УДК 519.21

Ю. Н. Линьков, О. А. Николаева
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

СВОЙСТВА ОТНОШЕНИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ СЧИТАЮЩИХ ПРОЦЕССОВ В ЗАДАЧЕ ОЦЕНИВАНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ

We obtain an asymptotic decomposition of logarithm of the likelihood ratio for counting processes in the case of similar hypotheses. We establish the properties of normed likelihood ratio in the problem of estimation of an unknown parameter.

Одержано асимптотичний розклад логарифма відношення правдоподібності для лічильних процесів у випадку близьких гіпотез. Встановлено властивості нормованого відношення правдоподібності в задачі оцінки невідомого параметра.

1. Введение. Свойства отношения правдоподобия играют важную роль в асимптотической теории оценивания параметров. Создание такой теории для общих параметрических экспериментов, основанной на свойствах отношения правдоподобия, связано с работами Л. Ле Кама [1], И. А. Ибрагимова и Р. З. Хасьминского [2]. Распространение этой теории на статистические эксперименты, порожденные случайными процессами, начато в работах И. А. Ибрагимова и Р. З. Хасьминского [2], К. О. Джапаридзе [3], Ю. А. Кутоянца [4], Ю. Н. Линькова [5], А. Ф. Тараскина [6], Е. Огаты [7] и др. Основные результаты получены для случайных процессов семимартингального типа с непрерывными характеристиками. Отметим работы [8–12], в которых начато исследование свойств отношения правдоподобия для считающих процессов с разрывными компенсаторами, и работы [13–15], в которых эти исследования проведены для процессов с независимыми приращениями с разрывными по времени характеристиками. При этом параметрические семейства экспериментов рассмотрены лишь в [9, 13, 15].

В настоящей статье рассматриваются свойства отношения правдоподобия для параметрических семейств экспериментов, порождаемых наблюдениями считающих процессов, компенсаторы которых, вообще говоря, могут быть разрывными. Как и в работе [9], посвященной этой же задаче, используем семимартингальные разложения для логарифма отношения правдоподобия. Однако в работе [9] ограничения были слишком жесткими. В настоящей работе используются более общие семимартингальные разложения для логарифма отношения правдоподобия, полученные в работе [16] при очень слабых ограничениях. Это позволяет получить свойства отношения правдоподобия при значительно более слабых ограничениях, чем в работе [9]. Кроме того, некоторые свойства отношения правдоподобия мы получаем в терминах процесса Хеллингера.

Полученные в данной работе свойства отношения правдоподобия позволяют исследовать асимптотические свойства статистических оценок неизвестных параметров считающих процессов [2], а также асимптотические свойства статистических критериев в случае близких гипотез [5].

2. Отношение правдоподобия и процессы Хеллингера. Пусть X — множество неубывающих непрерывных справа кусочно-постоянных функций $x = (x_t)_{t\in R_+}$ таких, что $x_0 = 0$ и $\Delta x_t = 0$ или $\Delta x_t = 1$ для всех $t \in R_+$ (здесь $\Delta x_t = x_t - x_{t-}$). Пусть $\mathcal{B}_t$ — наименьшая σ-алгебра подмножеств из X, порожденная цилиндрическими множествами над $[0, t]$, и $\mathcal{B} = \bigvee_{t\geq 0}\mathcal{B}_t$. На измеримом пространстве $(X, \mathcal{B})$ зададим параметрическое семейство вероятностных мер $(\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta)$, где Θ — некоторое непустое открытое множество из R^k, $k \geq 1$. Рассмотрим две точки θ и y из множества Θ и две меры $\mathbf{P}_\theta$ и $\mathbf{P}_y$ из семейства $(\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta)$ и положим $\mathbf{Q} = 2^{-1}(\mathbf{P}_\theta + \mathbf{P}_y)$. Обозначим через $\mathcal{B}^Q$ и

$\mathcal{B}_t^Q$ пополнения σ-алгебр $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}_t$ по мере $\mathbf{Q}$. Рассмотрим стохастический базис $(\Omega, \mathcal{F}, F, \mathbf{Q})$, где $\Omega = X$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}^Q$, $F = (\mathcal{F}_t)$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{B}_t^Q$. Таким образом, имеем полный стохастический базис $(\Omega, \mathcal{F}, F, \mathbf{Q})$, удовлетворяющий обычным условиям по Делашери [17]. Кроме того, будем также рассматривать стохастические базисы $(\Omega, \mathcal{F}, F, \mathbf{P}_\theta)$ и $(\Omega, \mathcal{F}, F, \mathbf{P}_y)$, которые, вообще говоря, не удовлетворяют обычным условиям.

Пусть $\xi = (\xi_t)_{t\geq 0}$ — координатный процесс на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ такой, что $\xi_t(\omega) = x_t$ для всех $t \in R_+$ и $\omega = (x_t)_{t\geq 0} \in \Omega$. Этот процесс называется считающим и его траектории $\xi(\omega) = (\xi_t(\omega))_{t\geq 0}$ принадлежат пространству X для всех $\omega \in \Omega$.

Очевидно, $\xi \in \mathcal{A}_{\text{loc}}^+(F, \mathbf{P}_\theta)$, значит, на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, F, \mathbf{P}_\theta)$ считающий процесс ξ имеет компенсатор $\nu(\theta) = (\nu_t(\theta))_{t\geq 0} \in \mathcal{A}_{\text{loc}}^+(F, \mathbf{P}_\theta) \cap \mathcal{P}(F)$. Аналогично, на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, F, \mathbf{P}_y)$ считающий процесс ξ имеет компенсатор $\nu(y) = (\nu_t(y))_{t\geq 0} \in \mathcal{A}_{\text{loc}}^+\big(F, \mathbf{P}_y\big) \cap \mathcal{P}(F)$. Здесь и ниже используем хорошо известные понятия и факты из общей теории случайных процессов без дополнительных ссылок. Их можно найти в работах [5, 17–19].

Пусть $\mathbf{P}_y^t$ и $\mathbf{P}_\theta^t$ — сужения мер $\mathbf{P}_y$ и $\mathbf{P}_\theta$ на σ-алгебру $\mathcal{F}_t$, $t \in R_+$. Если $\mathbf{P}_y^t \ll \mathbf{P}_\theta^t$ для всех $t \in R_+$, то мера $\mathbf{P}_y$ называется локально абсолютно непрерывной мере $\mathbf{P}_\theta$ (обозначение $\mathbf{P}_y \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbf{P}_\theta$). Если $\mathbf{P}_y \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbf{P}_\theta$ и $\mathbf{P}_\theta \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbf{P}_y$, то меры $\mathbf{P}_y$ и $\mathbf{P}_\theta$ локально эквивалентны (обозначение $\mathbf{P}_y \overset{\text{loc}}{\sim} \mathbf{P}_\theta$). Если $\mathbf{P}_y \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbf{P}_\theta$, то существует единственный с точностью до $\mathbf{P}_\theta$-неразличимости случайный процесс $z(y, \theta) = (z_t(y, \theta))_{t\geq 0} \in \mathcal{M}_{\text{loc}}(F, \mathbf{P}_\theta)$, где $z_t(y, \theta) = d\mathbf{P}_y^t / d\mathbf{P}_\theta^t$ — плотность меры $\mathbf{P}_y^t$ относительно меры $\mathbf{P}_\theta^t$. Процесс $z(y, \theta)$ называется процессом локальной плотности меры $\mathbf{P}_y$ относительно меры $\mathbf{P}_\theta$, а также процессом отношения правдоподобия.

