$$\times\,(t_1r_1)^{2k_1}\ldots(t_nr_n)^{2k_n}\prod_{l=1}^{n}\left(r_l^2-t_l^2r_l^2\right)^{m-1}t_1\ldots t_n\,r_1^2\ldots r_n^2\,dt_1\ldots dt_n\ =$$

$$=\ (2m)^n\sum_{|k|\geq 0}a_kb_k\prod_{j=1}^{n}\frac{\Gamma(m+k_j+1)}{\Gamma(k_j+1)(\Gamma(m+1))^n}r_1^{2k_1}\ldots r_n^{2k_n}\times$$

$$\times\int_0^1\ldots\int_0^1\prod_{l=1}^{n}\left(1-t_l^2\right)^{m-1}t_1^{2k_1+1}\ldots t_n^{2k_n+1}dt_1\ldots dt_n.$$

Остается заметить, что из равенства

$$\int_0^1\left(1-t_l^2\right)^{m-1}t_l^{2k_j+1}dt_l\ =\ \frac{1}{2}\frac{\Gamma(k_j+1)\Gamma(m)}{\Gamma(m+k_j+1)},\qquad l\,=\,1,\ldots,n,$$

следует

$$I=\sum_{|k|\geq 0}a_kb_k\,r_1^{2k_1}\ldots r_n^{2k_n}.$$

Лемма доказана.

Введем следующие обозначения [6]. Пусть $k=(k_1,\ldots,k_n)\in Z_+^n$, $l=(l_1,\ldots$ $\ldots,l_n)\in Z^n$, $-2^{k_j}\leq l_j\leq 2^{k_j}-1$, $j=1,\ldots,n$, $U_{k,l}=U_{k_1,l_1}\times\ldots\times U_{k_n,l_n}$, где

$$U_{k_j,l_j}\ =$$

$$=\ \left\{z_j\ =\ r_jl^{i\theta_j},\ \ 1-2^{-k_j}\ \leq\ r_j\ \leq\ 1-2^{-k_j-1},\ \ \pi l_j\cdot 2^{-k_j}\ \leq\ \theta_j\ \leq\ \pi(l_j+1)\cdot 2^{-k_j}\right\}.$$

Легко видеть, что $\bigcup_{k,l}U_{k,l}=U^n$. Пусть далее

$$U_{k,l}^*\ =\ U_{k_1,l_1}^*\times\ldots\times U_{k_n,l_n}^*,$$

где

$$U_{k_j,l_j}^*\ =\ \left\{z_j=r_jl^{i\theta_j}:1-2^{-k_j+1}\ \leq\ r_j\ <\ 1-2^{-k_j-2},\right.$$

$$\left.\pi(l_j-1)\cdot 2^{-k_j}\ \leq\ \theta_j\ \leq\ \pi(l_j+2)\cdot 2^{-k_j}\right\},\qquad l_j\in Z,\qquad -2^{k_j}\ \leq\ l_j\ \leq\ 2^{k_j-1},$$
$$j\,=\,1,\ldots,n.$$

Нетрудно показать, что семейство $U_{k,l}^*$ покрывает U^n конечнократно.

В дальнейшем m_{2n} — $2n$-мерная мера Лебега на U^n, а запись $A\sim B$ означает, что существуют константы c_1 и c_2 такие, что $c_1A\leq B\leq c_2A$, c_1, $c_2>0$.

