УДК 519.21

В. В. Булдигін, В. О. Коваль (Нац. техн. ун-т України „КПІ", Київ)

ПРО АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В R^d

We investigate necessary and sufficient conditions of the almost sure convergence to zero and almost sure boundedness of normed solutions of linear stochastic differential equations in R^d. We establish an analog of the bounded low of iterated logarithm.

Досліджуються необхідні та достатні умови збіжності до нуля і обмеженості майже напевно нормованих розв'язків лінійних стохастичних диференціальних рівнянь в R^d. Встановлюється аналог обмеженого закону повторного логарифма.

Робота присвячена дослідженню асимптотичних властивостей майже напевно (м. н.) розв'язків лінійних стохастичних диференціальних рівнянь в R^d. Така задача розглядалась, наприклад, в роботах [1, 2].

Введемо необхідні позначення: R^m — евклідів простір векторів-стовпців $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^{\mathrm{T}}$, де T — знак транспонування $(R^1 = R)$; $M_{m\times n}$ — простір дійсних матриць розміру $m \times n$; $\operatorname{tr} A$ — слід матриці A; $\|\cdot\|$ — евклідова норма вектора або матриці, що буде зрозуміло із контексту; $D(R^m)$ $(D(M_{m\times n}))$ — простір функцій $x(t)$, $t \ge 0$, які є неперервними справа та мають скінченну границю зліва і набувають значень у просторі R^m $(M_{m\times n})$.

Спочатку доведемо кілька загальних теорем.

Нехай $(Z(t), t \ge 0)$ — гауссівський мартингал в $R^d (Z(0) = 0)$, який заданий на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ з фільтрацією $(\mathcal{F}_t, t \ge 0)$ і має м. н. траєкторії із простору $D(R^d)$. Позначимо через $K(t)$ коваріаційну матрицю вектора $Z(t)$: $K(t) = \mathrm{E} Z(t) Z^{\mathrm{T}}(t)$, $t \ge 0$. Нехай $(B(t), t \ge 0)$ — борелівська функція із значеннями в $M_{d\times d}$ така, що для кожного $t > 0$ має місце

$$\int_0^t \operatorname{tr}\left(B(s)\, dK(s)\, B^{\mathrm{T}}(s)\right) < \infty .$$

Тоді визначений стохастичний інтеграл

$$V(t) = \int_0^t B(s)\, dZ(s)$$

(див., наприклад, [2]). Далі будуть розглядатись сепарабельні модифікації процесу $(V(t), t \ge 0)$. Встановимо необхідні та достатні умови, при яких

$$F(t) \int_0^t B(s)\, dZ(s) \to 0 \quad \text{м. н.}, \quad t \to \infty, \tag{1}$$

або

$$\varlimsup_{t\to\infty} \left\| F(t) \int_0^t B(s)\, dZ(s) \right\| < \infty \quad \text{м. н.}, \tag{1'}$$

де $(F(t), t \ge 0)$ — невипадкова функція із $D(M_{q\times d})$.

Позначимо через $\mathfrak{N}(R)$ множину всіх монотонно зростаючих до нескінченності послідовностей додатних чисел.

Теорема 1. *Для виконання співвідношення* (1) *необхідно і достатньо, щоб виконувались такі умови*:

1) $\operatorname{tr}\left(F(t)\int\limits_0^t B(s)\,dK(s)\,B^{\mathrm{T}}(s)\,F^{\mathrm{T}}(t)\right) \to 0,\ t\to\infty$;

2) *для будь-якої послідовності* $(t_n,\ n\ge 1)\in \mathfrak{N}(R)$ *при всіх* $\varepsilon>0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-\frac{\varepsilon}{\operatorname{tr}\left(F(t_{n+1})\int_{t_n}^{t_{n+1}} B(s)\,dK(s)\,B^{\mathrm{T}}(s)\,F^{\mathrm{T}}(t_{n+1})\right)}\right]<\infty. \tag{2}$$

Доведення теореми 1 спирається на лему, яка випливає з леми 4.4.2 [3].