Очевидно, $\mathbf{P}_y \ll \mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}_\theta \ll \mathbf{Q}$. Пусть $\mathfrak{z}(y) = (\mathfrak{z}_t(y))_{t\geq 0}$ и $\mathfrak{z}(\theta) = (\mathfrak{z}_t(\theta))_{t\geq 0}$ — процессы локальной плотности мер $\mathbf{P}_y$ и $\mathbf{P}_\theta$ соответственно относительно меры $\mathbf{Q}$. Если $\mathbf{P}_y \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbf{P}_\theta$, то ясно, что $\mathfrak{z}(y)/\mathfrak{z}(\theta) = z(y, \theta)$ ($\mathbf{Q}$-п. н.), где для определенности полагаем $0/0 = 0$.

Для всех $t \in R_+$ и $\varepsilon \in R$ введем интеграл Хеллингера $H_t(\varepsilon) = H_t(\varepsilon; y, \theta)$ порядка ε для мер $\mathbf{P}_y^t$ и $\mathbf{P}_\theta^t$, полагая

$$H_t(\varepsilon; y, \theta) = \mathbf{E}_Q Y_t(\varepsilon), \tag{1}$$

где $Y_t(\varepsilon) = Y_t(\varepsilon; y, \theta) = \mathfrak{z}_t^\varepsilon(y)\mathfrak{z}_t^{1-\varepsilon}(\theta)$. Если $\varepsilon < 0$ и $\mathfrak{z}_t(y) = 0$, то полагаем $Y_t(\varepsilon) = 0$ (соответственно $Y_t(\varepsilon) = \infty$) при $\mathfrak{z}_t(\theta) = 0$ (соответственно при $\mathfrak{z}_t(\theta) > 0$). Если $\varepsilon > 1$ и $\mathfrak{z}_y(\theta) = 0$, то полагаем $Y_t(\varepsilon) = 0$ (соответственно $Y_t(\varepsilon) = \infty$) при $\mathfrak{z}_t(y) = 0$ (соответственно при $\mathfrak{z}_t(y) > 0$). Кроме того, полагаем $Y_t(0) = \mathfrak{z}_t(\theta) I(\mathfrak{z}_t(y) > 0)$ и $Y_t(1) = \mathfrak{z}_t(y) I(\mathfrak{z}_t(\theta) > 0)$. Здесь $\mathbf{E}_Q$ означает математическое ожидание по мере $\mathbf{Q}$. Далее через $\mathbf{E}_\theta$ будем обозначать математическое ожидание по мере $\mathbf{P}_\theta$.

Введем обозначения:

$$\varepsilon_-^{(t)}(y, \theta) = \inf\{\varepsilon\colon H_t(\varepsilon; y, \theta) < \infty\},$$

$$\varepsilon_+^{(t)}(y, \theta) = \sup\{\varepsilon\colon H_t(\varepsilon; y, \theta) < \infty\}.$$

Очевидно, $\varepsilon_-^{(t)}(y, \theta) \le 0$ и $\varepsilon_+^{(t)}(y, \theta) \ge 1$ и $H_t(\varepsilon; y, \theta) \le 1$ для всех $\varepsilon \in [0, 1]$. Из определения (1) имеем $H_t(0; y, \theta) = \mathbf{P}_\theta(\mathfrak{z}_t(y) > 0)$ и $H_t(1; y, \theta) = \mathbf{P}_y(\mathfrak{z}_t(\theta) > 0)$. Более того, справедливы следующие импликации [5]:

$$\varepsilon_-^{(t)}(y, \theta) < 0 \Rightarrow H_t(0; y, \theta) = 1 \Leftrightarrow \mathbf{P}_\theta^t \ll \mathbf{P}_y^t,$$

$$\varepsilon_+^{(t)}(y, \theta) > 1 \Rightarrow H_t(1; y, \theta) = 1 \Leftrightarrow \mathbf{P}_y^t \ll \mathbf{P}_\theta^t.$$

Из работы [20] следует, что $\varepsilon_-^{(t)}(y, \theta) \uparrow \varepsilon_-(y, \theta) \le 0$ и $\varepsilon_+^{(t)}(y, \theta) \downarrow \varepsilon_+(y, \theta) \ge 1$ при $t \to \infty$ (см. также [14], лемма 1).

Для формулировки следующей леммы введем случайные множества:

$$\Gamma(\theta) = \{\mathfrak{z}(\theta) > 0\} \cup [\![0]\!], \qquad \Gamma(y) = \{\mathfrak{z}(y) > 0\} \cup [\![0]\!],$$

$$\Gamma_\varepsilon(y, \theta) = (\Gamma(\theta) \cap \Gamma(y) \cap \{0 < \varepsilon < 1\}) \cup (\Gamma(\theta) \cap \{\varepsilon \le 0\}) \cup (\Gamma(y) \cap \{\varepsilon \ge 1\}).$$

Лемма 1. *Для любого* $\varepsilon \in (\varepsilon_-(y, \theta), \varepsilon_+(y, \theta))$ *существует предсказуемый возрастающий процесс* $h(\varepsilon) = h(\varepsilon; y, \theta)$ *с* $h_0(\varepsilon) = 0$, *единственный с точностью до* $\mathbf{Q}$*-неотличимости и имеющий свойства:*

1) $h(\varepsilon) = I(\Gamma_\varepsilon(y, \theta)) \circ h(\varepsilon)$;

2) $m(\varepsilon) = Y(\varepsilon) + \operatorname{sign}(\varepsilon(1-\varepsilon))\, Y_-(\varepsilon) \circ h(\varepsilon) \in \overline{\mathcal{M}}(F, \mathbf{Q})$.

Доказательство леммы 1 не отличается от доказательства леммы 2.2 [14] и поэтому опускается.

***Замечание* 1.** Если $\varepsilon \in (0, 1)$, то процесс $m(\varepsilon)$ из условия 2 леммы 1 является равномерно интегрируемым мартингалом из класса $\mathcal{M}(F, \mathbf{Q})$, причем $m_0(\varepsilon) = Y_0(\varepsilon) = \mathfrak{z}_0^\varepsilon(y)\mathfrak{z}_0^{1-\varepsilon}(\theta)$. А так как $\mathbf{P}_y^0 = \mathbf{P}_\theta^0$, то $Y_0(\varepsilon) = 1$ и, значит, имеет место равенство $Y(\varepsilon) = m(\varepsilon) - Y_-(\varepsilon) \circ h(\varepsilon)$, где $m_0(\varepsilon) = 1$. Если $\varepsilon_-(y, \theta) = 0$ и $\varepsilon_+(y, \theta) = 1$, то в лемме 1 процессы $h(0)$ и $h(1)$ не определены, хотя $H_t(0; y, \theta) < \infty$ и $H_t(1; y, \theta) < \infty$ для всех $t \in R_+$. В этом случае процессы $h(0)$ и $h(1)$ можно определить аналогично [19] (секция 4.1).

Определение. 1. *Возрастающий процесс* $h(\varepsilon) = h(\varepsilon; y, \theta)$, *построенный в лемме* 1, *называется процессом Хеллингера в строгом смысле порядка* ε *для мер* $\mathbf{P}_y$ *и* $\mathbf{P}_\theta$.