Лемма 3. *Пусть* $0<\max(p,q)\leq s\leq 1$. *Тогда*

$$\left(\int_{U^n}|f(w)|^s(1-|w|)^{s(\alpha+1/p)-2}dm_{2n}(w)\right)^{1/s}\ \leq\ c\|f\|_{F_\alpha^{p,q}}.$$

Доказательство. Предположим сначала, что $0<q\leq p\leq s\leq 1$. Имеем

$$I\ =\ \left(\int_{U^n}|f(w)|^s(1-|w|)^{s(\alpha+1/p)-2}dm_{2n}(w)\right)^{p/s}\ =$$

$$= \left(\sum_{|k| \geq 0} \sum_{l_1, \ldots, l_n} \int_{U_{k,l}} |f(w)|^s (1 - |w|)^{s(\alpha + 1/p) - 2} dm_{2n}(w) \right)^{p/s} \leq$$

$$\leq \sum_{|k| \geq 0} \sum_{l_1, \ldots, l_n} \max_{w \in U_{k,l}} |f(w)|^p \left(\int_{U_{k,l}} (1 - |w|)^{s(\alpha + 1/p) - 2} dm_{2n}(w) \right)^{p/s}$$

ввиду соотношений

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \right)^{\gamma} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{\gamma}, \quad 0 < \gamma \leq 1,$$

$$\left(\max_{w \in \overline{U}_{k,l}} |f(w)|^s \right)^{p/s} = \max_{w \in \overline{U}_{k,l}} |f(w)|^p.$$

Легко видеть, что $m_{2n}(U^*_{k,l}) \sim m_{2n}(U_{k,l}) \sim 2^{-2\|k\|}$, где $\|k\| = k_1 + \ldots + k_n$, $1 - |w| \sim 2^{-\|k\|}$, $w \in U_{k,l}$. Следовательно,

$$\left(\int_{U_{k,l}} (1 - |w|)^{s(\alpha + 1/p) - 2} dm_{2n}(w) \right)^{p/s} \leq c_1 \cdot 2^{-\|k\|(1 + p\alpha)}. \tag{1}$$

Далее, используя n-субгармоничность функции $|f(w)|^q$, имеем (см. [6], лемма 4)

$$\max_{w \in \overline{U}_{k,l}} |f(w)|^q \leq \frac{c_2}{m_{2n}(U^*_{k,l})} \int_{U^*_{k,l}} |f(w)|^q dm_{2n}(w) \tag{1$'$}$$

для некоторой константы $c_2 > 0$. Отсюда выводим

$$\max_{w \in \overline{U}_{k,l}} |f(w)|^p = \left(\max_{w \in \overline{U}_{k,l}} |f(w)|^q \right)^{p/q} \leq c_3 \cdot 2^{2\|k\|p/q} \left(\int_{U^*_{k,l}} |f(w)|^q dm_{2n}(w) \right)^{p/q}.$$

Далее используя неравенство Гельдера, имеем

$$\max_{w \in \overline{U}_{k,l}} |f(w)|^p \leq c_3 \cdot 2^{2\|k\|p/q} \int_{I^*_{l,k}} \left(\int_{1 - 2^{-k+1}}^{1 - 2^{-k-2}} |f(R\xi)|^q dR \right)^{p/q} dm_n(\xi) \times$$

$$\times \left(\int_{I^*_{l,k}} dm_n(\xi) \right)^{(1 - q/p)p/q},$$

где

$$I^*_{l,k} = \left\{ \xi \in T^n, \ r\xi = w \in U^*_{l,k} \right\}.$$

Отсюда вытекает оценка

$$\max_{w \in \overline{U}_{k,l}} |f(w)|^p \le c_4 \cdot 2^{\|k\|(p/q+1)} \int\limits_{I^*_{l,k}} \left(\int\limits_{1-2^{-k+1}}^{1-2^{-k-2}} |f(R\xi)|^q dR \right)^{p/q} dm_n(\xi). \qquad (2)$$