Лема 1. *Нехай* $(Y(t),\, t\ge 0)$ — *сепарабельний випадковий процес в* R^q.
1. *Співвідношення*

$$\lim_{t\to\infty} Y(t) = 0 \quad \textit{м. н.}$$

виконується тоді і лише тоді, коли для будь-якої послідовності $(t_n,\ n\ge 1)\in$ $\in \mathfrak{N}(R)$

$$\mathrm{P}\left(\lim_{n\to\infty} Y(t_n)=0\right) = 1.$$

2. *Співвідношення*

$$\varlimsup_{t\to\infty} \|Y(t)\| < \infty \quad \textit{м. н.}$$

виконується тоді і лише тоді, коли для будь-якої послідовності $(t_n,\ n\ge 1)\in$ $\in \mathfrak{N}(R)$

$$\mathrm{P}\left(\varlimsup_{n\to\infty}\|Y(t_n)\|<\infty\right) = 1.$$

***Доведення теореми* 1.** Оскільки випадковий процес

$$Y(t) = F(t)\int\limits_0^t B(s)\,dZ(s)$$

є сепарабельним, то на підставі пункту 1 леми 1 співвідношення (1) має місце тоді і лише тоді, коли для будь-якої послідовності $(t_n,\ n\ge 1)\in\mathfrak{N}(R)$

$$Y(t_n) = F(t_n)\sum_{i=1}^{n} X_i \to 0 \quad \text{м. н.},\quad n\to\infty, \tag{3}$$

де

$$X_i = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} B(s)\,dZ(s), \qquad t_0=0.$$

Оскільки $Z(t)$ — гауссівський процес з незалежними приростами, то $(X_i,$ $i\ge 1)$ — послідовність незалежних центрованих гауссівських випадкових векторів у R^d. Тому за теоремою 4. 1. 2 [3] для фіксованої послідовності $(t_n,\ n\ge$ $\ge 1)\in\mathfrak{N}(R)$ співвідношення (3) має місце тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:

1) $\mathrm{E}\|Y(t_n)\|^2 \to 0, \quad n \to \infty$;

2) для будь-якої монотонно зростаючої до нескінченності послідовності натуральних чисел $(n_j,\ j \ge 1)$ при всіх $\varepsilon > 0$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{\varepsilon}{\mathrm{E}\left\|F\left(t_{n_{j+1}}\right)\sum_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} X_i\right\|^2}\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{\varepsilon}{\mathrm{E}\left\|F\left(t_{n_{j+1}}\right)\int_{t_{n_j}}^{t_{n_{j+1}}} B(s)\,dZ(s)\right\|^2}\right] < \infty.$$

Звідси випливає твердження теореми.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Для виконання співвідношення* (1′) *необхідно і достатньо, щоб виконувались такі умови*:

1) $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\ \mathrm{tr}\left(F(t)\int\limits_0^t B(s)\,dK(s)\,B^{\mathrm{T}}(s)\,F^{\mathrm{T}}(t)\right) < \infty$;

2) *для будь-якої послідовності чисел* $(t_n,\ n \ge 1) \in \mathfrak{N}(R)$ *знайдеться таке* $\varepsilon > 0$, *що має місце* (2).

Доведення теореми 2 проводиться аналогічно доведенню теореми 1 і спирається на пункт 2 леми 1 та на теорему 4.1.3 [3].

Розглянемо в R^d стохастичне диференціальне рівняння

$$dX(t) = A(t)X(t)\,dt + D(t)\,dZ(t), \qquad t \ge 0, \tag{4}$$

де $(Z(t),\ t \ge 0)$ — гауссівський мартингал в R^d з м. н. неперервними траєкторіями; $X(0)$ — випадковий вектор; $A(t),\ D(t),\ t \ge 0,$ — борелівські функції із значеннями в $M_{d\times d}$ такі, що для кожного $t > 0$ виконуються умови

$$\int\limits_0^t \|A(s)\|\,ds < \infty, \quad \int\limits_0^t \mathrm{tr}\,(D(s)\,dK(s)\,D^T(s)) < \infty.$$

Через $a(t),\ t \ge 0,$ позначаємо довільну фіксовану функцію із $D(R)$, яка набуває додатних значень. Розглянемо необхідні і достатні умови, при яких

$$a(t)X(t) \to 0 \quad \text{м. н.}, \quad t \to \infty, \tag{5}$$

для будь-якого $X(0)$.

Теорема 3. *Припустимо, що при будь-яких* s *та* t *має місце рівність* $A(t)A(s) = A(s)A(t)$. *Для виконання співвідношення* (5) *необхідно і достатньо, щоб виконувались такі умови*:

1) $a(t)\exp\left(\int\limits_0^t A(s)\,ds\right) \to 0, \quad t \to \infty$;

2) $$a^2(t)\int\limits_0^t \mathrm{tr}\left[\exp\left(\int\limits_s^t A(u)\,du\right)D(s)\,dK(s)\,D^{\mathrm{T}}(s)\ \times\right.$$
$$\left.\times\ \exp\left(\int\limits_s^t A^{\mathrm{T}}(u)\,du\right)\right] \to 0, \quad t \to \infty;$$