2. *Процессом Хеллингера в слабом смысле (или просто процессом Хеллингера) порядка* ε *для мер* $\mathbf{P}_y$ *и* $\mathbf{P}_\theta$ *называется любой возрастающий предсказуемый процесс* $h'(\varepsilon) = h'(\varepsilon; y, \theta)$ *такой, что процессы* $I(\Gamma_\varepsilon(y, \theta)) h'(\varepsilon)$ *и* $I(\Gamma_\varepsilon(y, \theta)) h(\varepsilon)$ *(или, эквивалентно,* $I(\gamma_\varepsilon(y, \theta)) \circ h'(\varepsilon)$ *и* $I(\Gamma_\varepsilon(y, \theta)) \circ h(\varepsilon)$) $\mathbf{Q}$*-неразличимы.*

Лемма 1 не дает выражения для процесса Хеллингера $h(\varepsilon) = h(\varepsilon; y, \theta)$. Рассмотрим вопрос о вычислении процесса Хеллингера при условии $\mathbf{P}_y \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbf{P}_\theta$. Следующая лемма дает достаточные условия локальной абсолютной непрерывности $\mathbf{P}_y \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbf{P}_\theta$ и указывает вид процесса локальной плотности $z(y, \theta)$.

Лемма 2. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) *существует неотрицательный предсказуемый процесс* $(\lambda_t(y, \theta))_{t \ge 0} = \lambda(y, \theta)$ *такой, что* $\nu_t(y) = \lambda(y, \theta) \circ \nu(\theta)_t$ ($\mathbf{P}_y$*-п. н.*) $\forall t \ge 0$;

2) *если* $\Delta\nu_t(\theta) = 1$ *для некоторого* $t \ge 0$, *то* $\Delta\nu_t(y) = 1$ ($\mathbf{P}_y$*-п. н.*);

3) $\left(1 - \sqrt{\lambda(y, \theta)}\right)^2 \circ \nu(\theta)_t + \sum_{s \le t} \left(\sqrt{1 - \Delta\nu_s(y)} - \sqrt{1 - \Delta\nu_s(\theta)}\right)^2 < \infty$ ($\mathbf{P}_y$*-п. н.*) $\forall t \ge 0$.

Тогда $\mathbf{P}_y \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbf{P}_\theta$ *и процесс локальной плотности* $z(y, \theta) = (z_t(y, \theta))_{t \ge 0}$ *меры* $\mathbf{P}_y$ *относительно меры* $\mathbf{P}_\theta$ *имеет вид*

$$z(y,\theta) = e^{N(y,\theta)} \prod_{0<s\leq \cdot} (1+\Delta N_s(y,\theta)) e^{-\Delta N_s(y,\theta)}, \tag{2}$$

где $N(y,\theta)$ — *локальный* $\mathbf{P}_\theta$-*мартингал вида*

$$N(y,\theta) = \left(\lambda(y,\theta) - 1 + \frac{\Delta\nu(y) - \Delta\nu(\theta)}{1-\Delta\nu(\theta)} I(\Delta\nu(\theta) < 1)\right) * (\varepsilon - \nu(\theta)). \tag{3}$$

Лемма 2 представляет собой объединение теорем III.5.43 и IV.4.6 и следствия III.5.22 из [19].

Следующая лемма дает вид процесса Хеллингера $h(\varepsilon) = h(\varepsilon; y, \theta)$ при выполнении условия $\mathbf{P}_y \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbf{P}_\theta$.

Лемма 3. *Пусть выполняются условия* 1–3 *из леммы* 2. *Тогда для* $\varepsilon \in (\varepsilon_-(y,\theta), \varepsilon_+(y,\theta))$ *процесс Хеллингера* $h(\varepsilon) = h(\varepsilon; y, \theta)$ *имеет вид*

$$h(\varepsilon) = \operatorname{sign}(\varepsilon(1-\varepsilon)) \left\{ \varphi_\varepsilon(\lambda(y,\theta), 1) \circ \nu(\theta) + \sum_{0<s\leq \cdot} \varphi_\varepsilon(1-\Delta\nu_s(y), 1-\Delta\nu_s(\theta)) \right\}, \tag{4}$$

где

$$\varphi_\varepsilon(u, v) = \varepsilon u + (1-\varepsilon) v - u^\varepsilon v^{1-\varepsilon}.$$

Кроме того, справедливо равенство

$$h(\varepsilon) = \operatorname{sign}(\varepsilon(1-\varepsilon)) \left\{ \varphi_\varepsilon(\lambda(y,\theta), 1) \circ \nu^c(\theta) + \sum_{0<s\leq \cdot} f_\varepsilon(\Delta\nu_s(\theta), \Delta\nu_s(y)) \right\}, \tag{5}$$

где $\nu^c(\theta)$ — *непрерывная часть компенсатора* $\nu(\theta)$ *и*

$$f_\varepsilon(x, y) = 1 - x\left(\frac{y}{x}\right)^\varepsilon - (1-x)\left(\frac{1-y}{1-x}\right)^\varepsilon, \quad 0 \leq x, y \leq 1.$$

Доказательство равенства (4) при $\varepsilon \in (\varepsilon_-(y,\theta), 1)$ можно найти в [11]. При $\varepsilon \in (1, \varepsilon_+(y,\theta))$ в случае $\varepsilon_+(y,\theta) > 1$ равенство (4) доказывается аналогично на основании равенства $h(\varepsilon; y, \theta) = h(1-\varepsilon; \theta, y)$. Равенство (5) вытекает непосредственно из (4).

Замечание 2. Если $\varepsilon_-(y,\theta) < 0$ и $H_t(\varepsilon_-(y,\theta))$ для всех $t \in R_+$, то процесс Хеллингера $h(\varepsilon_-(y,\theta))$ вполне определен, как в лемме 1 при $\varepsilon = \varepsilon_-(y,\theta)$. Аналогично, если $\varepsilon_+(y,\theta) > 1$ и $H_t(\varepsilon_+(y,\theta)) < \infty$ для всех $t \in R_+$, то процесс Хеллингера $h(\varepsilon_+(y,\theta))$ также вполне определен, как в лемме 1 при $\varepsilon = \varepsilon_+(y,\theta)$. Ниже если процесс Хеллингера $h(\varepsilon)$ не определен при некотором ε, то полагаем $h(\varepsilon) = \infty$. Таким образом, процесс Хеллингера $h(\varepsilon)$ становится определенным при всех $\varepsilon \in R$.

Введем случайный процесс $\Lambda(y,\theta) = \ln z(y,\theta)$, полагая $\ln 0 = -\infty$, где $z(y,\theta)$ — процесс локальной плотности меры $\mathbf{P}_y$ относительно меры $\mathbf{P}_\theta$, задаваемый равенствами (2) и (3). Кроме того, рассмотрим две случайные меры $p(\theta)$ и $q(\theta)$ на $(R_+, \mathcal{B}_+)$, положив

$$p(A,\theta) = \sum_{a\in A} I(0 < \Delta\nu_s(\theta) < 1)(1-\Delta\xi_s), \tag{6}$$

$$q(A,\theta) = \sum_{a\in A} I(0 < \Delta\nu_s(\theta) < 1)(1-\Delta\nu_s(\theta)), \qquad A \in \mathcal{B}_+, \tag{7}$$

где $\mathcal{B}_+$ — борелевская σ-алгебра подмножеств из R_+. Очевидно, мера $q(\theta)$ является компенсатором меры $p(\theta)$.

Следующая лемма дает условия, при которых процесс $\Lambda(y,\theta)$ является специальным семимартингалом, и указывает соответствующее расположение семимартингала $\Lambda(y,\theta)$.