Заметим, что $I^*_{l,k}$ покрывает T^n конечнократно. Учитывая (1) и (2), окончательно получаем

$$I \le c_5 \sum_{|k| \ge 0} \sum_{l_1, \ldots, l_n} \int\limits_{I^*_{l,k}} \left(\int\limits_{1-2^{-k+1}}^{1-2^{-k-2}} |f(R\xi)|^q dR \right)^{p/q} dm_n(\xi) \cdot 2^{-\|k\|(\alpha q - 1)p/q} \le$$

$$\le c_6 \sum_{|k| \ge 0} \int\limits_{T^n} \left(\int\limits_{1-2^{-k+1}}^{1-2^{-k-2}} |f(R\xi)|^q dR \right)^{p/q} dm_n(\xi) \cdot 2^{-\|k\|(\alpha p - p/q)} \le$$

$$\le c_7 \sum_{|k| \ge 0} \int\limits_{T^n} \left(\int\limits_{1-2^{-k+1}}^{1-2^{-k-2}} |f(R\xi)|^q (1-R)^{\alpha q - 1} dR \right)^{p/q} dm_n(\xi) \le c_7 \|f\|^p_{F^{p,q}_\alpha}$$

ввиду оценок

$$2^{-\|k\|} \sim (1-R) \sum_{k=1}^{\infty} a_k^\gamma \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right)^\gamma, \quad 1 \le \gamma < \infty. \qquad (2')$$

Рассмотрим теперь случай $0 < p \le q \le s \le 1$. Имеем

$$I = \left(\int\limits_{U^n} |f(w)|^s \left(1 - |w|\right)^{s(\alpha + 1/p) - 2} dm_{2n}(w) \right)^{p/s} \le$$

$$\le \left(\sum_{|k| \ge 0} \sum_{l_1, \ldots, l_n} \left(\int\limits_{U_{k,l}} |f(w)|^s \left(1 - |w|\right)^{s(\alpha + 1/p) - 2} dm_{2n}(w) \right)^{q/s} \right)^{p/q} \le$$

$$\le \left(\sum_{|k| \ge 0} \sum_{l_1, \ldots, l_n} \max_{w \in \overline{U}_{k,l}} |f(w)|^q \left(\int\limits_{U_{l,k}} \left(1 - |w|\right)^{s(\alpha + 1/p) - 2} dm_{2n}(w) \right)^{q/s} \right)^{p/q}.$$

Далее учитывая оценку (1), получаем

$$I \le \left(\sum_{|k| \ge 0} \sum_{l_1, \ldots, l_n} \max_{w \in \overline{U}_{k,l}} |f(w)|^q \cdot 2^{-\|k\|(q\alpha + q/p)} \right)^{p/q}.$$

Следующее неравенство доказывается аналогично оценке (2):

$$\max_{w \in \overline{U}_{k,l}} |f(w)|^q = \left(\max_{w \in \overline{U}_{k,l}} |f(w)|^p \right)^{q/p} \le$$

$$\le c_1 \cdot 2^{\|k\|(q/p+1)} \int\limits_{1-2^{-k+1}}^{1-2^{-k-2}} \left(\int\limits_{I^*_{l,k}} |f(R\xi)|^p dm_n(\xi) \right)^{q/p} dR.$$

Отсюда выводим

$$I \leq c_2 \left(\sum_{|k| \geq 0} \sum_{l_1, \ldots, l_n} 2^{-\|k\|(\alpha q - 1)} \int\limits_{1-2^{-k+1}}^{1-2^{-k-2}} \left(\int\limits_{I^*_{l,k}} |f(R\xi)|^p dm_n(\xi) \right)^{q/p} dR \right)^{p/q}.$$

Учитывая (2′) и то, что $I^*_{l,k}$ покрывает T^n конечнократно, находим

$$I \leq c_3 \left(\sum_{|k| \geq 0} 2^{-\|k\|(\alpha q - 1)} \int\limits_{1-2^{-k+1}}^{1-2^{-k-2}} \left(\int\limits_{T^n} |f(R\xi)|^p dm_n(\xi) \right)^{q/p} dR \right)^{p/q} \leq$$

$$\leq c_4 \left(\int\limits_{I^n} \left(\int\limits_{T^n} |f(R\xi)|^p dm_n(\xi) \right)^{q/p} (1-R)^{\alpha q - 1} dR \right)^{p/q} \leq$$

$$\leq c_4 \int\limits_{T^n} \left(\int\limits_{I^n} |f(R\xi)|^q (1-R)^{\alpha q - 1} dR \right)^{p/q} dm_n(\xi) = c_4 \|f\|^p_{F^{p,q}_\alpha(U^n)}.$$

