УДК 519.21

А. М. Кулик, А. Ю. Пилипенко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГЛАДКИХ МЕР НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

We investigate properties of an image of differentiable measure on an infinitely-dimensional Banach space under nonlinear transformations of the space. We prove the general result on the absolute continuity of this image with respect to the initial measure and obtain density formula similar to the Ramer – Kusuoka formula for the transformations of the Gaussian measure. We prove the absolute continuity of the image for classes of transformations which possess additional structural properties, namely, for adapted and monotone transformations, as well as for transformations generated by a differential flow. The latter are applied to realize the method of characteristics of solving infinite-dimensional first order partial differential equations and linear equations with an extended stochastic integral with respect to the given measure.

Досліджуються властивості образу диференційовної міри на нескінченновимірному банаховому просторі при нелінійних перетвореннях простору. Доведено загальний результат про абсолютну неперервність цього образу відносно вихідної міри, отримано формулу для щільності, аналогічну до формули Рамера – Кусуоки для перетворень гауссової міри. Доведено абсолютну неперервність образу для класів перетворень, які мають додаткові структурні властивості, а саме, узгоджених, монотонних, породжених диференціальним потоком. Останні застосовуються для реалізації методу характеристик розв'язання нескінченновимірних рівнянь з частинними похідними першого порядку та лінійних рівнянь із розширеним стохастичним інтегралом за даною мірою.

Введение. Вопрос об абсолютной непрерывности образа меры на бесконечномерном пространстве при нелинейных преобразованиях имеет богатую историю. К одним из первых результатов в этой области следует отнести результат И. И. Гихмана и А. В Скорохода о преобразовании мер на гильбертовом пространстве (см. [1], а также [2], гл. 5, теорема 3). Полученная в указанных работах формула для плотности в частном случае меры на конечномерном пространстве является непосредственным следствием обычной формулы замены переменных. Применение этой формулы для получения бесконечномерных результатов предполагает приближение исходного преобразования конечномерными и доказательство сходимости последовательности соответствующих плотностей.

В наиболее общей и компактной форме условия, обеспечивающие такую сходимость, получены для преобразований гауссовой меры (см. [3, 4] и обзорную работу [5]). Для негауссовых мер имеющиеся результаты значительно слабее и обычно требуют выполнения сильных дополнительных предположений относительно структуры меры или отображения [2, 6, 7]. Ощутимые сложности возникают уже при попытке записать условия квазиинвариантности дифференцируемой меры, близкие к необходимым [5].

В настоящей работе получены общие условия на преобразование пространства, достаточные для абсолютной непрерывности образа негауссовской дифференцируемой меры. Основное предположение относительно исходной меры (условие **B**, п.2) хотя и несколько ограничительно, но, с одной стороны, легко проверяемо и, с другой — обеспечивает выполнение моментных оценок, позволяющих сделать предельный переход и непосредственная проверка которых часто представляет значительные трудности.

Наряду с общими результатами получены результаты об абсолютной непрерывности образа меры для отображений, имеющих дополнительные структурные свойства, а именно, неупреждающих (негауссовский аналог теоремы Гирсанова), монотонных, порожденных дифференциальным потоком. Последние применяются для реализации метода характеристик решения уравнений в частных производных первого порядка в бесконечномерном пространстве и линейных уравнений с расширенным стохастическим интегралом по исходной мере.

1. Гладкие меры и соболевские классы отображений на бесконечномерных пространствах. Пусть X — вещественное сепарабельное банахово пространство

транство, H — сепарабельное гильбертово пространство, вложенное в X непрерывным оператором $j: H \hookrightarrow X$, μ — вероятностная мера на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(X)$, дифференцируемая вдоль направлений из jH [8]. Предполагаем, что логарифмическая производная $\{(\rho, h), h \in H\}$ меры μ имеет слабый порядок p для произвольного $p < +\infty$, т. е.

$$\forall p \in R^+ \ \exists C_p < +\infty : \int |(\rho, h)|^p d\mu \le C_p \|h\|_H^p, \qquad h \in H. \tag{1}$$

Определение 1. *Стохастической производной $D_{p,h}$ в направлении $h \in H$, где $p \in (1, +\infty)$, называется замыкание в пространстве $L_p(X, \mu)$ оператора*

$$\nabla_h : f \mapsto (\nabla f, jh),$$

определенного на множестве функций f, непрерывных и ограниченных вместе со своей производной Фреше ∇f. В силу дифференцируемости меры μ такое замыкание корректно определено [5].

Определение 2. *Функция $f \in L_p(X, \mu)$ принадлежит пространству Соболева $W_p^1(X, \mu)$, если:*

1) *для произвольного $h \in H$ определена производная $D_{p,h} f$;*
2) *существует случайный элемент $g_f \in L_p(X, H, \mu)$ такой, что*

$$D_{p,h} f = (g_f, h)_H \quad \text{п. н.}, \quad h \in H.$$

Элемент g_f называется стохастической производной функции f и обозначается $D_p f$. В тех случаях, когда это не будет вызывать недоразумений, будем опускать индекс p в выражениях $D_{p,h} f$ и $D_p f$.

Стохастические производные

$$D_{h,p}^E : L_p(X, E, \mu) \to L_p(X, E, \mu) \quad \text{и} \quad D_{h,p}^E : L_p(X, E, \mu) \to L_p(X, E \otimes H, \mu)$$

и пространства Соболева $W_p^1(X, E, \mu)$ для элементов, принимающих значения в сепарабельном гильбертовом пространстве E, определяются аналогично. Кратные стохастические производные и пространства Соболева более высоких степеней $W_p^n(X, E, \mu)$ определяются итеративно.

Определение 3. *Сопряженный оператор*

$$I_p^E = \left(D_p^E\right)^* : L_q(X, E \otimes H, \mu) \to L_p(X, E, \mu), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

называется оператором стохастического интегрирования или расширенным стохастическим интегралом по аналогии с расширенным стохастическим интегралом Скорохода по винеровскому процессу.

В область определения оператора I_p^E входят, в частности, элементы вида

$$g = \sum_{k=1}^{n} g_k \otimes h_k, \quad g_k \in W_{q'}^1(X, E, \mu), \quad h_k \in H, \quad k = \overline{1, n}, \quad q' > q. \tag{2}$$

Для таких элементов

$$I_p^E(g) = -\sum_{k=1}^{n} (\rho, h_k) g_k - \sum_{k=1}^{n} (D_{q'}^E g_k, h_k)_H. \tag{3}$$

В случае $E = \mathbb{R}$ будем писать $I_p^E = I_p$.

Определение 4. *Функция $f \in L_\infty(X, E, \mu)$ принадлежит классу $W_\infty^k(X, E, \mu)$, $k \ge 1$, если:*

1) $f \in \bigcap_p W_p^k(X, E, \mu)$;

2) *функции* $f, Df, \ldots, D^k f$ *представляют собой существенно ограниченные случайные элементы со значениями в* E, $E \otimes H, \ldots, E \otimes H^{\otimes k}$ *соответственно.*

Определение 5. *Функция* f *принадлежит классу* $WL_\infty^k(X, E, \mu)$, *если* $f \in W_\infty^k(X, E, \mu)$ *и для* $l = 0, \ldots, k-1$ *существует модификация* $\widetilde{D^l f}$ *производной* $D^l f$, *липшицева вдоль* H, *т. е. такая, что*

$$\left\| \widetilde{D^l f}(x) - \widetilde{D^l f}(y) \right\|_{E \otimes H^{\otimes l}} \leq L_l \| x - y \|_H, \quad x, y \in X. \tag{4}$$

***Замечание* 1.** Функция, удовлетворяющая условию (4), принадлежит классу $W_\infty^k(X, E, \mu)$. Проверим это для $k = 1$. Зафиксируем $p \in \mathbb{R}^+$, $h \in H$ и покажем, что определена производная $D_{p,h} f$. Разложим пространство X в сумму $X = X_0 + \langle jh \rangle$. Такое разбиение индуцирует разложение $\mu = \pi_0 \otimes \{\mu_x, x \in X_0\}$, где π_0 — проекция меры μ на X_0, $\{\mu_x, x \in X_0\}$ — семейство условных мер, сосредоточенных на прямых $\{x + tjh, t \in \mathbb{R}\}$. Согласно одномерной теореме Радемахера [9], для π_0-п. в. $x \in X_0$ определена производная $D_{p,h}^x f$ сечения $f|_{x+\langle jh \rangle}$, μ_x-п. н. ограниченная по норме $\|\cdot\|_E$ константой $L_0 \|h\|_H$. Отсюда получаем, что производная $D_{p,h} f$ определена и п. н. ограничена по норме константой $L_0 \|h\|_H$. Тогда [10] условие 2 определения 2 выполнено, т. е. определена стохастическая производная $D_p^E f$ и $\left\| D_p^E f \right\|_{E \otimes H} \leq L_0$ п. н. Повторяя это рассуждение, получаем справедливость требуемого утверждения для $k \in \mathbb{N}$.

Справедлива ли в общем случае обратная импликация, т. е. совпадают ли классы W_∞^k и WL_∞^k, авторам неизвестно. В некоторых частных случаях можно применить следующее рассуждение: для $f \in W_\infty^k$ построить последовательность $\{f_n\}$ гладких цилиндрических функций, производные которых п. н. ограничены теми же константами, что и соответствующие производные f так, чтобы $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{} f$ в W_p^k, $p \geq 1$, а затем положить $\widetilde{D^l f}(x) = \lim_{n \to \infty} D^l f_n(x)$.

Такой метод доказательства равенства $W_\infty^k = WL_\infty^k$ в важном частном случае гауссовой меры μ был реализован в [11], в этой ситуации $\{f_n\}$ можно выбрать как последовательность проекций на конечномерные линейные σ-алгебры. Аналогичный результат справедлив для мер, близких в некотором смысле к продакт-мерам [12]. Для логарифмически выпуклых мер равенство $W_\infty^k = WL_\infty^k$ можно доказать с помощью рассуждений, аналогичных доказательству леммы 5 [13].

***Замечание* 2.** Рассуждения, аналогичные доказательству леммы 3, гл.2 в [2], показывают, что для производной функции $f \in W_\infty^k(X, E, \mu)$ и произвольного базиса $\{e_n\}$ в H существуют модификации $\{\widetilde{\widetilde{D^l f}}, l = 0, \ldots, k-1\}$, липшицевы вдоль $\tilde{H}$ — линейной оболочки $\{e_n\}$ с константами $\{\operatorname{ess\,sup} \|D^{l+1} f\|$, $l = 0, \ldots, k-1\}$ соответственно. Если выполнено условие (4), то модификации $\widetilde{D^l f}$ могут быть выбраны так, что

$$L_l = \operatorname{ess\,sup} \left\| D^{l+1} f \right\|, \quad l = 0, \ldots, k-1.$$

2. Общая формула замены переменных для гладких мер. Всюду далее предполагаем, что мера μ удовлетворяет следующему условию.

B. Для каждого $h \in H$ логарифмическая производная (ρ, h) лежит в $\bigcap_p W_p^1(X, \mu)$ и существует ограниченный случайный оператор [10], действующий в H, такой, что $\beta_\mu = \operatorname{ess\,sup} \|B\|_{\mathfrak{L}(H)} < +\infty$ и $Bh = -D(\rho, h)$ п. н., $h \in H$. Условие **B**, в частности, является достаточным для выполнения оценок (1).

Основным результатом данного пункта является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть отображение $F: X \to X$ имеет вид*

$$F(x) = x + j\Phi(x), \quad x \in X,$$

и функция Φ принадлежит классу $HC^1(X, H, \mu)$ функций из $W_\infty^1(X, H, \mu)$ таких, что для произвольного $x \in X$ функции

$$H \ni h \mapsto \Phi(x+h) \in H, \quad H \ni h \mapsto D\Phi(x+h) \in H^{\otimes 2}$$

непрерывны. Пусть также $\mu(\{x \,|\, \text{оператор } \mathbb{1}_H + D\Phi(x) \text{ необратим}\}) = 0$.