Лемма 4. *Пусть выполняются условия* 1–3 *из леммы* 2 *и, кроме того, следующие два условия:*

4) $(\lambda(y,\theta)-1-\ln\lambda(y,\theta))\circ\nu(\theta)_t < \infty$ $(\mathbf{P}_\theta\text{-п. н.})$ $\forall t\in R_+$;

5) $\left(\dfrac{\Delta\nu(\theta)-\Delta\nu(y)}{1-\Delta\nu(\theta)}-\ln\dfrac{1-\Delta\nu(y)}{1-\Delta\nu(\theta)}\right)\circ q(\theta)_t < \infty$ $(\mathbf{P}_\theta\text{-п. н.})$ $\forall t\in R_+$.

Тогда процесс $\Lambda(y,\theta)$ *является специальным семимартингалом из класса семимартингалов* $S_p(F,\mathbf{P}_\theta)$ *и имеет место следующее разложение, единственное с точностью до* $\mathbf{P}_\theta$*-неразличимости:*

$$\Lambda(y,\theta) = m(y,\theta) - A(y,\theta), \tag{8}$$

где

$$m(y,\theta) = \left(\ln\lambda(y,\theta)+\frac{\Delta\nu(y)-\lambda(y,\theta)}{1-\Delta\nu(\theta)}I(\Delta\nu(\theta)<1)\right)*(\varepsilon-\nu(\theta)) + \\ + \left(\ln\frac{1-\Delta\nu(y)}{1-\Delta\nu(\theta)}+\frac{\Delta\nu(y)-\Delta\nu(\theta)}{1-\Delta\nu(\theta)}\right)*(p(\theta)-q(\theta)) \in \mathcal{M}^d_{\mathrm{loc}}(F,\mathbf{P}_\theta), \tag{9}$$

$$A(y,\theta) = (\lambda(y,\theta)-1-\ln\lambda(y,\theta))\circ\nu(\theta) + \\ + \left(\frac{\Delta\nu(\theta)-\Delta\nu(y)}{1-\Delta\nu(\theta)}-\ln\frac{1-\Delta\nu(y)}{1-\Delta\nu(\theta)}\right)\circ q(\theta) \in \mathcal{V}^+_{\mathrm{loc}}(F,\mathbf{P}_\theta), \tag{10}$$

а $p(\theta)$ и $q(\theta)$ — *меры на* $(R_+,\mathcal{B}_+)$, *заданные соотношениями* (6) *и* (7).

Доказательство леммы 4 можно найти в [16].

***Замечание* 3.** Нетрудно показать, что процесс $A(y,\theta)$, заданный формулой (10), можно представить в виде

$$A(y,\theta) = (\lambda(y,\theta)-1-\ln\lambda(y,\theta))\circ\nu^c(\theta) + H(\Delta\nu(\theta)\,|\,\Delta\nu(y))(1-\Delta\nu(\theta))^{-1}\circ q(\theta), \tag{11}$$

где $H(p\,|\,\tilde p)$ — относительная энтропия вида

$$H(p\,|\,\tilde p) = p\ln\frac{p}{\tilde p}+(1-p)\ln\frac{1-p}{1-\tilde p}$$

для двух дискретных распределений $(p,1-p)$ и $(\tilde p,1-\tilde p)$ [5].

3. Асимптотическое разложение отношения правдоподобия. Для вещественной функции $f(\theta)$, $\theta\in\Theta$, будем писать $f\in C_1^0(\Theta)$ если функция f дифференцируема и для любых $\theta\in\Theta$ и $y\in R^k$ таких, что $\theta+vy\in\Theta$ для всех $v\in[0,1]$, функция $f(\theta+vy)$ абсолютно непрерывна по $v\in[0,1]$. Тогда имеет место равенство

$$f(\theta+y)-f(\theta) = \int_0^1 y'\Delta_\theta f(\theta+vy)\,dv, \tag{12}$$

где $\Delta_\theta f = (\partial f/\partial\theta_1,\ldots,\partial f/\partial\theta_k)'$, $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_k)'$. Здесь и ниже векторы являются векторами-столбцами, а штрих означает транспонирование матриц.

Следующая теорема дает асимптотическое разложение для $\Lambda_t(\theta_t,\theta)$ при $t\to\infty$, где θ_t зависит от t и $\theta_t\to\theta$ при $t\to\infty$, а θ не зависит от t. Введем следующие обозначения:

$$l(y,\theta) = \Delta_y\lambda(y,\theta), \qquad f(y,\theta) = l(y,\theta)/\lambda(y,\theta),$$

$$l^{t,v} = l(\theta+v\Delta_t,\theta), \qquad f^{t,v} = f(\theta+v\Delta_t,\theta), \qquad \lambda^{t,v} = \lambda(\theta+v\Delta_t,\theta),$$

$$l = l(\theta,\theta) = l^{t,0}, \qquad f = f(\theta,\theta) = f^{t,0}, \qquad \Delta_t = \theta_t - \theta, \qquad v \in [0,1].$$

Заметим, что $f^{t,0} = l^{t,0}$, т. е. $f = l$, так как $\lambda^{t,0} = \lambda(\theta,\theta) = 1$.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия леммы* 4 *при* $y = \theta_t$, *где* $\theta_t \to \theta$ *при* $t \to \infty$, *и выполняются следующие условия:*

1) $\ln\lambda(y,\theta) \in C_1^0(\Theta)$ *как функция переменной* $y \in \Theta$ *при фиксированных остальных переменных и для всех* y *из некоторой окрестности точки* θ

$$f(y,\theta) + l(y,\theta) = \frac{\Delta\nu(\theta)}{1-\Delta\nu(\theta)} I(\Delta\nu(\theta)<1) \in \mathcal{G}^2_{\mathrm{loc}}(\nu(\theta); F, \mathbf{P}_\theta)$$

(*определение класса* $\mathcal{G}^2_{\mathrm{loc}}(\nu(\theta); F, \mathbf{P}_\theta)$ *см. в* [5]);

2) *существует положительно определенная симметричная матрица* $\varphi_t(\theta)$ *такая, что* $|\varphi_t(\theta)|^2 = \operatorname{Sp}\varphi_t^2(\theta) \to 0$ *при* $t \to \infty$ *и*

$$\mathbf{P}_\theta\text{-}\lim_{t\to\infty} \varphi_t(\theta)\left\{\frac{ll'}{1-\Delta\nu(\theta)} I(\Delta\nu(\theta)<1) \circ \nu(\theta)_t\right\}\varphi_t(\theta) = I_k,$$

где I_k — *единичная матрица порядка* k;

3) *для любого* $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}_\theta\text{-}\lim_{t\to\infty} I\left(\frac{|\varphi_t(\theta)l|}{1-\Delta\nu(\theta)} I(\Delta\nu(\theta)<1) > \varepsilon\right)\left|\frac{\varphi_t(\theta)l}{1-\Delta\nu(\theta)}\right|^2 I(\Delta\nu(\theta)<1) \circ \nu(\theta)_t = 0;$$