В последнем неравенстве мы применили неравенство Минковского.
Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $\left\{ (c_k)_{k \in Z^n_+} \right\}$ принадлежит множеству $M_T(X, Y)$. Тогда согласно теореме о замкнутом графике оператор $T\colon (a_k)_{k \in Z^n_+} \to (c_k a_k)_{k \in Z^n_+}$, $f \in F^{p,q}_\alpha(U^n)$, $f(z) = \sum_{|k| \geq 0} a_k z^k$, ограничен.

Рассмотрим функцию $f_r(z) = 1 / (1 - rz)^{m+1} = \sum_{|k| \geq 0} a_k z^k$, $m > 1/p + \alpha - 1$, $0 < r_j < 1$, $j = 1, \ldots, n$. Из равенства

$$\frac{1}{(1 - z_l)^{m+1}} = \sum_{k_l \geq 0} \frac{\Gamma(m + k_l + 1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(k_l + 1)} z_l^{k_l}, \qquad z_l \in \mathbb{D}, \qquad l = 1, \ldots, n,$$

следует, что если $h(z) = \sum_{|k| \geq 0} a_k c_k z^k$, то $h_r(z) = D^m g_r(z)$, $g_r(z) = g(rz)$. Отсюда, учитывая ограниченность оператора T, имеем

$$\left\| D^m g_r(z) \right\|_{H^s(U^n)} \leq c \| f_r(z) \|_{F^{p,q}_\alpha(U^n)}.$$

Далее согласно лемме 1

$$\|f_r\|_{F^{p,q}_\alpha(U^n)} = \left(\int\limits_{T^n} \left(\int\limits_{I^n} \frac{(1-R)^{\alpha q - 1}}{|1 - rR\xi|^{(m+1)q}} dR \right)^{p/q} dm_n(\xi) \right)^{1//p} \leq$$

$$\leq c_1 \left(\int\limits_{T^n} |1 - r\xi|^{\alpha p - (m+1)p} dm_n(\xi) \right)^{1/p} \leq c_2 (1-r)^{-(m + 1 - \alpha - 1/p)},$$

$$m \in \mathbb{N}, \; m > 1/p + \alpha - 1,$$

для некоторой константы c_2. Следовательно,

$$M_s\left(D^m g_r, R\right) = \left(\int\limits_T \left| D^m g(rR\xi) \right|^s dm_n(\xi) \right)^{\frac{1}{S}} \leq \frac{c_3}{(1-r)^{m+1-\alpha-1/p}}, \qquad 0 < r_j < 1,$$

и условие 2 выполняется.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть

$$h(z) = \sum_{|k| \geq 0} c_k a_k z^k, \quad g(z) = \sum_{|k| \geq 0} c_k z^k,$$

$$f(z) = \sum_{|k| \geq 0} a_k z^k, \quad f \in F_\alpha^{p,q}(U^n).$$

Тогда

$$h(rz) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} g(z\bar{t}) f(rt)\, dm_n(t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} g_\eta(r\bar{t}) f(rt)\, dm_n(t),$$

$$g_\eta(rt) = g(r\eta t), \quad \eta_j = \frac{z_j}{r_j}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$z_j = \rho_j \xi_j, \quad r_j \in (0, 1), \quad j = = 1, \ldots, n.$$

Согласно лемме 2

$$\left| \int_{T^n} g_\eta(z\bar{t}) f(rt)\, dm_n(t) \right| \leq$$

$$\leq \frac{c(m,n)}{(r_1 \ldots r_n)^{2m}} \int_{U^n} |f(w)| \left| D^m g_\eta(\overline{w}) \right| \prod_{l=1}^{n} \left(r_l^2 - |w_l|^2 \right)^{m-1} dm_{2n}(w).$$