Тогда образ μ_F меры μ при отображении F абсолютно непрерывен относительно μ и

$$p_F(x) \equiv \frac{d\mu_F}{d\mu}(x) = \sum_{y \in F^{-1}(\{x\})} \left[J_F^\mu(y)\right]^{-1} \tag{5}$$

п. н. относительно пополнения меры μ, где

$$J_F^\mu(x) = \left|\det{}_2(\mathbb{1}_H + D\Phi(x))\right| \exp[-I(\Phi)(x) - \\ - \int_0^1 (1-\tau)(B(x+\tau\Phi(x))\Phi(x), \Phi(x))_H d\tau], \quad x \in X. \tag{6}$$

Здесь символ $\det_2$ обозначает определитель Карлемана – Фредгольма [14].

***Замечание* 3.** Стохастический интеграл $I(\Phi)$ для $\Phi \in W_\infty^1(X, H, \mu)$ корректно определен [15].

***Замечание* 4.** Для мер, для которых классы W_∞^k и WL_∞^k совпадают (например, продакт-мер или логарифмически выпуклых, в частности, гауссовских) достаточным условием на гладкость функции Φ является условие $\Phi \in W_\infty^2(X, H, \mu)$.

Доказательству теоремы предпошлем несколько вспомогательных результатов. Прежде всего отметим некоторые свойства определителя Карлемана – Фредгольма, которые будем использовать в дальнейшем.

Лемма 1 [14]. 1. *Функция*

$$T \mapsto \det(\mathbb{1}_H + T)\exp(-\operatorname{tr} T),$$

определенная на множестве $\mathcal{L}_{fin}(H)$ линейных непрерывных операторов в H, имеющих конечномерный образ, непрерывна на этом множестве по норме пространства $\mathfrak{L}_2(H)$ и имеет продолжение по непрерывности на все $\mathfrak{L}_2(H)$.

Это продолжение обозначается $\det_2(\mathbb{1}_H + \cdot)$.

2. *Для $T \in \mathfrak{L}_2(H)$ $\det_2(\mathbb{1}_H + T) = 0 \Leftrightarrow 0 \in \sigma(\mathbb{1}_H + T)$.*

3. *Функция $\det_2(I_H + \cdot)$ равномерно непрерывна и ограничена на каждом множестве вида $\{\|\cdot\|_{\mathfrak{L}_2} \le K\}$.*

4. *Для произвольного $\delta < 1$ функция $[\det_2(I_H + \cdot)]^{-1}$ равномерно непрерывна и ограничена на $\{\|\cdot\|_{\mathfrak{L}_2} \le \delta\}$.*

Общая схема доказательства теоремы 1 совпадает с предложенной S. Kusuoka схемой доказательства аналогичного утверждения для гауссовских мер, сводящейся [4, 16] к локальному представлению отображения F в виде композиции аффинного преобразования пространства X и отображения, мало отличающегося от тождественного. Первым шагом в реализации этой программы является следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $\Phi \in WL^1_\infty(X, H, \mu)$ *и*

$$\beta_1 \equiv \operatorname{ess\,sup} \| D\Phi \|_{\mathfrak{L}_2(H)} < 1.$$

Тогда:

1) $\mu_F \sim \mu$;

2) *существует измеримое отображение* $F^{-1} : X \to X$ *такое, что*

$$F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F = id_X \ \mu\text{-}п.\,н.,$$

при этом

$$p_F(x) = \left[J^\mu_F(F^{-1}(x)) \right]^{-1}, \quad x \in X;$$

3) *для произвольного* ε, $|\varepsilon| < \beta_1^{-1}$, *существует константа* C, *зависящая только от* ε, β_μ, β_1 *и* $\beta_0 = \operatorname{ess\,sup} \| \Phi \|_H$, *такая, что*

$$\mathrm{E} \exp \varepsilon I(\Phi) \le C.$$

***Замечание* 5.** Утверждение 1 теоремы 2 обеспечивает независимость значения выражения $\int_0^1 (1-\tau)(B(\cdot + \tau\Phi)\Phi, \Phi)\, d\tau$, а значит, и J^μ_F от выбора модификации случайного оператора B.

***Доказательство теоремы* 2.** Рассмотрим сначала случай $X = H = \mathbb{R}^n$. В этом случае $\mu \sim \lambda^n$, и стандартная теорема о замене переменных дает нам эквивалентность мер μ_F, λ^n и $\mu_{F^{-1}}$ (отображение F^{-1} существует в силу теоремы о сжимающем отображении). При этом

$$\frac{d\mu_{F^{-1}}}{d\mu}(x) = \left| \det(\mathbb{I}_H + D\Phi) \right| \exp[\, \ln p(F(x)) - \ln p(x) \,]. \tag{7}$$

Учитывая, что в данном случае $\rho = (\ln p)'$, $B = -(\ln p)''$, записывая для разности логарифмов в (7) формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и применяя затем равенство (3), получаем

$$\frac{d\mu_{F^{-1}}}{d\mu}(x) = J^\mu_F(x),$$

что и завершает доказательство утверждения 2 теоремы.

Для доказательства утверждения 3 отметим, что

$$\mathrm{E} \exp(\varepsilon I(\Phi)) = \mathrm{E} J^\mu_{id_X - \varepsilon\Phi} [\det{}_2(I - \varepsilon\nabla\Phi)]^{-1} \exp\{ \varepsilon^2 \int_0^1 (1-\tau) \times$$

$$\times (B(\cdot - \tau\varepsilon\Phi)\Phi, \Phi)\, d\tau \} \le \mathrm{E} \sup_{\|T\|_{\mathfrak{L}_2(H)} \le |\varepsilon/\beta_1|} [\det{}_2(\mathbb{I}_H + T)]^{-1} \exp\left\{ \frac{\varepsilon^2}{2} \beta_0 \cdot \beta_\mu \right\} =$$

$$= C(\varepsilon, \beta_0, \beta_1, \beta_\mu) < +\infty,$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь X — бесконечномерно, докажем утверждение 1 при дополнительном предположении, что существует конечномерное пространство $H_0 \subset \subset j^* X^*$ такое, что $\Phi(x) \subset H_0$. Разложим пространство X в прямую сумму

$X = X_0 + \left[(j^*)^{-1} H_0\right]^{\perp}$, $\dim X_0 < +\infty$. Это разложение порождает разложение меры μ:

$$\mu(d(x,y)) = \mu_y(dx)\,\pi(dy), \qquad (x,y)\in X,$$

где $\left\{\mu_y,\ y\in\left[(j^*)^{-1}H_0\right]^{\perp}\right\}$ и π — условные меры и образ меры μ при проектировании на $\left[(j^*)^{-1}H_0\right]^{\perp}$ соответственно. С другой стороны, поскольку $\Phi(X)\subset \subset H_0$, то отображение F можно представить в виде

$$F(x,y) = (x + j\varphi_y(x),\ y), \qquad (x,y)\in X,$$

причем для каждого y отображение φ_y удовлетворяет условию теоремы. В силу принципа сжимающих отображений для всех y существуют обратные отображения $(id_{X_0} + j\varphi_y)^{-1}$. Поскольку π-почти все условные меры $\{\mu_y\}$ удовлетворяют условию **B**, то для π-п. в. y

$$p_y(x) \equiv \frac{d\mu_y\circ(id_{x_0}+j\varphi_y)^{-1}}{d\mu_y}(x) = \left[J^{\mu_y}_{(id_{X_0}+j\varphi_y)}\big((id_{x_0}+j\varphi_y)^{-1}(x)\big)\right]^{-1}, \qquad x\in X_0,$$

что и доказывает требуемое утверждение.

Рассмотрим, наконец, общий случай. Выберем в H базис $\{h_k\}\subset j^*X^*$ и положим $P_n = \Pr_{\langle h_1,\dots,h_n\rangle}$, $F_n = id_X + jP_n\Phi$. В силу доказанного выше для произвольного $n\ge 1$ существует обратное отображение F_n^{-1}, $\mu_n \ll \mu$, $\mu_{F_n^{-1}} \ll \mu$ и

$$p_{F_n}(x) = \left[J^{\mu}_{F_n}\left(F_n^{-1}(x)\right)\right]^{-1}, \qquad p_{F_n^{-1}}(x) = J^{\mu}_{F_n}(x), \qquad x\in X.$$

По построению $\mu_n \Rightarrow \mu$, $n\to\infty$. Кроме того, в силу утверждения 3, уже доказанного для конечномерных отображений,

$$\mathrm{E}\left[p_{F_n}(x)\right]^2 = \mathrm{E}\left[J^{\mu}_{F_n}(x)\right]^{-2} J^{\mu}_{F_n}(x) = \mathrm{E}\left[J^{\mu}_{F_n}(x)\right]^{-1} \le C_1(\beta_0,\beta_1,\beta_\mu),$$

т. е. семейство $\{\,p_{F_n},\ n\ge 1\,\}$ равномерно интегрируемо. Теперь утверждение 1 следует из общего результата [1].

Теорема 3 [1]. *Пусть X — сепарабельное метрическое пространство, μ — вероятностная мера, заданная на борелевской σ-алгебре, $\{f_n\colon X\to X \mid n\ge 0\}$ — последовательность измеримых отображений. Предположим, что:*

а) *для любого $n\ge 1$ мера $\mu\circ(f_n)^{-1}$ абсолютно непрерывна относительно μ;*

б) *последовательность плотностей $\left\{d\mu\circ(f_n)^{-1}/d\mu\colon n\ge 1\right\}$ равномерно интегрируема;*

в) *f_n сходится к f_0 при $n\to\infty$ по мере μ.*

Тогда $\mu\circ(f_0)^{-1} \ll \mu$, и если последовательность $\left\{d\mu\circ(f_n)^{-1}/d\mu\right\}$ сходится к некоторой функции p, то

$$p = \left\{\frac{d\mu\circ(f_0)^{-1}}{d\mu}\right\}.$$

По построению, каждая из функций F_n^{-1} H-липшицева с константой $1/(1 - \beta_1)$ для всех $n\ge 1$, $\|F_n - F\|\to 0$, $n\to\infty$ п. н. и п. н. существует предел в H $\lim_{n\to\infty} F_n^{-1} \equiv F^{-1}$. Тогда

$$\left\| F \circ F^{-1} - id_X \right\|_H \le \varlimsup_{n\to\infty} \left\| F \circ F^{-1} - F_n \circ F^{-1} \right\|_H + \varlimsup_{n\to\infty} \left\| F_n \circ F^{-1} - F_n \circ F_n^{-1} \right\|_H \le$$

$$\le \varlimsup_{n\to\infty} \left\| F \circ F^{-1} - F_n \circ F^{-1} \right\|_H + \beta_1 \varlimsup_{n\to\infty} \left\| F^{-1} - F_n^{-1} \right\|_H = 0 \quad \text{п. н.}$$

в силу абсолютной непрерывности $\mu_{F^{-1}} \ll \mu$. Аналогично доказывается равенство $F^{-1} \circ F = id_X$ п. н. Для завершения доказательства нам осталось проверить, что

$$\int_0^1 (1-\tau)(B(\cdot + \tau\Phi_n)\Phi_n, \Phi_n)\, d\tau \to \int_0^1 (1-\tau)(B(\cdot + \tau\Phi)\Phi, \Phi)\, d\tau \quad \text{п.н.}$$

Эта сходимость обеспечивается следующим вспомогательным утверждением.