4)
$$\mathbf{P}_\theta\text{-}\lim_{t\to\infty}\left\{\int_0^1\left|\varphi_t(\theta)\left(\frac{f^{t,u}}{1-\lambda^{t,u}\Delta\nu(\theta)} - \frac{f}{1-\Delta\nu(\theta)}\right)\right|^2 du(1-\Delta\nu(\theta)) \circ \nu(\theta)_t \right. +$$

$$+ \int_0^1\left|\varphi_t(\theta)\left(\frac{l^{t,u}}{1-\lambda^{t,u}\Delta\nu(\theta)} - \frac{l}{1-\Delta\nu(\theta)}\right)\right|^2 du(1-\Delta\nu(\theta)) \circ \nu(\theta)_t +$$

$$+ \int_0^1\left|\varphi_t(\theta)\left(f^{t,u} - f + \frac{l^{t,u}-l}{1-\Delta\nu(\theta)}\Delta\nu(\theta) I(\Delta\nu(\theta)<1)\right)\right|^2 du(1-\Delta\nu(\theta)) \circ \nu(\theta)_t +$$

$$\left. + \sum_{s\le t}\int_0^1\left|\varphi_t(\theta) l_s^{t,u}\frac{1-\lambda_s^{t,u}}{1-\lambda_s^{t,u}\Delta\nu_s(\theta)}\right|^2 du(\Delta\nu_s(\theta))^2 I(\Delta\nu_s(\theta)<1)\right\} = 0.$$

Тогда справедливо следующее разложение:

$$\Lambda(\theta_t,\theta) = u_t'(\eta^t + \zeta^t) - \frac{1}{2}u_t'(I_k + \rho^t)u_t, \tag{13}$$

где $u_t = \varphi_t^{-1}(\theta)\Delta_t$, η^t — *векторный* k-*мерный случайный процесс вида*

$$\eta^t = \varphi_t(\theta)\frac{l}{1-\Delta\nu(\theta)} I(\Delta\nu(\theta)<1) * (\xi - \nu(\theta)) \in \mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}(F, \mathbf{P}_\theta), \tag{14}$$

$$\mathcal{L}(\eta_t^t \mid \mathbf{P}_\theta) \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0, I_k), \qquad t \to \infty, \tag{15}$$

ξ^t — *векторный* k-*мерный случайный процесс, а* ρ^t — *матричнозначный порядка* $k \times k$ *случайный процесс такие, что*

$$\mathbf{P}_\theta\text{-}\lim_{t\to\infty}|\xi_t^t| = 0, \qquad \mathbf{P}_\theta\text{-}\lim_{t\to\infty}|\rho_t^t| = 0. \tag{16}$$

Здесь $\mathcal{L}\left(\eta_t^t \mid \mathbf{P}_\theta\right)$ *— закон распределения* η_t^t *относительно меры* $\mathbf{P}_\theta$, $\mathcal{N}(a, B)$ *— нормальный закон с вектором средних* a *и корреляционной матрицей* B, а $\xrightarrow{w}$ *означает слабую сходимость вероятностных законов.*

Доказательство. В силу условия 1 и соотношения (12) имеем

$$\ln \lambda(\theta_t, \theta) = \Delta_t' \int_0^1 f^{t, v} dv, \tag{17}$$

$$\Delta\nu(\theta_t) - \Delta\nu(\theta) = \lambda(\theta_t, \theta)\Delta\nu(\theta) - \Delta\nu(\theta) = \Delta_t' \int_0^1 f^{t, u} dv \Delta\nu(\theta). \tag{18}$$

Из равенств (9), (17) и (18) получаем

$$m(\theta_t, \theta) = \Delta_t' \int_0^1 \left(f^{t, v} + \frac{l^{t, v}\Delta\nu(\theta)}{1 - \Delta\nu(\theta)} I(\Delta\nu(\theta) < 1) \right) dv * (\xi - \nu(\theta)) +$$

$$+ \Delta_t' \int_0^1 l^{t, v} \left(\frac{\Delta\nu(\theta)}{1 - \Delta\nu(\theta)} - \frac{\Delta\nu(\theta)}{1 - \lambda^{t, v}\Delta\nu(\theta)} \right) dv * (p(\theta) - q(\theta)) = u_t'\left(\eta^t + \zeta^t\right), \tag{19}$$

где η^t — процесс вида (14), а процесс ξ^t допускает представление

$$\zeta^t = \overline{\zeta}^t + \tilde{\zeta}^t, \tag{20}$$

$$\overline{\zeta}^t = \varphi_t(\theta) \int_0^1 \left[f^{t, v} - f + \frac{l^{t, v} - l}{1 - \Delta\nu(\theta)} \Delta\nu(\theta) I(\Delta\nu(\theta) < 1) \right] dv * (\xi - \nu(\theta)), \tag{21}$$

$$\tilde{\zeta}^t = \varphi_t(\theta) \int_0^1 l^{t, v} \frac{1 - \lambda^{t, v}}{1 - \lambda^{t, v}\Delta\nu(\theta)} dv \frac{(\Delta\nu(\theta))^2}{1 - \Delta\nu(\theta)} * (p(\theta) - q(\theta)). \tag{22}$$

Нетрудно показать, что матрица взаимных квадратических характеристик компонент вектора η^t имеет вид

$$\left\langle \eta^t, \eta^t \right\rangle = \varphi_t(\theta) \frac{ll'}{1 - \Delta\nu(\theta)} I(\Delta\nu(\theta) < 1) \circ \nu(\theta) \varphi_t(\theta). \tag{23}$$

В силу условий 2 и 3 и центральной предельной теоремы для локально квадратично интегрируемых мартингалов ([17], теорема 5.5.4), учитывая (23), получаем соотношение (15).

Далее, в силу условия 1 из (21) имеем $\overline{\zeta}^t \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^2(F, \mathbf{P}_\theta)$, причем

$$\left\langle \overline{\zeta}^t, \overline{\zeta}^t \right\rangle = \varphi_t(\theta) U U' (1 - \Delta\nu(\theta)) \circ \nu(\theta) \varphi_t(\theta),$$

где

$$U = \int_0^1 \left[f^{t, v} - f + \frac{l^{t, v} - l}{1 - \Delta\nu(\theta)} \nu(\theta) I(\Delta\nu(\theta) < 1) \right] dv.$$

Отсюда, учитывая неравенство Дуба, имеем

$$\mathbf{P}_\theta \left\{ \left| \zeta_t^t \right| > \varepsilon \right\} \le \frac{\delta}{\varepsilon^2} + \mathbf{P}_\theta \left\{ \left| \left\langle \overline{\zeta}^t, \overline{\zeta}^t \right\rangle_t \right| > \delta \right\},$$

и оценку

$$\left| \left\langle \overline{\zeta}^t, \overline{\zeta}^t \right\rangle \right| \le \left| \varphi_t(\theta) U \right|^2 (1 - \Delta\nu(\theta)) \circ \nu(\theta),$$

в силу условия 4 получаем

$$\mathbf{P}_\theta\text{ - }\lim_{t\to\infty}\left|\bar{\zeta}_t^t\right| = 0. \tag{24}$$

Учитывая условие 5 леммы 4, из (22) имеем

$$\tilde{\zeta}^t = \varphi_t(\theta)\int_0^1 l^{t,v}\frac{1-\lambda^{t,v}}{1-\lambda^{t,v}\Delta\nu(\theta)}dv\frac{(\Delta\nu(\theta))^2}{1-\Delta\nu(\theta)}\circ p(\theta) -$$

$$-\varphi_t(\theta)\int_0^1 l^{t,v}\frac{1-\lambda^{t,v}}{1-\lambda^{t,v}\Delta\nu(\theta)}dv\frac{(\Delta\nu(\theta))^2}{1-\Delta\nu(\theta)}\circ q(\theta) = \tilde{\zeta}^{t,1}-\tilde{\zeta}^{t,2}, \tag{25}$$

где согласно условию 1

$$\tilde{\zeta}^{t,2} = \varphi_t(\theta)\int_0^1\int_0^v l^{t,v}\frac{\left(l^{t,u}\right)'}{\left(1-l^{t,u}\Delta\nu(\theta)\right)^2}dudv(\Delta\nu(\theta))^2\circ q(\theta).$$

Отсюда и из (25), в силу условия 4, применяя неравенство Ленгляра [17], получаем

$$\mathbf{P}_\theta\text{ - }\lim_{t\to\infty}\left|\tilde{\zeta}_t^t\right| = 0. \tag{26}$$

Из (20)–(22), (24) и (26) вытекает первое соотношение в (16).