Следовательно,

$$|h(r\rho\xi)| \leq \frac{c(m,n)}{(r_1 \ldots r_n)^{2m}} \int_{U^n} |f(w)| \left| D^m g_\eta(\overline{w}) \right| \prod_{l=1}^{n} (1 - |w_l|)^{m-1} dm_{2n}(w),$$

$$w = R\xi.$$

Положим $\rho_j = r_j$, $j = 1, \ldots, n$, возведем обе части неравенства в степень S и проинтегрируем по T^n. В результате получим

$$\int_{T^n} \left| h(r^2\xi) \right|^s dm_n(\xi) \leq$$

$$\leq \frac{c(m,n)}{(r_1 \ldots r_n)^{2ms}} \int_{T^n} \left(\int_{U^n} |f(R\xi)| \left| D^m g\left(\overline{\xi}\xi R\right) \right| \prod_{k=1}^{n} (1 - |w_k|)^{m-1} dm_{2n}(w) \right)^s dm_n(\xi), \quad (3)$$

$$w = R\xi.$$

Оценим внутренний интеграл:

$$I = \left(\int_{U^n} |f(w)| \left| D^m g_\xi(\overline{w}) \right| \prod_{k=1}^{n} (1 - |w_k|)^{m-1} dm_{2n}(w) \right)^s \leq$$

$$\leq \sum_{|k| \geq 0} \sum_{l_1, \ldots, l_n} \left(\int_{U_{j,k}} |f(w)| \left| D^m g_\xi(\overline{w}) \right| \prod_{k=1}^{n} (1 - |w_k|)^{m-1} dm_{2n}(w) \right)^s \leq$$

$$\leq \sum_{|k| \geq 0} \sum_{l_1, \ldots, l_n} \max_{w \in \overline{U_{j,k}}} |f(w)|^s \left| D^m g_\xi(\overline{w}) \right|^s \left(\int_{U_{j,k}} \prod_{k=1}^{n} (1 - |w_k|)^{m-1} dm_{2n}(w) \right)^s.$$

Далее

$$\left| D^m g_\xi(\overline{w}) \right| = \left| D^m \overline{g}_\xi(w) \right|,$$

$$\int\limits_{U_{j,k}} \prod_{k=1}^{n} (1-|w_k|)^{m-1} dm_{2n}(w) \leq c \cdot 2^{-\|k\|(m-1)} \cdot 2^{-2\|k\|}.$$

Используя n-субгармоничность функции $|f(w)|^s \left| D^m \overline{g}_\xi(w) \right|^s$, $\xi \in T^n$ (см. (1′)), окончательно имеем

$$I \leq c_1 \sum_{|k|\geq 0} \sum_{l_1,\ldots,l_n} \int\limits_{U^*_{j,k}} |f(w)|^s \left| D^m \overline{g}_\xi(w) \right|^s dm_{2n}(w) \cdot 2^{-\|k\|(s(m+1)-2)} \leq$$

$$\leq c_2 \sum_{|k|\geq 0} \sum_{l_1,\ldots,l_n} \int\limits_{U^*_{j,k}} |f(w)|^s \left| D^m \overline{g}_\xi(w) \right|^s (1-|w|)^{s(m+1)-2} dm_{2n}(w) \leq$$

$$\leq c_3 \int\limits_{U^n} |f(w)|^s \left| D^m \overline{g}_\xi(w) \right|^s (1-|w|)^{s(m+1)-2} dm_{2n}(w),$$

где в последнем неравенстве использована конечнократность покрытия $U^*_{j,k}$. Следовательно, из (3) вытекает

$$\int\limits_{T^n} \left| h(r^2\xi) \right| dm_n(\xi) \leq$$

$$\leq \frac{c_4}{(r_1\ldots r_n)^{2m}} \int\limits_{T^n} \left(\int\limits_{U^n} |f(w)|^s \left| D^m g_\xi(\overline{w}) \right|^s \prod_{k=1}^{n} (1-|w_k|)^{s(m+)-2} dm_{2n}(w) \right) dm_n(\xi).$$