Лемма 2. *Пусть* X, Y — *полные сепарабельные метрические пространства с метриками* ρ_X, ρ_Y *соответственно,* μ — *вероятностная мера, заданная на борелевской* σ*-алгебре* $\mathcal{B}(X)$; $\varphi_n: X \to X$, $f_n: X \to Y$, $n \ge 0$ — *измеримые отображения. Предположим, что*:

i) $\varphi_n \xrightarrow{\mu} \varphi_0$, $n \to \infty$, $f_n \xrightarrow{\mu} f_0$, $n \to \infty$;

ii) *для каждого* $n \ge 1$ *мера* $\mu \circ \varphi_n^{-1}$ *абсолютно непрерывна относительно* μ;

iii) *последовательность плотностей* $\{d\mu \circ (\varphi_n)^{-1} / d\mu \colon n \ge 1\}$ *равномерно интегрируема.*

Тогда $f_n \circ \varphi_n \xrightarrow{\mu} f_0 \circ \varphi_0$, $n \to \infty$.

Доказательство. Без потери общности можно считать, что сходимости

$$f_n \to f_0, \quad n \to \infty, \quad \varphi_n \to \varphi_0, \quad n \to \infty,$$

имеют место μ-п. н. Кроме того, согласно теореме 3 $\mu \circ \varphi_0^{-1} \ll \mu$. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Используя теорему Улама и равномерную интегрируемость плотностей $\{d\mu \circ (\varphi_n)^{-1} / d\mu \colon n \ge 0\}$, выберем такой компакт $\tilde{K} \subset X$, что $\mu(X \setminus \tilde{K}) < \varepsilon$ и $\mu(\varphi_n \notin \tilde{K}) < \varepsilon$ для любого $n \ge 0$. Из теорем Улама, Лузина и Егорова следует существование такого компакта $K \subset \tilde{K}$, $\mu(X \setminus K) < 2\varepsilon$, что:

а) функция f_0 непрерывна на K;

б) имеет место равномерная сходимость на K:

$$f_n \overset{K}{\rightrightarrows} f_0, \quad n \to \infty, \quad \varphi_n \overset{K}{\rightrightarrows} \varphi_0, \quad n \to \infty.$$

Выберем такие $\delta > 0$ и $n_0 \in \mathbb{N}$, что

$$\forall x, y \in K, \quad \rho_X(x, y) < \delta \colon \rho_Y(f_0(x), f_0(y)) < \varepsilon;$$

$$\forall x \in K \quad \forall n \ge n_0 \colon \quad \rho_X(\varphi_n(x), \varphi_0(x)) < \delta, \quad \rho_Y(f_n(x), f_0(x)) < \varepsilon;$$

$$\forall n \ge n_0 \colon \quad \mu(\rho_X(\varphi_n, \varphi_0) \ge \delta) < \varepsilon.$$

Тогда при $n \ge n_0$

$$\mu(\rho_Y(f_n \circ \varphi_n, f_0 \circ \varphi_0) \ge 2\varepsilon) \le$$

$$\le \mu(f_n \notin K) + \mu(\varphi_0 \notin K) + \mu(\rho_X(\varphi_n, \varphi_0) \ge \delta) +$$

$$+ \mu(\varphi_n \in K, \varphi_0 \in K, \rho_X(\varphi_n, \varphi_0) < \delta, \rho_Y(f_n \circ \varphi_n, f_0 \circ \varphi_n) \ge \varepsilon) +$$

$$+ \mu(\varphi_n \in K, \varphi_0 \in K, \rho_X(\varphi_n, \varphi_0) < \delta, \rho_Y(f_0 \circ \varphi_n, f_0 \circ \varphi_0) \ge \varepsilon) \le 5\varepsilon,$$

что и доказывает лемму 2.

Следующим шагом в доказательстве теоремы 1 является аналог теоремы об обратной функции.

Зафиксируем в H ортонормированный базис (ОНБ) $\{e_n,\ n \ge 1\} \subset j^*X^*$, будем обозначать $H_n \equiv \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$.

Теорема 4. *Пусть* Φ *удовлетворяет условиям теоремы* 1. *Тогда существуют счетные семейства измеримых множеств* $\{V_i^\alpha\}$ *и функций* $\{\Psi_i^\alpha\colon V_i^\alpha \to H\}$, $\alpha = 1, 2, 3$, *таких, что* $V_i^{\alpha+1} = T_i^\alpha V_i^\alpha$, $\alpha = 1, 2$, $T_i^\alpha = id_{V_i^\alpha} + j\Psi_i^\alpha$, *причем:*

1) Ψ_i^3 *— детерминированные отображения со значениями в* H_{n_i}, $i \ge 1$;

2) *для каждого* $i \ge 1$ *существует* $D\Psi_i^1$ *— детерминированный элемент в* $\mathfrak{L}(H_{n_i}) \subset \mathfrak{L}_2(H)$, *при этом* $\det_2(\mathbb{I}_H + D\Psi_i^1) \ne 0$;

3) *отображение* T_i^2 *удовлетворяет на множестве* V_i^2 *условиям теоремы* 2;

4) $\bigcup_i V_i^1 = \{x \mid \det_2(\mathbb{I}_H + D\Phi(x)) \ne 0\}$ *и* $F_i \equiv F|_{V_i^1} = T_i^3 \circ T_i^2 \circ T_i^1$;

5) *функции* $(id_H + jP_{H_n}\Psi_i^2)$ *взаимно однозначны на* V_i^2, *множества* $V_i^{3,n} = (id_H + jP_{H_n}\Psi_i^2)$ *удовлетворяют условиям* $V_i^{3,\infty} \equiv \varliminf_{n\to\infty} V_i^{3,n} \supset V_i^3$ *и* $\|\kappa_i(x) - \kappa_i(x)\|_H \to 0$, $n \to \infty$, $x \in V_i^3$, *где*

$$(id_X + j\Psi_i^2)^{-1}(x) = id_X + j\kappa_i(x), \qquad x \in V_i^3,$$

и

$$(id_X + jP_{H_n}\Psi_i^2)^{-1}(x) = id_X + j\kappa_i^n(x), \qquad x \in V_i^{3,n}.$$

Утверждения 1–4 доказаны S. Kusuoka в [4] (см. также [16]). Никакие свойства меры (в цитированной работе — гауссовской) при этом не использовались. Справедливость утверждения 5 для семейств $\{V_i^\alpha\}$, $\{\Psi_i^\alpha\}$, построенных в [4], получаем непосредственным применением принципа сжимающих отображений.

Доказательство теоремы 2 состоит в локальном применении (к функциям $F_i = F|_{V_i^1}$) рассуждений теоремы 2. Для любых фиксированных $n \ge 1$, $i \ge 1$ образы меры $\mu|_{V_i^1}$ и $\mu|_{T_i^3 V_i^{3,n}}$ при отображениях $F_i^n \equiv T_i^3 \circ (id_X + jP_{H_n}\Psi_i^2) \circ T_i^1$ и $(F_i^n)^{-1}$ соответственно абсолютно непрерывны относительно меры μ и соответствующие плотности равны

$$\left[J^\mu_{F_i^n}((F_i^n)^{-1}(x))\right]^{-1}, x \in T_i^3 V_i^{3,n} \quad \text{и} \quad J^\mu_{F_i^n}(x), x \in V_i.$$

Для проверки этого факта достаточно разложить меру μ в семейство условных мер, сосредоточенных на слоях, параллельных $H_{n_i \vee n}$, и применить конечномерную формулу замены переменных. Переходя к пределу по $n \to +\infty$ и используя утверждение 5 теоремы 4 и лемму 2, получаем

$$\mu|_{V_i^1} \circ F^{-1} \ll \mu, \quad p_i(x) = \frac{d\mu|_{V_i^1} \circ F^{-1}}{d\mu}(x) = \left[J_F^\mu((F_i)^{-1}(x))\right]^{-1}, \quad x \in F(V_i^1).$$

Учитывая, что $\mu(\bigcup_i V_i^1) = 1$ и, следовательно, $\mu \circ F^{-1} = \mu|_{\bigcup_i V_i^1} \circ F^{-1}$, и предполагая, что $V_i^1 \cap V_j^1 = \varnothing$, $i \ne j$ (что не ограничивает общности), получаем $\mu \circ F^{-1} \ll \mu$ и

$$p(x) = \frac{d\mu \circ F^{-1}}{d\mu}(x) = \sum_{i: x \in F(V_i^1)} J_F^{\mu}((F_i^{-1})(x)) = \sum_{\substack{y \in \bigcup_i V_i^1 \\ f(y)=x}} J_F^{\mu}(y), \quad x \in X.$$

Доказательство теоремы 1 завершает следующий аналог теоремы Сарда.

Теорема 5. *Пусть* $\Phi \in HC^1(X, H, \mu)$, *тогда*

$$\mu^*(F(\{x \mid \det_2(\mathbb{I}_H + D\Phi(x)) = 0\})) = 0.$$

Доказательство. В работе [17] предложен подход к доказательству бесконечномерных аналогов теоремы Сарда, который заключается в использовании теоремы о неявной функции для локального сведения преобразования F к конечномерному. В данной ситуации этот подход может быть реализован следующим образом.

Пусть $n \geq 1$, положим $X_n = \left\{x \mid \det_2(\mathbb{I}_H + (\mathbb{I}_H - P_{H_n}) D\Phi(x)) \neq 0\right\}$. В силу результата теоремы 4 существует семейство множеств $\left\{V_i^n\right\}$ такое, что

$$\mu|_{V_i^n} \circ \left(id_X + j(\mathbb{I}_H - P_{H_n})\Phi\right)^{-1} \ll \mu, \quad \bigcup_i V_i^n = X_n.$$

Учитывая, что образ отображения $\Phi \circ (id_X + j(\mathbb{I}_H - P_{H_n})\Phi)^{-1}$ принимает значения в H_n, получаем, что на V_i^n отображение F имеет вид $F|_{V_i^n} = F_{i,n}^2 \circ F_{i,n}^1$, где $F_{i,n}^1(x) = x + j\Psi_n(x)$, $\Psi_n(x) \in H_n$, $x \in V_i$, а $F_{i,n}^2$ переводит меру μ в абсолютно непрерывную. Применяя к $F_{i,n}^1$ конечномерную теорему Сарда и суммируя по i, получаем

$$\mu^*(F\{x \in X_n \mid \det_2(\mathbb{I}_H + D\Phi) = 0\}) = 0.$$

Учитывая, что и $\bigcup_n X_n = X$, получаем требуемое утверждение.

Теорема доказана.

3. Некоторые применения. Теорема Гирсанова для гладких мер. Приведем несколько частных случаев формулы (5), представляющих самостоятельный интерес.

Предположим, что зафиксирован изоморфизм, отождествляющий пространство H с $L_2([0,1])$. Положим $H_t = L_2([0,t]) \subset H$ и определим поток σ-алгебр $\left\{\mathcal{F}_t = \sigma\left(\varphi \in W_\infty^1(X,\mu) \colon D\varphi \in H_t \text{ п.н.}\right),\ t \in [0,1]\right\}$.

Имеет место следующий результат.

Теорема 6 [18]. *Пусть процесс* $\{g_t,\ t \in [0,1]\}$ *согласован с потоком* $\{\mathcal{F}_t\}$ *и* $\mathrm{E}\int_0^1 g_t^2 dt < +\infty$.

Тогда g, *как случайный элемент в* $L_2([0,1])$, *стохастически интегрируем с* $p = 2$. *Кроме того, существует последовательность ступенчатых неупреждающих процессов*

$$g_t^n = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k^n \mathbb{I}_{t \in [t_n^{k-1}, t_n^k]}, \quad t \in [0,1], \quad n \geq 1, \tag{8}$$

такая, что $\mathrm{E}\|g - g^n\|_{L_2([0,1])}^2 \to 0$, $n \to \infty$, *и*

$$I_2(g) = L_2 - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N_n} \alpha_k^n \left[m(t_n^k) - m(t_n^{k-1})\right],$$

где $\left\{m(t) = I(\mathbb{I}_{[0,t]}),\ t \in [0,1]\right\}$. *Процесс* $m(\cdot)$ *называют логарифмическим процессом меры* μ.