Согласно условию 1, учитывая равенство (11), легко получаем

$$A(\theta_t,\theta) = \Delta_t'\int_0^1 f^{t,u}\frac{\lambda^{t,u}-1}{1-\lambda^{t,u}\Delta\nu(\theta)}du\,I(\Delta\nu(\theta)<1)\circ\nu(\theta) =.$$

$$= \Delta_t'\int_0^1 f^{t,u}\int_0^u\frac{\left(l^{t,v}\right)'}{\left(1-\lambda^{t,v}\Delta\nu(\theta)\right)^2}dvdu(1-\Delta\nu(\theta))\circ\nu(\theta)\Delta_t = 2^{-1}u_t'\left(I_k+\rho^t\right)u_t, \tag{27}$$

где ρ^t — матричный процесс, допускающий представление

$$\rho_t^t = \rho_t^{(1)} + 2(\rho_t^{(2)} + \rho_t^{(3)} + \rho_t^{(4)}), \tag{28}$$

$$\rho_t^{(1)} = \varphi_t(\theta)\frac{ll'}{1-\Delta\nu(\theta)}I(\Delta\nu(\theta)<1)\circ\nu(\theta)_t\varphi_t(\theta) - I_k,$$

$$\rho_t^{(2)} = \varphi_t(\theta)\int_0^1\int_0^u\left(\frac{f^{t,u}}{1-\lambda^{t,u}\Delta\nu(\theta)}-\frac{f}{1-\Delta\nu(\theta)}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{l^{t,v}}{1-\lambda^{t,v}\Delta\nu(\theta)}-\frac{l}{1-\Delta\nu(\theta)}\right)'dudv(1-\Delta\nu(\theta))\circ\nu_t(\theta)_t\varphi_t(\theta),$$

$$\rho_t^{(3)} = \varphi_t(\theta)\int_0^1\int_0^u\left(\frac{f^{t,u}}{1-\lambda^{t,u}\Delta\nu(\theta)}-\frac{f}{1-\Delta\nu(\theta)}\right)l'dudvI(\Delta\nu(\theta)<1)\circ\nu(\theta)_t\varphi_t(\theta),$$

$$\rho_t^{(4)} = \varphi_t(\theta)\int_0^1\int_0^u l\left(\frac{l^{t,v}}{1-\lambda^{t,v}\Delta\nu(\theta)}-\frac{f}{1-\Delta\nu(\theta)}\right)'dudvI(\Delta\nu(\theta)<1)\circ\nu(\theta)_t\varphi_t(\theta).$$

Здесь для определенности полагаем $0/0=0$. Из соотношений (27) и (28), учитывая оценки

$$\left|\rho_t^{(2)}\right|^2 \le \int_0^1\left|\varphi_t(\theta)\left(\frac{f^{t,u}}{1-\lambda^{t,u}\Delta\nu(\theta)}-\frac{f}{1-\Delta\nu(\theta)}\right)\right|^2du(1-\Delta\nu(\theta))\circ\nu(\theta)_t\times$$

$$\times \int_0^1 \left| \varphi_t(\theta) \left(\frac{l^{t,v}}{1-\lambda^{t,v}\Delta\nu(\theta)} - \frac{l}{1-\Delta\nu(\theta)} \right) \right|^2 dv (1-\Delta\nu(\theta)) \circ \nu(\theta)_t,$$

$$\left|\rho_t^{(3)}\right|^2 \le \int_0^1 \left| \varphi_t(\theta) \left(\frac{f^{t,u}}{1-\lambda^{t,u}\Delta\nu(\theta)} - \frac{f}{1-\Delta\nu(\theta)} \right) \right|^2 du (1-\Delta\nu(\theta)) \circ \nu(\theta)_t \times$$

$$\times \frac{|\varphi_t(\theta)\, l|^2}{1-\Delta\nu(\theta)} I(\Delta\nu(\theta) < 1) \circ \nu(\theta)_t,$$

$$\left|\rho_t^{(4)}\right|^2 \le \int_0^1 \left| \varphi_t(\theta) \left(\frac{l^{t,v}}{1-\lambda^{t,v}\Delta\nu(\theta)} - \frac{l}{1-\Delta\nu(\theta)} \right) \right|^2 dv (1-\Delta\nu(\theta)) \circ \nu(\theta)_t \times$$

$$\times \frac{|\varphi_t(\theta)\, l|^2}{1-\Delta\nu(\theta)} I(\Delta\nu(\theta) < 1) \circ \nu(\theta)_t,$$

в силу условий 2 и 4 получаем второе соотношение (16).

Таким образом, объединяя (8)–(10), (19) и (27), получаем разложение (13), в котором справедливы соотношения (14)–(16).

***Замечание* 4.** Асимптотическое разложение (13)–(16) позволяет применить общую теорию асимптотического различения двух гипотез, которым соответствуют меры $\mathbf{P}_\theta^t$ и $\mathbf{P}_{\theta_t}^t$ (см. [5], § 2.6).

Пусть $\theta_t = \theta + \varphi_t(\theta)$, где $\varphi_t(\theta)$ — матрица из условия 2 теоремы 1, $\theta \in \Theta$ — фиксированная точка, а $u \in \Theta_{t,\theta} = \varphi_t^{-1}(\theta)(\Theta - \theta)$. Случайная функция $Z_{t,\theta}(u) = z_\theta(\theta + \varphi_t(\theta)u, \theta)$ называется нормированным отношением правдоподобия. Заметим, что представление (13)–(16) в случае $\theta_t = \theta + \varphi_t(\theta)u$ и известно как локальная асимптотическая нормальность (ЛАН) семейства вероятностных мер $\left\{\mathbf{P}_\theta^t, \theta \in \Theta\right\}$ в точке θ в при $t \to \infty$ [2].

4. Свойства нормированного отношения правдоподобия. Всюду ниже будем считать, что условия 1–5 из лемм 2 и 4 выполняются для всех $y, \theta \in \Theta$. Нам потребуется следующая лемма ([19], лемма 1.3.12, предположение 1.3.14; [17], теорема 1.6.1, следствие из нее, задача 1.6.3).