Применяя теорему Фубини, учитывая условие 1 и лемму 3, окончательно получаем

$$M_s(h, r^2) \leq \frac{c_5}{(r_1\ldots r_n)^{2m}} \left(\int\limits_{U^n} |f(w)|^s (1-|w|)^{s(\alpha+1/p)-2} dm_{2n}(w) \right)^{1/s} \leq$$

$$\leq \frac{c_6}{(r_1\ldots r_n)^{2m}} \|f\|_{F^{p,q}_\alpha}.$$

Остается перейти к пределу при $r_j \to 1$, $j = 1, \ldots, n$, $\|h\|_{H^s(U^n)} \leq c_7 \|f\|_{F^{p,q}_\alpha(U^n)}$. Теорема доказана.

***Следствие* 1.** *Функция* g, $g(z) = \sum_{|k|\geq 0} c_k z^k$, *принадлежит* $M_T\left(A^p_\alpha(U^n), H^s(U^n)\right)$, $0 < p \leq s \leq 1$, *тогда и только тогда, когда* $\sup\limits_{r \in I^n} M_s(D^m g, r) \times \times (1-r)^{m+1-\alpha-1/p} < \infty$ *для некоторого* m, $m \in \mathbb{N}$, $m > 1/p + + \alpha - 1$.

Пусть

$$l^2 = \left\{ (a_k)_k \in Z^n_+, \sum_{|k|\geq 0} a_k^2 < \infty \right\}.$$

Учитывая результаты работы [7], получаем такое следствие.

***Следствие* 2.** 1. *Если* $\lambda_k = c_k a_k$, $k \in Z^n_+$, $\sum_{k_1=0}^{N_1} \ldots \sum_{k_n=0}^{N_1} k_1^2 \ldots \ldots k_n^2 \left| a_{k_1 \ldots k_n} \right|^2 = O\left(N_1^2 \ldots N_n^2\right)$, $g \in H(U^n)$, $g(z) = \sum\limits_{|k|\geq 0} c_k z^k$ *и выполнено условие* 1 *при* $s = 1$, *то* $\left\{ (\lambda_k)_{k \in Z^n_+} \right\} \in M_T\left(F^{p,q}_\alpha, l^2\right)$.

2. *Если*

$$\sum_{k=1}^{N} k^2 |a_k| = O(N), \qquad f(z) = \sum_{|k| \ge 0} b_k z^k, \qquad f \in F_{\alpha}^{p,q}(U^n),$$

$$g \in H(U^n), \qquad g(z) = \sum_{|k| \ge 0} c_k z^k,$$

выполнено условие 1 *при* $s = 1$, *то*

$$\sum_{|k| \ge 0} |b_k| |c_k| \left| a_{k_1 + \ldots + k_n} \right| < \infty.$$

1. *Шведенко С. В.* Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ / ВИНИТИ. – 1986. – **23.** – С. 3 – 124.
2. *Nawrocki M.* Multipliers, linear functionals and the Fréchet envelope of the Smirnov class $N_*(U^n)$ // Trans. Amer. Math. Soc. – 1990. – **322**, № 2. – P. 493 – 506.
3. *Тригуб Р. М.* Мультипликаторы класса $H_p(\mathbb{D}^m)$, аппроксимативные свойства методов суммирования степенных рядов // Докл. РАН. – 1994. – **335**, № 6. – С. 697 – 699.
4. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. – М.: Мир, 1986. – 447 с.
5. *Duren P. L.* Theory of H^p spaces. – New York: Acad. Press, 1970. – 258 p.
6. *Шамоян Ф. А.* Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций // Сиб. мат. журн. – 1990. – **30**, № 2. – С. 197 – 214.
7. *Obelrin D. M.* Two multiplier theorems for $H^1(U^2)$ // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 1979. – **22**, № 1. – P. 43 – 47.

Получено 08.05.98