***Замечание* 6.** Процесс m может не быть согласованным с потоком $\{\mathcal{F}_t\}$ [15].

Теорема 7. *Пусть g — согласованный с $\{\mathcal{F}_t\}$ процесс и $\|g\|_{H,\infty} \equiv \equiv \operatorname{ess\,sup} \|g\|_H < +\infty$.*

Тогда распределение μ_F в X случайного элемента F,

$$F(x) = x + jg(x), \quad x \in X, \tag{9}$$

эквивалентно мере μ. При этом

$$p^F(x) \equiv \frac{d\mu}{d\mu_F}(x) = \exp\left\{-I(g)(x) - \int_0^1 (1-\tau)\big(B(x+\tau jg)g(x),\, g(x)\big)_H\, d\tau\right\}. \tag{10}$$

***Замечание* 7.** Пусть $X = C_0([0,1])$, $H = L_2([0,1])$, $\mu = \mu_W$ — мера Винера, $j : h(\cdot) \mapsto \int_0^\cdot h(s)\,ds$. В этой ситуации теорема 7 устанавливает абсолютную непрерывность распределения процесса Ито $\{\xi_t,\ t \in [0,1]\}$ с дифференциалом $d\xi_t(x) = g_t\,dt + dx_t$, $t \in [0,1]$, относительно винеровской меры. Стохастический интеграл по винеровскому процессу от неупреждающего процесса g совпадает с обычным интегралом Ито, а оператор B тождественно равен $\mathbb{1}_H$, поэтому формула (10) в этой ситуации имеет вид

$$\frac{d\mu_w}{d\mu_\xi} = \exp\left(-\int_0^1 g_t\,dw_t - \frac{1}{2}\int_0^1 g_t^2\,dt\right) = \exp\left(-\int_0^1 g_t\,d\xi_t + \frac{1}{2}\int_0^1 g_t^2\,dt\right),$$

что совпадает с классической формулой Гирсанова. Таким образом, теорему 7 можно рассматривать как аналог формулы Гирсанова для гладких мер.

***Доказательство теоремы* 7.** Пусть сначала элемент g имеет вид (8), причем каждая из случайных величин α_n^k является $\mathcal{F}_{t_n^{k-1}}$-измеримой случайной величиной из WL_∞^2. Тогда отображение (9) удовлетворяет условиям теоремы 1. Поскольку

$$\left(Dg(x),\ \mathbb{1}_{[t_n^{k-1},t_n^k]} \otimes \mathbb{1}_{[t_n^{j-1},t_n^j]}\right) = 0$$

для всех $x \in X$, $k \ge j$, то имеем $\det_2(\mathbb{1}_H + Dg(x)) = 1$. Как несложно проверить, отображение $F = id_X + jg$ имеет обратное отображение $F^{-1} = id_X + jq$, где элемент q имеет вид (8). Теперь равенство (10) вытекает непосредственно из формулы (5).

Аналогично доказательству утверждения 3 теоремы 2 получаем

$$\mathrm{E}\exp CI(g) \le \exp\left\{\frac{C^2}{2}\beta_\mu \|g\|_{H,\infty}^2\right\}, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Утверждение для произвольного процесса g, удовлетворяющего условию теоремы, получаем с помощью предельного перехода, используя результат леммы 2; оценка (11) при этом обеспечивает равномерную интегрируемость семейства плотностей. Теорема доказана.

Следствие. *При выполненных условиях теоремы для произвольного $\alpha < < (\beta_\mu \|g\|_{H,\infty})^{-1}$*

$$\mathrm{E}\exp\frac{\alpha}{2}I^2(g) < +\infty.$$

Аналогичный результат имеет место для монотонных отображений.

Отображение $F = id_X + j\Phi$, называется монотонным, если $D\Phi(x) \ge 0$, $x \in \in X$.

Следующий результат доказывается аналогично предыдущей теореме.

Теорема 8. *Пусть* $F = id_X + j\Phi$ — *монотонное отображение,* $\Phi \in \in WL^1_\infty(X, H, \mu)$. *Тогда* F *инъективно и*

1) $\mu_F \ll \mu$,

$$\frac{d\mu_F}{d\mu_F}(x) = \left[J_F^\mu(y)\right]^{-1}, \quad F(y) = x, \quad x \in X;$$

2) $\mathrm{E} \exp CI(g) \le \exp C^2/2\beta_\mu \|\Phi\|_{H,\infty}$, $C < 0$;

3) *для* $\alpha < (\beta_\mu \|\Phi\|_{H,\infty})^{-1}$

$$\mathrm{E} \exp \frac{\alpha}{2}(I(\Phi) \wedge 0)^2 < +\infty.$$

4. Преобразования, порожденные эволюционным потоком. Рассмотрим абсолютную непрерывность исходной меры μ при действии потока, порожденного интегральным уравнением

$$u_t(x) = x + j\left(\int_0^1 b_s(u_s(x))\,ds\right), \quad x \in X, \quad t \in [0, 1]. \tag{12}$$

Отметим одну особенность уравнения (12). Совершенно естественно требование, чтобы решение (12) оставалось прежним при замене случайного процесса b_t, $t \in [0, 1]$, на стохастически эквивалентный. Однако это, вообще говоря, неверно, если меры $\mu \circ (u_s)^{-1}$ и μ сингулярны. Поэтому вопрос об абсолютной непрерывности мер $\mu \circ (u_t)^{-1}$ относительно μ и существовании решения (12) следует рассматривать одновременно.

Определение 6. *Измеримый случайный процесс* u_t, $t \in [0, 1]$, *является решением уравнения* (12), *если:*

а) *существует множество* $X_0 \subset X$ *полной меры такое, что соотношение* (12) *выполняется для всех* $x \in X_0$, $t \in [0, 1]$;

б) *меры* $\mu \circ (u_t)^{-1}$, $t \in [0, 1]$, *абсолютно непрерывны относительно* μ.

Основным результатом данного пункта является следующая теорема.

Теорема 9. *Предположим, что мера* μ *удовлетворяет условию* **B**, *функция* $b = b_t(x) : [0, 1] \times X \to H$ *измерима по паре переменных,* $b_t \in W^1_\infty(X, H, \mu)$ *для п. в.* $t \in [0, 1]$ *и* $\operatorname{ess\,sup}_t \|b_t\|_{W^1_\infty} < \infty$.

Тогда:

а) *уравнение* (12) *имеет решение;*

б) *для каждого* $t \in [0, 1]$ *уравнение*

$$v_{s,t}(x) = x - j\left(\int_s^t b_s(s, v_{s,t}(x))\,ds\right), \quad 0 \le s \le t, \tag{13}$$

имеет решение, причем функция $v_t := v_{0,t}$ *является п. н. обратным отображением к* u_t, *т. е.*

$$v_t(u_t(x)) = u_t(v_t(x)) = x \quad \text{для} \quad \mu\text{-п. в. } x \quad \text{и} \quad v_{s,t} = v_s \circ u_t \quad \mu\text{-п. н.};$$

в) *меры* μ, $\mu \circ (u_t)^{-1}$, $\mu \circ (v_{s,t})^{-1}$, $0 \le s \le t \le 1$, *эквивалентны, плотности Радона – Никодима имеют вид*

$$\frac{d\mu \circ (u_t)^{-1}}{d\mu}(x) = \exp\left(-\int_0^t (Ib_s)(\nu_{s,t}(x))\,ds\right), \tag{14}$$

$$\frac{d\mu \circ (\nu_{s,t}(x))^{-1}}{d\mu}(x) = \exp\left(-\int_s^t (Ib_z)(u_z(x))\,dz\right); \tag{15}$$

г) *если для п. в.* $t \in [0, 1]$ *отображение* b_t *принадлежит классу* $WL^1_\infty(X, H, \mu)$, *то решение уравнения* (12) *единственно с точностью до стохастической эквивалентности.*

***Замечание* 8.** Впервые вопрос о преобразовании меры потоком, порожденным дифференциальным уравнением в бесконечномерном пространстве, был рассмотрен A. B. Cruzeiro [19] для гауссовских мер. Сильное обобщение этого результата в случае произвольной дифференцируемой меры получено V. I. Bogachev, E. Mayer-Wolf [20]. Доказано, что если $b: X \to H$ — измеримое отображение, μ — вероятностная мера на банаховом пространстве X, дифференцируемая вдоль гильбертова пространства $H \hookrightarrow X$ и

α) $\forall c \in \mathbb{R}\ \ \forall h \in H:\ \exp\{c\rho_h\} \in L_1(X, \mu)$;

β) $\forall c > 0:\ \exp(c\|b\|_H),\ \exp\left(c\|Db\|_{\mathrm{op}}\right) \in L_1(X, \mu)$, где $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ — операторная норма;

γ) существует последовательность конечномерных ортогональных проекторов $\{p_n,\ n \ge 1\}$ таких, что $P_n b \in \mathcal{D}(I)$, $n \ge 1$ и $\forall c \in \mathbb{R}:\ \sup_n \mathrm{E}\exp(cI(P_n b)) < \infty$,

то существует и единственно решение уравнения

$$u_t(x) = x + j\left(\int_0^t b(u_s(x))\,ds\right).$$

Отметим, что условия на меру и функцию b в теореме 9 гораздо сильнее, чем условия α), β). С другой стороны, условие γ) обычно бывает довольно трудно проверить.

Доказательство существования решения будет проводиться, как и в пункте 2, с помощью аппроксимации решения искомого уравнения решениями уравнения вида (12) с коэффициентами $P_n b$, где P_n — конечномерный проектор. В связи с этим нам понадобится следующее утверждение о свойствах решений обыкновенного дифференциального уравнения с липшицевыми коэффициентами.

Лемма 3. *Предположим, что измеримая функция* $b: [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *удовлетворяет условиям:*

1) b — *ограничена;*

2) b *удовлетворяет условию Липшица по* x:

$$L := \sup_{t\in[0,1]} \sup_{x \ne y} \frac{\|b(t,x) - b(t,y)\|}{\|x - y\|} < \infty.$$

Тогда:

а) *интегральные уравнения*

$$u_t(x) = x + \int_0^t b(s, u_s(x))\,ds, \quad t \in [0,1], \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{16}$$

$$\nu_{s,t}(x) = x - \int_s^t b(z, \nu_{z,t}(x))\,ds, \quad s \in [0,1], \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{17}$$

имеют единственные решения, причем отображения u_t, $v_{s,t}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *являются биекциями и* $v_{0,t}(u_t(x)) = u_t(v_{0,t}(x)) = x$, $v_{s,t}(x) = u_s \circ v_t(x)$ *для всех* $x \in \in \mathbb{R}^n$;

б) *для всех* s, t, $0 \le s \le t \le 1$, *отображения* u_t *и* $v_{s,t}$ *дифференцируемы* λ^n*-п.н. и на некотором множестве* $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ *полной меры Лебега справедливы соотношения*

$$\nabla u_t(x) = id_{\mathbb{R}^n} + \int_0^t \nabla b(s, u_s(x)) \nabla u_s(x)\, ds, \quad t \in [0, 1], \tag{18}$$

$$v_{s,t}(x) = id_{\mathbb{R}^n} - \int_s^t \nabla b(z, v_{z,t}(x)) \nabla v_{z,t}(x)\, dz, \quad s \in [0, t], \tag{19}$$

$$\det \nabla u_t(x) = \exp\left(\int_0^t \nabla b(s, u_s(x))\, ds\right), \quad t \in [0, 1], \tag{20}$$

$$\det \nabla v_{s,t}(x) = \exp\left(-\int_s^t \nabla b(z, v_{z,t}(x))\, dz\right), \quad s \in [0, t]; \tag{21}$$

в) *меры* $\lambda^n \circ (u_t)^{-1}$, $\lambda^n \circ (v_{s,t})^{-1}$, λ^n *эквивалентны* и λ^n*-п. н. выполняются соотношения*

$$\frac{d\lambda^n \circ (u_t)^{-1}}{d\lambda^n}(x) = \det \nabla v_{0,t}(x), \tag{22}$$

$$\frac{d\lambda^n \circ (v_{s,t})^{-1}}{d\lambda^n}(x) = \exp\left(\int_s^t \nabla b(z, u_z(x))\, dz\right). \tag{23}$$

Доказательство утверждения. Пункт а) леммы является стандартным утверждением теории дифференциальных уравнений [21]. В случае, когда для любого $t \in [0, 1]$ функция $b(t, \cdot)$ непрерывно дифференцируема, утверждения б), в) также известны.