Лемма 5. *Для любого предсказуемого процесса* $A = (A_t)_{t \ge 0}$ *из класса* $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}^+(F, \mathbf{P}_\theta)$ *справедливо равенство*

$$\mathbf{E}_\theta z_-(y, \theta) \circ A_t = \mathbf{E}_y A_t, \qquad t \in R_+. \tag{29}$$

Теорема 2. *Пусть множество* Θ *выпукло,* $K \subset \Theta$ *— некоторый компакт и выполняются следующие условия:*

1) $\lambda^{1/2}(y, \theta) \in C_1^0(\Theta)$ *как функция переменной* y *при фиксированных остальных переменных;*

2) *существуют постоянные* $a = a(K) \ge 0$ *и* $B = B(K) > 0$, *вообще говоря, зависящие от компакта* K, *такие, что для всех* $N > 0$ *и* $t \in R_+$

$$\sup_{\theta \in K} \sup_{\substack{u, v \in \Theta_{t,\theta} \\ |u|, |v| \le N}} \mathbf{E}_{\theta_t(u)} \Big\{ |\varphi_t(\theta) n(\theta_t(v), \theta_t(u))|^2 \circ \nu(\theta_t(u))_t +$$

$$+ \sum_{0 < s \le t} \frac{|\varphi_t(\theta)\, l_s(\theta_t(v), \theta_t(u)) \Delta\nu_s(\theta_t(u))|^2}{1 - \Delta\nu_s(\theta_t(u))} I(\Delta\nu_s(\theta) < 1) \Big\} \le B\left(1 + N^a\right),$$

где

$$\theta_t(v) = \theta + \varphi_t(\theta) v, \qquad n(y, \theta) = l(y, \theta) \lambda^{-1/2}(y, \theta).$$

Тогда при некоторых постоянных $\tilde{a} = \tilde{a}(K) \geq 0$ *и* $\tilde{B} = \tilde{B}(K) > 0$ *для всех* $N > 0$ *и* $t \in R_+$

$$\sup_{\theta \in K} \sup_{\substack{u, v \in \Theta_{t,\theta} \\ |u|, |v| \leq N}} |u-v|^{-2} \mathbf{E}_\theta \left| Z_{t,\theta}^{1/2}(u) - Z_{t,\theta}^{1/2}(v) \right|^2 \leq \tilde{B}\left(1 + N^{\tilde{a}}\right). \tag{30}$$

Доказательство. Очевидно, имеет место равенство

$$\mathbf{E}_\theta \left| Z_{t,\theta}^{1/2}(u) - Z_{t,\theta}^{1/2}(v) \right|^2 = 2\left(1 - \mathbf{E}_Q Y_t\right), \tag{31}$$

где

$$Y_t = Y_t(1/2; x, y), \qquad x = \theta_t(u), \qquad y = \theta_t(v), \quad \mathbf{Q} = \mathbf{P}_\theta.$$

В силу замечания 1 имеем

$$\mathbf{E}_\theta Y_t = 1 - \mathbf{E}_\theta Y_- \circ h(x, y)_t, \tag{32}$$

где согласно лемме 3

$$h(x, y) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\lambda(x, y)} - 1\right)^2 \circ \nu(y) + \frac{1}{2} \sum_{s \leq \cdot} \left(\sqrt{1 - \Delta\nu_s(x)} - \sqrt{1 - \Delta\nu_s(y)}\right)^2. \tag{33}$$

Поскольку $Y_t = \left(z_t(x, \theta) z_t(y, \theta)\right)^{1/2}$, то, применяя сначала неравенство Коши – Буняковского, а затем используя равенство (29), получаем

$$\mathbf{E}_\theta Y_- \circ h(x, y)_t \leq \left(\mathbf{E}_\theta z_-(x, \theta) \circ h(x, y)_t \mathbf{E}_\theta z_-(y, \theta) \circ h(x, y)_t\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\mathbf{E}_x h_t(x, y) \mathbf{E}_y h_t(x, y)\right)^{1/2}. \tag{34}$$

Заметим, что в силу (33) справедливо равенство

$$\mathbf{E}_x h_t(x, y) = \mathbf{E}_x h_t(y, x). \tag{35}$$

Из равенства (33), учитывая условие 1, получаем оценку

$$\mathbf{E}_x h_t(y, x) \leq \frac{1}{8} |u - v|^2 \left\{ \int_0^1 \mathbf{E}_x \left| \varphi_t(\theta) n\left(y_{u,x}, x\right) \right|^2 \circ \nu(x)_t \, du \; + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 \mathbf{E}_y \sum_{0 < s \leq t} \frac{\left| \varphi_t(\theta) l_s\left(y_{u,x}, x\right) \Delta\nu_s(x) \right|^2}{1 - \Delta\nu_s\left(y_{u,x}\right)} I(\Delta\nu_s(\theta) < 1) \, du \right\}, \tag{36}$$

где $y_{s,x} = x + s(y - x) = \theta_t(sv + (1-s)u)$. Объединяя равенства (31) и (32), оценки (34) и (36), учитывая (35) и выпуклость множества Θ, в силу условия 2 получаем равенство (30).

Замечание 5. Из равенств (31) и (32) и оценки (34) следует, что условия справедливости неравенства (30) можно сформулировать в терминах процесса Хеллингера порядка $1/2$.

Для формулировки следующей теоремы введем экспоненту Долеан $\mathcal{E}(G) = (\mathcal{E}_t(G))_{t \geq 0}$ для процессов $G \in \mathcal{V}_{\text{loc}}(F, \mathbf{P})$ с помощью формулы

$$\mathcal{E}_t(G) = e^{G_t} \prod_{0 < s \leq t} (1 + \Delta G_s) e^{-\Delta G_s}. \tag{37}$$

Следующая теорема дает равномерную оценку сверху для интеграла Хеллингера $H_t(1/2; \theta + \varphi_t(\theta)u, \theta) = \mathbf{E}_\theta Z_{t,\theta}^{1/2}(u)$.

Теорема 3. *Пусть множество* Θ *ограничено и выполняется следующее условие с некоторым компактом* $K \in \Theta$:

h) *для некоторых положительных постоянных* b_1, b_2, b_3 *и некоторой функции* χ_t *такой, что* $\chi_t \to \infty$ *при* $t \to \infty$, *существуют множества* $D_t(y,\theta) \in \mathcal{F}_t$ *для всех* $y, \theta \in \Theta$ *и* $t \in R_+$ *такие, что*

$$\inf\left\{|u|^{-2}\overline{h}_t(\theta_t(u),\theta);\quad \theta\in K,\ u\in\Theta_{t,\theta},\ |u|\le\chi_t\right\} \ge c_1 > 0, \tag{38}$$

$$\inf\left\{\left|\varphi_t^{-1}(\theta)\right|^{-b_1}\overline{h}_t(\theta_t(u),\theta);\quad \theta\in K,\ u\in\Theta_{t,\theta},\ |u|>\chi_t\right\} \ge c_2 > 0, \tag{39}$$

$$\inf\left\{-|u|^{-b_2}\ln\mathbf{P}_\theta\left(D_t^c(\theta_t(u),\theta)\right);\quad \theta\in K,\ u\in\Theta_{t,\theta},\ |u|\le\chi_t\right\} \ge c_3 > 0, \tag{40}$$

$$\inf\left\{-|u|^{-b_3}\ln\mathbf{P}_\theta\left(D_t^c(\theta_t(u),\theta)\right);\quad \theta\in K,\ u\in\Theta_{t,\theta},\ |u|>\chi_t\right\} \ge c_4 > 0, \tag{41}$$

где $\theta_t(u) = \theta + \varphi_t(\theta)u$, *постоянные* c_1, c_2, c_3 *и* c_4 *зависят, вообще говоря, от компакта* K, $D_t^c(y,\theta) = \Omega \setminus D_t(y,\theta)$ *и*

$$\overline{h}_t(y,\theta) = \inf\{-\ln\mathcal{E}_t(-h(y,\theta));\ \omega\in D_t(y,\theta)\}, \tag{42}$$

а $\mathcal{E}_t(G)$ — *экспонента Долеан вида* (37).