Пусть $\psi_r: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — бесконечно дифференцируемая функция, $\psi_r(x) = 1$ при $\|x\| \le r$, $\psi_r(x) = 0$ при $\|x\| \ge r + 1$. Положим $b_r(t, x) := b(t, x)\, \psi_r(x)$. Пусть $u_{r,t}$ — решение уравнения

$$u_{r,t}(x) = x + \int_0^t b_r(s, u_{r,s}(x))\, ds.$$

Зафиксируем $c > 0$. Заметим, что если $\|x\| \le c$, а r достаточно велико, то $u_{r,t}(x) = u_t(x)$, $t \in [0, 1]$. Поэтому без потери общности можно считать, что функция b имеет компактный носитель, т. е.

$$\exists r_0 > 0 \quad \forall t \in [0,1] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \|x\| \ge r_0 : \|b(t, x)\| = 0.$$

Заметим, что для любых $t \in [0, 1]$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $\|x_1\| \le r_0$, $\|x_2\| \ge r_0$: $\|u_t(x_1)\| \le r_0$, $u_t(x_2) = x_2$. Поэтому для доказательства достаточно проверить, что сужения функций u_t, $v_{s,t}$ на множество $\{\|x\| \le r_0 + 1\}$ имеют указанные в лемме свойства; меры $\lambda^n|_{\{\|x\| \le r_0+1\}}$, $\lambda^n|_{\{\|x\| \le r_0+1\}} \circ (u_t)^{-1}$ эквивалентны и плотность Радона – Никодима задается соотношением (22).

Функция u_t удовлетворяет условию Липшица. Действительно, для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, 1]$:

$$\|u_t(x) - u_t(y)\| \leq \|x - y\| + \int_0^t \|b(s, u_s(x)) - b(s, u_s(y))\| ds \leq \|x - y\| + $$
$$+ L\int_0^t \|u_s(x) - u_s(y)\| ds.$$

Отсюда согласно лемме Гронуолла – Беллмана

$$\sup_{x \neq y} \frac{\|u_t(x) - u_t(y)\|}{\|x - y\|} \leq e^{Lt}, \quad t \in [0, 1].$$

Рассмотрим последовательность функций $\{b_k, k \geq 1\}$,

$$b_k(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} b(t, y)\, \varphi_k(x - y)\, dy,$$

где $\varphi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_\infty$, $\varphi_k(x) = k^n \varphi(kx)$, φ — неотрицательная финитная бесконечно дифференцируемая функция, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = 1$.

Для любого $t \in [0, 1]$ функции $b_k(t, \cdot)$ непрерывно дифференцируемы и

$$\sup_{k,t,x} \|b_k(t, x)\| \leq \sup_{t,x} \|b(t, x)\| < \infty,$$

$$\sup_{k,t,x} \|\nabla b_k(t, x)\| \leq \sup_t \operatorname{ess\,sup}_x \|\nabla b(t, x)\| < \infty,$$

$$\sup_{t,x} \|b_k(t, x) - b(t, x)\| \to 0, \quad k \to \infty,$$

$$\forall t \in [0, 1]: \nabla b_k(t, x) \xrightarrow{\lambda^n} \nabla b(t, x), \quad k \to \infty.$$

***Замечание* 9.** Функция $b(t, \cdot)$ липшицева по x, следовательно, согласно теореме Радемахера [9] дифференцируема λ^n-п. н.

Обозначим через $u_t^{(k)}$, $v_{s,t}^{(k)}$ решения уравнений (16), (17), где вместо функции b взята функция b_k. Для любого $t \in [0, 1]$ функции $u_t^{(k)}$, $v_{s,t}^{(k)}$ непрерывно дифференцируемы и для них выполняются утверждения а) – в).

Легко видеть, что

$$\sup_{t,x} \left\| u_t^{(k)}(x) - u_t(x) \right\| \to 0, \quad k \to \infty,$$

$$\sup_{s,t,x} \left\| v_{s,t}^{(k)}(x) - v_{s,t}(x) \right\| \to 0, \quad k \to \infty.$$

Отметим также, что для достаточно больших k:

$$\left\| v_{s,t}^k(x) \right\|, \left\| u_t^{(k)}(x) \right\| \leq r_0 + 1 \quad \text{при} \quad \|x\| \leq r_0 + 1,$$

$$u_t^{(k)}(x) = v_{s,t}^{(k)}(x) = x \quad \text{при} \quad \|x\| > r_0 + 1.$$

Последовательность плотностей

$$\left\{ \frac{d\lambda^n|_{\{\|x\| \leq r_0 + 1\}} \circ \left(u_t^{(k)}\right)^{-1}}{d\lambda^n|_{\{\|x\| \leq r_0 + 1\}}} = \exp\left(\int_0^t \operatorname{tr} \nabla v_{s,t}^{(k)}\, ds \right) : k \geq 1 \right\}$$

равномерно интегрируема относительно меры Лебега. Поэтому согласно теореме 3 имеем абсолютную непрерывность $\lambda^n|_{\{\|x\|\le r_0+1\}} \circ (u_t)^{-1} \ll \lambda^n|_{\{\|x\|\le r_0+1\}}$ и, значит, $\lambda^n \circ (u_t)^{-1} \ll \lambda^n$. Аналогично проверяется, что $\lambda^n \circ (v_{s,t})^{-1} \ll \lambda^n$. Следовательно, меры λ^n, $\lambda^n \circ (u_t)^{-1}$, $\lambda^n \circ (v_{s,t})^{-1}$ эквивалентны.

Проверим равенство (18). Заметим, что функции $b(t,\cdot)$, $b(t, u_t(\cdot))$, $u_t(\cdot)$ липшицевы, значит, согласно теореме Радемахера они λ^n-п. н. дифференцируемы. Из эквивалентности мер λ^n и $\lambda^n \circ (u_t)^{-1}$ следует, что для любого $t \in [0, 1]$ соотношение

$$\nabla(b(t, u_t(x))) = \nabla b(t, u_t(x))\, \nabla u_t(x) \tag{24}$$

выполняется для λ^n-п. в. x.

Следовательно, (24) выполняется на некотором множестве $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ полной меры Лебега для п. в. $t \in [0, 1]$. Справедливость (18) (и аналогично (19)) для всех $x \in X_0$ следует теперь из теоремы о дифференцировании под знаком интеграла Лебега. Оставшиеся утверждения доказываются предельным переходом с использованием леммы 2 и теоремы 3.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть* $\mu(dx) = e^{-V(x)}dx$ — *вероятностная мера в* $\mathbb{R}^n$, $b : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — *измеримое отображение. Предположим, что:*

а) *V непрерывно дифференцируема, производная V' липшицева и вторая производная V'' существенно ограничена:*

$$\beta_\mu := \operatorname*{ess\,sup}_x \|V''(x)\| < \infty, \quad \|\cdot\| \text{ — операторная норма;}$$

б) *функция b ограничена константой β_0;*

в) *функция b липшицева по x и*

$$\beta_1 := \sup_t \operatorname*{ess\,sup}_x \|\nabla b(t,x)\|_{\mathfrak{L}_2} < \infty,$$

где $\|\cdot\|_{\mathfrak{L}_2}$ — *норма Гильберта – Шмидта.*

Обозначим через u_t, $v_{s,t}$ решения уравнений (16), (17). *Тогда:*

1) *меры* μ, $\mu \circ (u_t)^{-1}$, $\mu \circ (v_{s,t})^{-1}$ *эквивалентны,*

$$p_t := \frac{d\mu \circ (u_t)^{-1}}{d\mu} = \exp\left\{-\int_0^t (Ib(s,\cdot))(v_{s,t})\,ds\right\}, \tag{25}$$

$$p_{-t} := \frac{d\mu \circ (v_t)^{-1}}{d\mu} = \exp\left\{\int_0^t (Ib(s,\cdot))(u_s)\,ds\right\}, \tag{26}$$

где $I = \langle V', \cdot\rangle - \operatorname{tr}\nabla$ — *расширенный стохастический интеграл, соответствующий мере* μ (3);

2) *существует константа* $C = C(\beta_0, \beta_1, \beta_\mu) < +\infty$, *зависящая только от* β_0, β_1, β_μ (*но не от размерности* $\mathbb{R}^n$), *такая, что*

$$\sup_{t\in[0,1]} \int_{\mathbb{R}^n} p_t |\ln p_t|\, d\mu \le C. \tag{27}$$

Доказательство. Для доказательства (25), (26) достаточно заметить, что

$$\frac{d\mu \circ (u_t)^{-1}}{d\mu}(x) = \frac{d\lambda^n \circ (u_t)^{-1}}{d\lambda^n} e^{V(v_t(x))-V(x)},$$

применить для $d\lambda^n \circ (u_t)^{-1} / d\lambda^n$ формулу (22), а для $(V(v_t(x)) - V(x))$ формулу Ньютона – Лейбница.

Используя лемму 2, формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и аппроксимируя функцию V дважды непрерывно дифференцируемыми функциями, а отображение u_t последовательностью $\{u_t^{(k)}\}$, из леммы 3 получаем для μ-п. в. x равенство

$$V(v_t(x)) - V(x) = \langle V'(x), v_t(x) - x\rangle +$$

$$+ \int_0^t \int_s^t \langle V''(v_{z,t}(x)) b(z, v_{z,t}(x)), b(s, v_{s,t}(x))\rangle dz ds.$$

Заметим также, что

$$\frac{d\lambda^n \circ (u_t)^{-1}}{d\lambda^n} = \exp\left\{ -\int_0^t \operatorname{tr}\left[\nabla(b(s, v_{s,t})) - \int_s^t \nabla b(s, v_{s,t}) \nabla b(z, v_{z,t}) \nabla v_{z,t}\, dz \right] ds \right\}.$$

Следовательно,

$$p_t = \exp\left\{ -\int_0^t \int_s^t \operatorname{tr}\left[\nabla(b(s, v_{s,t})) \nabla b(z, v_{z,t}) \nabla v_{z,t}\right] dz ds + \right.$$

$$\left. + I(v_t(x) - x) - \int_0^t \int_s^t \langle V''(v_{z,t}) b(z, v_{z,t}), b(s, v_{s,t})\rangle dz ds \right\}.$$

Аналогично

$$p_{-t} = \exp\left\{ -\int_0^t \int_0^s \operatorname{tr}\left[\nabla(s, u_s) \nabla b(z, u_z) \nabla u_z\right] dz ds + \right.$$

$$\left. + I(u_t(x) - x) - \int_0^t \int_0^s \langle V''(u_z) b(z, u_z), b(s, u_s)\rangle dz ds \right\}.$$

Используя замену переменных $x = v_t(y)$, получаем

$$\int_{\mathbb{R}^n} p_t(y) |\ln p_t(y)| \mu(dy) = \int_{\mathbb{R}^n} |\ln p_{-t}(x)| \mu(dx) \le$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^t \int_0^s \left| \operatorname{tr}[\nabla b(s, u_s) \nabla b(z, u_z)] \nabla u_z \right| dz ds d\mu +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} |I(u_t(x) - x)| \mu(dx) + \beta_\mu \int_0^t \int_0^s \|b(z, u_z)\| \|b(s, u_s)\| dz ds. \tag{28}$$

Для любых $t, x : \|u_t(x) - x\| \le \beta_0 t$. Применяя лемму Гронуолла – Беллмана к уравнению (18), можно получить неравенство

$$\|\nabla(u_t(x) - x)\|_{\mathfrak{L}_2} \le e^{\beta_1 t} \beta_1, \quad t \in [0, 1], \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Лемма 5 ([22], гл. 1, § 3). *Предположим, что мера* μ *на* X *удовлетворяет условию* **B**, *функция* $f : X \to H$ *принадлежит соболевскому пространству* $W_2^1(X, H, \mu)$. *Тогда* f *принадлежит области определения оператора* $I = I_2$ *и*

$$\mathrm{E}(If)^2 \le \mathrm{E}\|Df\|^2_{\mathfrak{L}_2} + \beta_1 \mathrm{E}\|f\|^2_H.$$

Применив указанные оценки и утверждение 5 ко второму слагаемому в (28), получим

$$\int p_t |\ln p_t| d\mu \le \int_0^t \int_0^s \beta_1^2 (1 + e^{\beta_1 z})\, dz ds + \sqrt{\beta_\mu \beta_0^2 t^2 + e^{2\beta_1 t}} + \frac{1}{2}\beta_\mu \beta_0^2.$$

Лемма 3 доказана.

***Доказательство теоремы* 9.** Пусть $\{e_n\colon n \ge 1\}$ — ортонормированный базис пространства H, $H_n = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$, $P_n\colon H \to H_n$ — ортогональный проектор на H_n. Разложим X в прямую сумму $X = Y_n \oplus j(H_n)$, где $Y_n \subset X$ — некоторое замкнутое подпространство. Отождествим это разложение с произведением $Y_n \times \mathbb{R}^n$ так, чтобы векторы $j(e_1), \ldots, j(e_n)$ перешли в естественный базис $\mathbb{R}^n$. Точку, в которую $x \in X$ переходит при этом отождествлении, будем обозначать $(y_n, x_n) \in Y_n \times \mathbb{R}^n$.

Пусть $\pi_n = \pi_n(dy_n)$ — проекция меры μ на Y_n, $\{\mu^{(n)}_{y_n}(dx_n)\colon y_n \in Y_n\}$ — семейство условных мер относительно расслоения $X = Y_n \times \mathbb{R}^n$ на плоскости вида $\{y_n\} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$. Как уже отмечалось в пункте 2, для π^n-п. в. y_n эти условные меры дифференцируемы и удовлетворяют условию **B** (на $\mathbb{R}^n$).

Из условий теоремы следует (см. п. 1, замечание 2), что существует такая функция $\tilde{b}: [0,1] \times X \to H$, что $\tilde{b}_t(x) = b_t(x)$ для п. в. (t, x) и

$$\forall m \ge 1,\ h \in H_m,\ t \in [0,1]\colon \left\| \tilde{b}_t(x + j(h)) - \tilde{b}_t(x) \right\|_H \le \beta_1 \|h\|_H, \tag{29}$$

где $\beta_1 := \operatorname{ess\,sup}_{t,x} \|Db(t,x)\|_{\mathfrak{L}_2}$.

Проведем доказательство теоремы в предположении о том, что функция b удовлетворяет (29).

Рассмотрим вспомогательную последовательность уравнений

$$u_t^{(n)}(x) = x + j\left(\int_0^t \beta_s^{(n)} u_s^{(n)}(x)\, ds \right), \quad x \in X, \quad t \in [0,1], \tag{30}$$

где $b_n = P_n b$.

Заметим, что для любого $x = (y_n, x_n)$ функция $u_t^{(n)}$ не изменяет координаты y_n, т. е. $u_t^{(n)}(y_n, x_n) = (y_n, \tilde{u}_t^{(n)}(y_n, x_n))$, где $\tilde{u}_t^{(n)}$ — решение следующего интегрального уравнения в $\mathbb{R}^n$:

$$\tilde{u}_t^{(n)}(y_n, x_n) = x_n + \int_0^t b_s^{(n)}(y_n, \tilde{u}_s^{(n)}(y_n, x_n))\, ds.$$

Из леммы 3 следует, что для π^n-п. в. точек $y_n \in Y_n$ меры $\mu^{(n)}_{y_n}$ и $\mu^{(n)}_{y_n} \circ$ $\circ\, (\tilde{u}_t^{(n)}(y_n, \cdot))^{-1}$ эквивалентны, следовательно [2], $\mu \sim \mu \circ (u_t^{(n)})^{-1}$ и для μ-п.в. (y_n, x_n) имеет место равенство

$$\frac{d\mu \circ (u_t^{(n)})^{-1}}{d\mu}(y_n, x_n) = \frac{d\mu^{(n)}_{y_n} \circ (u_t^{(n)}(y_n, \cdot))^{-1}}{d\mu^{(n)}_{y_n}}(x_n). \tag{31}$$

Кроме того, из (27) получаем

$$\sup_{n,t} \int p_t^{(n)} \left| \ln p_t^{(n)} \right| d\mu < \infty,$$

где $p_t^{(n)} = d\mu \circ (u_t^{(n)})^{-1} / d\mu$ и, значит, последовательность $\{p_t^{(n)}\}$ равномерно интегрируема.

Оценим расхождение

$$\mathrm{E} \sup_{s \le t} \left\| u_s^{(n)} - u_s^{(m)} \right\|_H \le \mathrm{E} \int_0^t \left\| b_s^{(n)}(u_s^{(n)}) - b_s^{(m)}(u_s^{(m)}) \right\|_H ds \le$$

$$\le \mathrm{E} \int_0^t \left(\left\| P_n b_s(u_s^{(n)}) - P_n b_s(u_s^{(m)}) \right\|_H + \left\| (P_n - P_m) b_s(u_s^{(m)}) \right\|_H \right) ds \le$$

$$\le \beta_1 \mathrm{E} \int_0^t \left\| u_s^{(n)} - u_s^{(m)} \right\|_H ds + \int_0^t \int_X \| (P_n - P_m) b_s(x) \|_H \, p_s^{(m)}(x) \, \mu(dx) \, ds. \qquad (32)$$

Здесь для оценки первого слагаемого в последнем неравенстве воспользовались неравенством (29). Отметим, что второе слагаемое в правой части (32) сходится к нулю при $n, m \to \infty$, в силу равномерной ннтегрируемости $\{p_s^{(m)}\}$ и теоремы Лебега о мажорируемой сходимости.

Из леммы Гронуолла – Беллмана следует фундаментальность последовательности $\{ u^{(n)} : n \ge 1 \}$ и существование случайной функции u_t, $t \in [0, 1]$, с непрерывными траекториями такой, что

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{E} \sup_t \left\| u_t^{(n)} - u_t \right\|_H = 0.$$

Из теоремы 3 следует абсолютная непрерывность $\mu \circ (u_t)^{-1} \ll \mu$, а из леммы 2 — что для п. в. (t, x) выполняется равенство (12). Из непрерывности по t левой и правой частей (12) следует, что (12) выполняется для всех $t \in [0, 1]$ на некотором множестве $X_0 \subset X$ μ-полной меры.

Аналогично доказывается существование решения (13). Равенство $v_t(u_t(x)) = u_t(v_t(x)) = x$ для μ-п. в. x получается с помощью леммы 2 и, значит, $\mu \circ (u_t)^{-1} \sim \mu$.

Проверим справедливость формулы (14).

Из леммы 4 и (31) следует, что для μ-почти всех $x = (y_n, x_n) \in X$:

$$p_t^{(n)}(y_n, x_n) = \exp \left\{ - \int_0^t (I^{y_n} b_s^{(n)})(v_{s,t}^{(n)}(x)) \, ds \right\},$$

где $I^{y_n} : L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \mu_{y_n}^{(n)}) \to L_2(\mathbb{R}^n, \mu_{y_n}^{(n)})$ — расширенный стохастический интеграл. .

Заметим, что (см. (3)) для любой функции $f \in W_\infty^1(X, h, \mu)$:

$$(If)(y_n, x_n) = (I^{y_n} f)(y_n, x_n) \quad \text{для} \quad \mu\text{-п. в.} \quad x = (y_n, x_n) \in X.$$

Значит,

$$p_t^{(n)}(x) = \exp \left\{ - \int_0^t (I b_s^{(n)})(v_{s,t}^{(n)}(x)) \, ds \right\}.$$

Из леммы 5 следует, что для любого $s \in [0, 1]$:

$$\lim_{n\to\infty}\int_X \left(Ib_s^{(n)}(x) - Ib_s(x)\right)^2 \mu(dx) = 0.$$

Применяя теорему 3 и лемму 2, получаем (14). Формула (15) доказывается аналогично. Итак, теорема 9 доказана в случае, когда функция b удовлетворяет (29). Рассмотрим общий случай. Пусть $\tilde{b}$ — модификация отображения b, удовлетворяющая (29). Обозначим через u_t, $t\in[0,1]$, решение уравнения

$$u_t(x) = x + j\left(\int_0^t \tilde{b}_s(u_s(x))\,ds\right), \qquad t\in[0,1].$$

Заметим, что тогда u_t удовлетворяет и (12) из-за эквивалентности мер μ и $\mu\circ(u_t)^{-1}$, $t\in[0,1]$. Уравнение (13) рассматривается аналогично.

Докажем теперь единственность решения (12) в предположении $b_t \in WL^1_\infty(X,H,\mu)$ для п. в. $t\in[0,1]$. Предположим, что $\tilde{u}_t$, $t\in[0,1]$, — некоторое решение (12). Аналогично (12) получим такую оценку:

$$\mathrm{E}\sup_{s\le t}\left\|\tilde{u}_s - u_s^{(n)}\right\|_H \le$$

$$\le \beta_1 \mathrm{E}\int_0^t \left\|\tilde{u}_s - u_s^{(n)}\right\|_H ds + \int_0^t\int_X \|(id_H - P_n)b_s(x)\|_H\, p_s^{(n)}(x)\,\mu(dx)\,ds.$$

Отсюда следует сходимость

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}\sup_{t\in[0,1]}\left\|\tilde{u}_t - u_t^{(n)}\right\| = 0,$$

значит, для μ-п. в. $x\colon \tilde{u}_t(x) = u_t(x)$, $t\in[0,1]$. Теорема 9 доказана.

5. Линейные уравнения с расширенным стохастическим интегралом. В данном пункте рассматриваются линейные уравнения с расширенным стохастическим интегралом. Поскольку расширенный стохастический интеграл является неким аналогом дифференциального оператора первого порядка (см. (3)), то уравнение с оператором I можно рассматривать как бесконечномерные уравнения в частных производных. Рассмотрим сначала более простое уравнение

$$\frac{\partial\xi_t(x)}{\partial t} = -\langle D\xi_t(x), b_t(x)\rangle_H + a_t(x)\xi_t(x), \qquad t\in[0,1], \quad x\in X,$$
$$\xi_0(x) = f(x), \tag{33}$$

где $b\colon[0,1]\times X\to H$, $a\colon[0,1]\times X\to\mathbb{R}$, $f\colon X\to\mathbb{R}$ — измеримые функции, D — стохастическая производная.

Попробуем решить уравнение (33) методом характеристик, предложенным А. А. Дороговцевым [23, 24] для решения уравнений, в которые входят стохастические производные или расширенный стохастический интеграл.