Тогда для любого $N > 0$ *существует постоянная* $t_0 = t_0(N,K) \in R_+$, *зависящая от* N *и* K *и такая, что*

$$\sup\left\{|u|^N\mathbf{E}_\theta Z_{t,\theta}^{1/2}(u);\quad \theta\in K,\ u\in\Theta_{t,\theta}, t\ge t_0\right\} < \infty. \tag{43}$$

Доказательство. Полагая $y = \theta + \varphi_t(\theta)u$ и используя предложение 5.4.16 [19] при $\mathbf{P} = \mathbf{P}_y$, $\mathbf{P}' = \mathbf{P}_\theta$ и $\alpha = 1/2$, получаем следующее мультипликативное разложение:

$$Z_{t,\theta}^{1/2}(u) = N_{t,\theta}(u)\mathcal{E}_t(-h(y,\theta)), \tag{44}$$

где $N_{t,\theta}(u)$ — $\mathbf{Q}$-локальный неотрицательный мартингал с $\mathbf{E}_\theta N_{t,\theta}(u) \le 1$.

Применяя неравенство Коши – Буняковского и учитывая равенство $\mathbf{E}_\theta Z_{t,\theta}(u) = 1$, имеем

$$\mathbf{E}_\theta Z_{t,\theta}^{1/2}(u) = \mathbf{E}_\theta I(D_t(y,\theta))Z_{t,\theta}^{1/2}(u) + \mathbf{E}_\theta I\left(D_t^c(y,\theta)\right)Z_{t,\theta}^{1/2}(u) \le$$

$$\le \mathbf{E}_\theta I(D_t(y,\theta))Z_{t,\theta}^{1/2}(u) + \left(\mathbf{P}_\theta\left(D_t^c(y,\theta)\right)\right)^{1/2}. \tag{45}$$

Поскольку $\mathbf{E}_\theta N_{t,\theta}(u) \le 1$, то согласно (42) и (44) получаем

$$\mathbf{E}_\theta I(D_t(y,\theta))Z_{t,\theta}^{1/2}(u) = \mathbf{E}_\theta I(D_t(y,\theta))N_{t,\theta}(u)\mathcal{E}_t(-h(y,\theta)) \le$$

$$\le e^{-\overline{h}_t(y,\theta)}\mathbf{E}_\theta I(D_t(y,\theta))N_{t,\theta}(u) \le e^{-\overline{h}_t(y,\theta)}. \tag{46}$$

Объединяя (45) и (46), получаем оценку

$$\mathbf{E}_\theta Z_{t,\theta}^{1/2}(u) \le e^{-\overline{h}_t(y,\theta)} + \left(\mathbf{P}_\theta\left(D_t^c(y,\theta)\right)\right)^{1/2}. \tag{47}$$

Так как множество Θ ограничено, то $|u| \le c\left|\varphi_t^{-1}(\theta)\right|$, где c — некоторая постоянная. Таким образом, в силу условия (39)

$$\overline{h}_t(y,\theta) \ge c_2\left|\varphi_t^{-1}(\theta)\right|^{b_1} \ge c_2c^{-1}|u|^{b_1}$$

для всех $\theta \in K$, $u \in \Theta_{t,\theta}$ и $|u| > \chi_t$. Отсюда и из условия (38) получаем

$$\exp\left(-\overline{h}_t(y,\theta)\right) \le \exp\left(-C\left(|u|^2\wedge|u|^{b_1}\right)\right), \tag{48}$$

где C — некоторая положительная постоянная и $a \wedge b$ — минимум из двух чисел a и b.

Используя элементарное неравенство $\ln(x+y) \le \ln 2 + \ln(x) \vee \ln(y)$, где $a \vee b$ — максимум из чисел a и b, в силу условий (40) и (41) из оценок (47) и (48) выводим искомое соотношение (43).

***Замечание* 6.** Используя лемму 3, можно, как и в теоремах 1 и 2, получить достаточные условия справедливости соотношения (43) в терминах процессов $\lambda(y, \theta)$ и компенсаторов $\nu(y)$ и $\nu(\theta)$.

***Замечание* 7.** Теорема 1 при $\theta_t = \theta + \varphi_t(\theta)$ и теоремы 2 и 3 позволяют исследовать асимптотические свойства байесовских оценок и оценок максимального правдоподобия неизвестных параметров θ, используя общую теорию асимптотического оценивания [2, 5].

1. *Le Cam L.* Locally asymptotically normal families of distributions // Univ. Calif. Publ. Statist. – 1960. – **3**, № 2. – P. 37–98.
2. *Ибрагимов И. А., Хасьминский П. З.* Асимптотическая теория оценивания. – М.: Наука, 1979. – 528 с.
3. *Джапаридзе К. О.* Оценка параметров и проверка гипотез в спектральном анализе стационарных временных рядов. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1981. – 264 с.
4. *Кутоянц Ю. А.* Оценивание параметров случайных процессов. – Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1980. – 254 с.
5. *Линьков Ю. Н.* Асимптотические методы статистики случайных процессов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 256 с.
6. *Тараскин А. Ф.* О поведении отношения правдоподобия семимартингалов // Теория вероятностей и ее применения. – 1984. – **29**, № 3. – С. 440–451.
7. *Ogata Y.* The asymptotic behaviour of maximum likelihood estimators for stationary point processes // Ann. Inst. Statist. Math. – 1978. – **30**, № 2. – P. 243–261.
8. *Линьков Ю. Н.* Асимптотическое различение считающих процессов // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 7. – С. 972–979.
9. *Lin'kov Yu. N.* Asymptotical properties of the local density of measures for counting processes // Evolutionary Stochastic Systems in Physics and Biology (Frontiers in Pure and Appl. Probab. Vol. 2). – Moscow: TVP, 1993. – P. 311–335.
10. *Lin'kov Yu. N.* Limit theorems for the local density of measures in the hypotheses testing problems of counting processes // Probab. Theory and Math. Statist.: Proc. Sixth Vilnius Gonf. (Vilnius, June 28 — July 3, 1993).– Vilnius: TEV/Utrecht: VSP, 1994. – P. 497–515.
11. *Lin'kov Yu. N.* Limit theorems for the local density of measures of counting processes and some statistical applications // New Trends in Probability and Statistics: Proc. Second Ukr.-Hung. Conf. (Mukachevo, Sept. 28 – Oct. 2, 1992). – Kiev: TBiMC, 1995. – P. 143–161.
12. *Линьков Ю. Н., Мунир аль Шахф.* Асимптотическое различение процессов восстановления // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 10. – С. 1382–1388.
13. *Lin'kov Yu. N., Diallo M. S.* Les proprietes asymptotiques de la densite locale des mesures pour les processus a accroissements independants. – Donietsk, 1993. – 32 p. – (Prepublication Inst. Math. Appl. et Mecanique, 93.06).
14. *Lin'kov Yu. N., Shevlyakov Yu. A.* Properties of the likelihood ratio for processes with indendent increaments // Random Oper. and Stochast. Equat. – 1997. – **5**, № 3. – P. 237–252.
15. *Линьков Ю.Н., Шевляков Ю. А.* Свойства отношения правдоподобия для семимартингалов с детерминированными триплетами в параметрическом случае // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 9. – С. 1172–1180.
16. *Николаева О. А.* Семимартингальные разложения логарифма отношения правдоподобия для считающих процессов // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 1999. – **4**. – С. 120–126.
17. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Теория мартингалов. – М.: Наука, 1986. – 512 с.
18. *Jacod J.* Calcul stochastique et problemes de martingales // Lect. Notes Math. – 1979. – **714**. – P. 1–539.
19. *Jacod J., Shiryaev A. N.* Limit theorems for stochastic processes. – Berlin: Springer, 1987. – 601 p.
20. *Василенко О. А.* Большие уклонения в задаче различения считающих процессов // Сучасні фізико-математичні досягнення молодих науковців вузів України: Зб. наук. праць. – Київ: Київ. нац. ун-т, 1995. – С. 13–19.

Получено 01.06.2000