Уравнение для характеристик имеет вид (12) и, значит,

$$\xi_t(x) = f(\nu_t(x))\exp\left(\int_0^t a_s(\nu_{s,t}(x))\,ds\right), \tag{34}$$

где u_t, $\nu_{s,t}$ — решения (12), (14) соответственно, $\nu_t = \nu_{0,t}$.

Заметим, что если функция b удовлетворяет условиям теоремы 9, то процесс определен в (34) корректно. Применяя аппроксимацию отображений u_t, $\nu_{s,t}$, предложенную в теореме 9, можно получить стохастическую дифференцируемость отображений $(u_t(x)-x)$, $(\nu_{s,t}(x)-x)$. Аналогично хорошо известным конечномерным рассуждениям [25] получаем следующую теорему.

Теорема 10. *Предположим, что мера* μ *и функция* b *удовлетворяют условиям теоремы* 9, $a \in L_\infty([0,1]\times X,\, dt\times d\mu)$, $f \in HC^1$, $a_t \in HC^1$ *для любого* $t \in [0,1]$ и $\sup_t \|a_t\|_{W^1_\infty} < \infty$.

Тогда случайный процесс ξ_t, *определенный в* (34), *удовлетворяет соотношению* (33) *для всех* $t\in[0,1]$ μ*-п. н.*

Опишем более точно уравнения с оператором I, которые будем рассматривать.

Далее везде полагаем $H = L_2([0,1])$. Пусть $a = a_t(x)$, $b = b_t(x)$ — измеримые отображения из $[0,1]\times X$ в $\mathbb{R}$, ξ_0 — случайная величина.

Рассмотрим уравнение

$$\xi_t \;=\; \xi_0 + \int_0^t a_s\xi_s\,ds + I(\mathbb{I}_{[0,t]}(\cdot)\,b.\xi.), \qquad t\in[0,1]. \tag{35}$$

***Замечание* 10.** Если μ — распределение винеровского процесса $\omega(t)$, $t\in$ $\in[0,1]$, в пространстве $X = C_0([0,1])$ непрерывных функций, начинающихся в нуле, $H = L_2([0,1])$ вложено в X оператором $j: h \mapsto \int_0^{\cdot} h(s)\,ds$, то уравнение (35) имеет вид

$$\xi_t \;=\; \xi_0 + \int_0^t a_s\xi_s\,ds + \int_0^t b_s\xi_s\,dw_s, \tag{36}$$

где интеграл по винеровскому процессу является расширенным интегралом Скорохода.

Формально имеем равенство

$$If = -\langle \rho, f\rangle - \operatorname{tr} Df.$$

Напомним, однако, что, вообще говоря, для функции f из $W^1_p(X,H,\mu)$ след оператора $\operatorname{tr} Df$ не определен, также не существует H-значного случайного элемента ρ такого, что $\langle \rho, h\rangle_H = \rho_h$, μ-п. н.

Применим метод характеристик для решения (35), не заботясь пока о математической строгости.

Уравнение для характеристики примет вид

$$u_t(x) \;=\; x + j(\mathbb{I}_{[0,t]}(\cdot)\,b.(u.(x))), \tag{37}$$

где $t\in[0,1]$, $x\in X$, а само решение (35) будет иметь вид

$$\xi_t(x) \;=\; \xi_0(\nu_t(x))\exp\left(\int_0^t a_s(\nu_{s,t}(x))\,ds\right)\times$$

$$\times\exp\left(-\int_0^t \sum_{k=1}^\infty \left[D_{e_k} b_s(\nu_{s,t}(x)) + b_s(\nu_{s,t}(x))\rho_{e_k}(\nu_{s,t}(x))\, e_k(s)\right]ds\right), \tag{38}$$

где $\nu_t: X\to X$ — отображение, обратное к u_t, $\nu_{s,t} = \nu_s\circ u_t$, $\{e_k : k\ge 1\}$ — ортонормированный базис $H = L_2([0,1])$.

Третий множитель в выражении напоминает плотность Радона – Никодима $L_t := \dfrac{d\mu\circ(\nu_t)^{-1}}{d\mu}$ (ср. с (14)) и формула (38) принимает вид

$$\xi_t \;=\; \xi_0(\nu_t)\exp\left(\int_0^t a_s(\nu_{s,t})\,ds\right) L_t. \tag{39}$$

Отметим, что эвристическая формула (39) в случае, когда рассматривается уравнение (36) с расширенным стохастическим интегралом Скорохода по винеровскому процессу, действительно [26] задает решение уравнения (35).

Далее доказываем аналогичный факт для гладких мер, удовлетворяющих условию **B**. Для этого приведем условия существования и единственности решения (37), покажем обратимость u_t и абсолютную непрерывность $\mu \circ (v_{s,t})^{-1} \ll \ll \mu$ и докажем, что случайный процесс, определенный формулой (39), является решением (35).

Теорема 11. *Предположим, что мера* μ *удовлетворяет условию* **B** *и измеримая функция* $b = b_t(x)\colon [0,1]\times X \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет условиям:*

1) *для п. в.* $t \in [0,1]$ *функция* $b_t\colon X \to \mathbb{R}$ *принадлежит* WL^1_∞;

2) $\operatorname{ess\,sup}_{t\in[0,1]} \| b_t \|_{\infty,1} < \infty$.

Тогда:

а) *существуют такие измеримые функции* $u = u_t(x)\colon [0,1]\times X \to \mathbb{R}$, $v = v_{s,t}(x)\colon \{(s,t,x) \mid 0 \le s \le t \le 1, x \in X\} \to \mathbb{R}$ *и множество* $X_0 \subset X$ *полной меры, что соотношения* (37) *и*

$$v_{s,t}(x) \;=\; x - j(\mathbb{1}_{[s,t]}(\cdot)\, b.(v_{\cdot,t}(x))), \qquad s \in [0,t], \tag{40}$$

выполняются для всех $x, s, t\colon x \in X_0,\ 0 \le s \le t \le 1$;

б) *для всех* $s, t,\ 0 \le s \le t \le 1$ *меры* $\mu,\ \mu \circ (u_t)^{-1},\ \mu \circ (v_{s,t})^{-1}$ *эквивалентны;*

в) *отображение* $v_t := v_{0,t}$ *является п. н. обратным к* $u_t\colon v_t(u_t(x)) = u_t(v_t(x)) = x$ *для* μ*-п. в.* x; $v_{s,t} = u_s \circ v_t$, μ*-п. н.;*

г) *решения уравнений* (37), (40) *единственны с точностью до стохастической эквивалентности.*

***Замечание* 11.** Уравнения типа (37), (40) иногда называют уравнениями с сингулярным сносом. В гауссовском случае они исследовались в работах [26 – 28], где получены результаты, аналогичные теореме 11. Аппарат условных математических ожиданий, эффективно применяемый для гауссовских мер в указанных выше работах, не переносится напрямую для нашего случая.

***Доказательство теоремы* 11.** Без потери общности можно предположить, что

$$\exists c > 0\ \ \forall t \in [0,1],\ x \in X,\ h \in H\colon\ \ |b_t(x + j(h)) - b_t(x)| \;\le\; c\,\|h\|_H, \tag{41}$$

$$\exists \beta_0 > 0\ \ \forall t \in [0,1],\ x \in X\colon\ \ \sup_{t,x} |b(t,x)| \;\le\; \beta_0. \tag{42}$$

В этом случае для каждого $x \in X$ уравнения (37), (40) имеют единственные решения, которые можно получить методом последовательных приближений. Проверим это на примере уравнения (37).

Определим последовательность $\{u_n = u_{n,t}(x)\colon n \ge 0\}$ следующим образом:

$$u_{0,t}(x) \;:=\; x, \qquad t \in [0,1], \quad x \in X;$$

$$u_{n+1,t}(x) \;:=\; x + j(\mathbb{1}_{[0,t]}(\cdot)\, b.(u_{n,\cdot}(x))), \quad n \ge 0.$$

Тогда

$$\|u_{n+1,t}(x) - u_{n,t}(x)\|_H^2 \;=\; \int_0^t (b_s(u_{n,s}(x)) - b_s(u_{n-1,s}(x)))^2\, ds \;\le$$

$$\le\; c\int_0^t \|u_{n,s}(x) - u_{n-1,s}(x)\|_H^2\, ds.$$

Используя полученное неравенство и стандартные аргументы для метода последовательных приближений, получаем существование искомого решения. Единственность получается традиционным образом.

Пусть $\{e_n : n \ge 1\}$ — ортонормированный базис $L_2([0,1])$, состоящий из функций Хаара [29]. P_n — ортогональный проектор на $H_n := := \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$. Рассмотрим вспомогательные последовательности уравнений

$$u_t^{(n)}(x) = x + j\left[P_n(\mathbb{1}_{[0,t]}(\cdot)\, b.(u.(x)))\right], \qquad t \in [0,1]; \tag{43}$$

$$v_{s,t}^{(n)}(x) = x - j\left[P_n(\mathbb{1}_{[s,t]}(\cdot)\, b.(v_{\cdot,t}(x)))\right], \qquad s \in [0,t]. \tag{44}$$

Разложим аналогично построениям пункта 4 пространство X в сумму $X = = Y_n \oplus j(H_n) = Y_n \times R^n$. Тогда уравнения (43), (44) примут вид

$$u_t^{(n)}(x) = \left(y_n,\ x_n + \int_0^t b_s(u_s^{(n)}(x))\, e^{(n)}(s)\, ds \right), \tag{45}$$

$$v_{s,t}^{(n)}(x) = \left(y_n,\ x_n - \int_s^t b_z(v_{z,t}^{(n)}(x))\, e^{(n)}(z)\, dz \right), \tag{46}$$

где $x = (y_n, x_n) \in X$, $e^{(n)} = (e_1, \ldots, e_n) \in L_2\left([0,1], \mathbb{R}^n\right)$.

Так же, как и при доказательстве теоремы 9, получим эквивалентность мер μ, $\mu \circ \left(u_t^{(n)}\right)^{-1}$, $\mu \circ \left(v_{s,t}^{(n)}\right)^{-1}$ и справедливость соотношений $v_t^{(n)}\left(u_t^{(n)}(x)\right) = = u_t^{(n)}\left(v_t^{(n)}(x)\right) = x$ для μ-п. в. x и $v_s \circ u_t = v_{s,t}$ μ-п. н. Докажем равномерную интегрируемость семейства плотностей

$$\left\{ \frac{d\mu \circ (u_t^{(n)})^{-1}}{d\mu} :\ n \ge 1,\ t \in [0,1] \right\}.$$

Для этого достаточно проверить, что

$$\sup_{t,n,x} \left\| u_t^{(n)}(x) - x \right\|_H < \infty, \tag{47}$$

$$\sup_{n,t}\ \operatorname*{ess\,sup}_{x} \left\| \nabla_{\mathbb{R}^n} (u_t^{(n)}(x) - x) \right\|_{\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n} < \infty.$$

Соотношение (47) вытекает из оценки

$$\left\| u_t^{(n)}(x) - x \right\|_H^2 \le \int_0^t b^2(s, u_s^{(n)}(x)) \le \beta_0^2 t,$$

где β_0 — константа из (42).

Используя лемму 3, можно получить липшицевость $u_t^{(n)}$ вдоль пространства $\mathbb{R}^n$ и выполнение для μ-почти всех $x \in X$ соотношения

$$\nabla_{\mathbb{R}^n} u_t^{(n)}(x) = \left(0,\ id_{\mathbb{R}^n} + \int_0^t e^{(n)}(s) \nabla_{\mathbb{R}^n} b\left(s, u_s^{(n)}(x)\right) ds \right) =$$

$$= P_n\left(\mathbb{1}_{[0,t]}(\cdot)\, \nabla_{\mathbb{R}^n} b\left(\cdot, u_\cdot^{(n)}(x)\right) \nabla_{\mathbb{R}^n} u_\cdot^{(n)}(x)\right).$$

Отсюда для п. в. $(t,x) \in [0,1] \times X$ имеем неравенство

$$\left\| \nabla_{\mathbb{R}^n} (u_t^{(n)}(x) - x) \right\|_{\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n} \le 2\beta_1^2 \int_0^t \left\| \nabla_{\mathbb{R}^n} (u_s^{(n)}(x) - x) \right\|_{\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n} ds + 2\beta_1^2 t,$$

где $\beta_1 = \operatorname*{ess\,sup}_{t,x} \| D b_t(x) \|_H$. Следовательно,

$$\sup_{n,t} \operatorname*{ess\,sup}_{x} \left\| \nabla_{\mathbb{R}^n} (u_t^{(n)}(x) - x) \right\|^2_{\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n} \leq 2\beta_1^2 e^{2\beta_1^2}$$

и равномерная интегрируемость плотностей

$$\left\{ \frac{d\mu \circ (u_t^{(n)})^{-1}}{d\mu} : n \geq 1, \ t \in [0,1] \right\}$$

доказана.

Для доказательства абсолютной непрерывности $\mu \circ (u_t)^{-1} \ll \mu$ достаточно показать (теорема 3), что для любых t, x имеет место сходимость $u_t^{(n)}(x) \to$ $\to u_t(x), \ n \to \infty$.

Действительно,

$$\left\| u_t(x) - u_t^{(n)}(x) \right\|^2_{L_2([0,1])} =$$

$$= \left\| \mathbb{1}_{[0,t]}(\cdot)\, b(\cdot, u_\cdot(x)) - P_n\left(\mathbb{1}_{[0,t]}(\cdot)\, b(\cdot, u_\cdot^{(n)}(x)) \right) \right\|^2_{L_2([0,1])} \leq$$

$$\leq 2 \left\| (id_H - P_n)\left(\mathbb{1}_{[0,t]}(\cdot)\, b(\cdot, u_\cdot(x)) \right) \right\|^2_{L_2([0,1])} +$$

$$+ 2 \left\| P_n\left[\mathbb{1}_{[0,t]}(\cdot) \left(b(\cdot, u_\cdot(x)) - b(\cdot, u_\cdot^{(n)}(x)) \right) \right] \right\|^2_{L_2([0,1])} \leq$$

$$\leq o_x(1) + 2\beta_1^2 \int_0^t \left\| u_s(x) - u_s^{(n)}(x) \right\|^2_{L_2([0,1])} ds,$$

где для любого $x \in X : o_x(1) \to 0, \ n \to \infty$.

Отсюда согласно лемме Гронуолла – Беллмана получаем искомую сходимость.

Аналогичным образом для любых $s, t, \ s \leq t : \mu \circ (\nu_{s,t})^{-1} \ll \mu$, и существование доказано. Единственность доказывается аналогично доказательству теоремы 9.

Теорема 11 доказана.

Для упрощения изложения дальнейшие рассмотрения проводятся в частном случае $X = C_0([0,1]), \ H = L_2([0,1]), \ j(h) = \int_0^{\cdot} h(s)\, ds$.

Определение 7. *Случайный процесс* $\xi_t, \ t \in [0,1]$, *называется* L_1*-решением* (35), *если:*

1) $\xi_t \in L_1(X, \mu), \ t \in [0,1]; \ a.\xi., b.\xi. \in L_1([0,1] \times X, dt \times d\mu)$;

2) *для любого* f *из класса*

$$\mathcal{F}C_b^\infty = \left\{ \varphi(\langle x_1^*, \cdot \rangle, \ldots, \langle x_n^*, \cdot \rangle) : n \in \mathbb{N}, \ x_i^* \in X^*, \ \varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n) \right\}$$

выполняется равенство

$$\mathrm{E} f\left(\xi_t - \xi_0 - \int_0^t b_s \xi_s\, ds \right) = \mathrm{E} \int_0^t b_s \xi_s D_s f\, ds. \tag{48}$$

Отметим, что правая часть (48) определена корректно, так как $Df \in$ $\in L_\infty([0,1] \times X, dt \times d\mu)$. Если же случайная функция $f_{b\xi}(s) = b_s \xi_s, \ s \in [0,1]$, такова, что

$$\mathrm{E} \left(\int_0^1 (b_s \xi_s)^2 ds \right)^{p/2} < \infty$$

для некоторого $p \geq 1$, то правую часть (48) можно записать как $\mathrm{E}(f_{b\xi}, Df)_H$, и условие 2 определения 7 будет эквивалентно следующему: $f_{b\xi}\, \mathbb{I}_{[0,t]} \in \mathcal{D}(I_p)$ для любого $t \in [0, 1]$ и равенство (35) выполняется для любого t μ-п. н.

Таким образом, определение 7 согласуется с определением расширенного стохастического интеграла.

Теорема 12. *Предположим, что мера* μ *и случайная функция* b_t, $t \in [0, 1]$, *удовлетворяют условиям теоремы* 11, $a \in L_\infty([0,1] \times X, dt \times d\mu)$, $\xi_0 \in L_\infty(X, \mu)$. *Тогда случайная функция* ξ_t, *заданная соотношением* (39), *является* L_1-*решением уравнения* (35). *Здесь* $v_{s,t}$ — *решение* (40), $v_t = v_{0,t}$, $L_t = d\mu \circ (v_t)^{-1} / d\mu$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{F}C_b^\infty$, ξ_t задано соотношением (39). напомним, что $v_{s,t} = u_s \circ v_t$ п. н. (см. теорему 11). Тогда, применяя замену переменных $y = v_t(x)$, получаем

$$\mathrm{E}f\left(\xi_t - \xi_0 - \int_0^t a_s \xi_s\, ds\right) =$$

$$= \mathrm{E}\left[f(u_t)\xi_0 \exp\left(\int_0^t a_s(u_s)\, ds\right) - f\xi_0 - \xi_0 \int_0^t a_s(u_s) f(u_s) \exp\left(\int_0^s a_z(u_z)\, dz\right) ds \right]. \tag{49}$$

В силу (37) для $f \in \mathcal{F}C_b^\infty$ при всех $x \in X$ имеет место равенство

$$f(u_t(x)) = f(x) + \int_0^t [D_s f](u_s(x))\, b_s(u_s(x))\, ds, \qquad t \in [0, 1]. \tag{50}$$

Используя (50), проинтегрируем по частям третье слагаемое в (49):

$$\mathrm{E}f\left(\xi_t - \xi_0 - \int_0^t a_s \xi_s\, ds\right) =$$

$$= \mathrm{E}\left[f(u_t)\xi_0 \exp\left\{\int_0^t a_s(u_s)\, ds\right\} - \xi_0 f - \xi_0 \left\{ f(u_s) \exp\left(\int_0^s a_z(u_z)\, dz\right)\right\}\Bigg|_{s=0}^{s=t} + \right.$$

$$\left. + \xi_0 \int_0^t [D_s f](u_s)\, b_s(u_s) \exp\left\{\int_0^s a_z(u_z)\, dz\right\} ds \right] =$$

$$= \mathrm{E}\int_0^t \xi_0 [D_s f](u_s)\, b_s(u_s) \exp\left\{\int_0^s a_z(u_z)\, dz\right\} ds =$$

$$= \mathrm{E}\int_0^t \xi_0(v_s) \exp\left\{\int_0^s a_z(v_{z,s})\, dz\right\} L_s b_s D_s f\, ds,$$

откуда следует, что случайный процесс ξ_t, $t \in [0, 1]$, заданный формулой (39), является L_1-решением (35). Теорема доказана.

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* О плотностях вероятностных мер в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. – 1966. – **21**, № 6. – С. 83 – 152.

2. *Скороход А. В.* Интегрирование в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1975. – 232 с.
3. *Ramer R.* On nonlinear transformations of Gaussian measures // J. Func. Anal. – 1974. – **15**. – P. 166 – 187.
4. *Kusuoka S.* The nonlinear transformation of Gaussian measure on Banach space and its absolutely continuity I, II // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. 1A. – 1982. – **29**, № 3. – P. 567 – 598; 1983. – **30**, № 1. – P. 199 – 220.
5. *Bogachev V. I.* Differentiable measures and Malliavin calculus // J. Math. Sci. – 1997. – **87**, № 5. – P. 3577 – 3731.
6. *Далецкий Ю. Л., Сохадзе Г. А.* Абсолютная непрерывность гладких мер // Функцион. анализ и его прил. – 1988. – **22**, № 2. – С. 77 – 78.
7. *Smolyanov O. G., Weizsacer H. V.* Differentiable families of measures // J. Func. Anal. – 1993. – **118**. – P. 454 – 476.
8. *Авербух В. И., Смолянов О. Г., Фомин С. В.* Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. 1. Дифференцируемые меры // Тр. Моск. мат. о–ва. – 1971. – **24**. – С. 133 – 174.
9. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. – М.: Наука, 1987. – 288 с.
10. *Скороход А. В.* Случайные линейные операторы. – Киев: Наук. думка, 1978. – 200 с.
11. *Enchev O., Strook D. W.* Rademacher's theorem for the Wiener functionals // Ann. Probab. – 1993. – **21**, № 1. – P. 25 – 33.
12. *Pilipenko A. Yu.* Anticipative analogues of diffusion processes // Theory Stochast. Process. – 1997. – **3(19)**, № 3 – 4. – P. 363 – 372.
13. *Kulik A. M.* Large deviations for smooth measures // Ibid. – 1998. – **4(20)**, № 1 – 2. – P. 180 – 188.
14. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1965. – 448 с.
15. *Дороговцев А. А.* Стохастические уравнения с упреждением. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1996. – 152 с.
16. *Богачев В. И.* Гауссовские меры. – М.: Наука, 1997. – 474 с.
17. *Smale S.* An infinite dimentional version of Sard's theorem // Amer. J. Math. – 1965. – **87**. – P. 861 – 866.
18. *Kulik A. M.* Integral representation for functionals on a space with a smooth measure // Theory Stochastic Processes. – 1997. – **3**, № 1 – 2. – P. 235 – 244.
19. *Cruseiro A. B.* Equations differentielles sur l'espace de Wiener et formules de Cameron – Martin non-lineaires // J. Func. Anal. – 1983. – **54**. – P. 206 – 227.
20. *Bogachev V. I., Mayer–Wolf E.* Absolutely continuous flows generated by Sobolev class vector fields in finite and infinite dimentions. – Preprint SFB343, Univ. Bielefeld, 1994.
21. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во иностр. лит., 1958. – 474 с.
22. *Далецкий Ю. Л., Белопольская Я. И.* Стохастическая дифференциальная геометрия. – Киев: Выща шк., 1989. – 295 с.
23. *Дороговцев А. А.* Линейные уравнения, содержащие расширенный стохастический интеграл // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 12. – С. 1714 – 1716.
24. *Dorogovcev A. A.* Stochastic analysis and random maps in Hilbert space. – Utrecht; Tokyo: VSP, 1994. – 110 p.
25. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.
26. *Buckdahn R.* Anticipative Girsanov transformations and Skorohod stochastic differential equations // Mem. Amer. Math. Soc. – 1994. – **111**, № 533. – P. 1 – 88.
27. *Enchev O., Strook D. W.* Anticipative diffusion and related changes of measure // J. Func. Anal. – 1993. – **116**. – P. 449 – 473.
28. *Ustunel A. S., Zakai M.* Transformation of Wiener measure under anticipative flows // Probab. Theory Related Fields. – 1994. – **93**. – P. 91 – 136.
29. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 624 с.

Получено 06.06.2000