3) *для будь-якої послідовності* $(t_n,\ n \geq 1) \in \mathfrak{N}(R)$ *при всіх* $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-\varepsilon \Big/ \left(a^2(t_{n+1}) \int_{t_n}^{t_{n+1}} \operatorname{tr}\left[\exp\left(\int_s^{t_{n+1}} A(u)\,du\right) D(s)\,dK(s)\,D^{\mathrm{T}}(s) \times \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times \exp\left(\int_s^{t_{n+1}} A^{\mathrm{T}}(u)\,du\right)\right]\right)\right\} < \infty.$$

Доведення. Розв'язок рівняння (4) має вигляд

$$X(t) = \exp\left(\int_0^t A(s)\,ds\right) X(0) + \int_0^t \exp\left(\int_s^t A(u)\,du\right) D(s)\,dZ(s).$$

Звідси

$$a(t)X(t) = a(t)\exp\left(\int_0^t A(s)\,ds\right) X(0) +$$

$$+ a(t)\exp\left(\int_0^t A(u)\,du\right)\int_0^t \exp\left(-\int_0^s A(u)\,du\right) D(s)\,dZ(s). \tag{6}$$

Внаслідок (6) співвідношення (5) рівносильне таким двом співвідношенням ($X(0)$ — довільний вектор):

$$a(t)\exp\left(\int_0^t A(s)\,ds\right) X(0) \to 0 \quad \text{м. н.,} \quad t \to \infty, \tag{7}$$

$$a(t)\exp\left(\int_0^t A(u)\,du\right)\int_0^t \exp\left(-\int_0^s A(u)\,du\right) D(s)\,dZ(s) \to 0 \quad \text{м. н.,} \quad t \to \infty. \tag{8}$$

Тоді умова 1 теореми еквівалентна (7), а умови 2 та 3 еквівалентні (8) згідно з теоремою 1, в якій потрібно покласти

$$F(t) = a(t)\exp\left(\int_0^t A(u)\,du\right),$$

$$B(t) = \exp\left(-\int_0^t A(u)\,du\right) D(t).$$

Теорему 3 доведено.

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння (4), в якому $A(t) \equiv A$, тобто рівняння вигляду

$$dX(t) = A\,X(t)\,dt + D(t)\,dZ(t), \qquad t \geq 0, \tag{4'}$$

де A — довільна матриця розміру $d \times d$. Позначимо через $\lambda_k(A)$, $k = \overline{1, d}$, власні значення матриці A і покладемо

$$\alpha = \max_{1 \leq k \leq d} \operatorname{Re} \lambda_k(A).$$

Нехай p — максимальна кратність коренів $\lambda_k(A)$ мінімального многочлена матриці A, для яких $\operatorname{Re}\lambda_k(A) = \alpha$.

Надалі через c, c', c_1, c_2 і т. п. позначаємо деякі додатні сталі, значення яких несуттєві.

Теорема 4. *Для виконання співвідношення*

$$a(t)X(t) \to 0 \quad м. н., \quad t \to \infty,$$

необхідно і достатньо, щоб виконувались такі умови:

1) $a(t)t^{p-1}e^{\alpha t} \to 0, \quad t \to \infty$;

2) $a^2(t)\int_0^t \operatorname{tr}\left(e^{A(t-s)}D(s)\,dK(s)\,D^{\mathrm{T}}(s)\,e^{A^{\mathrm{T}}(t-s)}\right) \to 0, \qquad t \to \infty$;

3) *для будь-якої послідовності* $(t_n,\ n \geq 1) \in \mathfrak{R}(R)$ *при всіх* $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{\varepsilon}{a^2(t_{n+1})\int_{t_n}^{t_{n+1}} \operatorname{tr}\left(e^{A(t_{n+1}-s)}D(s)\,dK(s)\,D^{\mathrm{T}}(s)\,e^{A^{\mathrm{T}}(t_{n+1}-s)}\right)}\right] < \infty.$$

Доведення. Зобразивши матрицю A у вигляді розкладу Жордана, отримаємо оцінки [4]

$$c_1(1 + t^{p-1})\,e^{\alpha t} \leq \|e^{At}\| \leq c_2(1 + t^{p-1})\,e^{\alpha t}, \qquad t \geq 0. \tag{9}$$

Звідси та з теореми 3 випливає справедливість теореми 4.

Зауваження **1.** Аналогічно теоремі 4 можуть бути сформульовані з очевидними змінами в умовах (див. теорему 2) необхідні і достатні умови, при яких

$$\varlimsup_{t \to \infty} a(t)\|X(t)\| < \infty \quad \text{м. н.}$$

Надалі будемо розглядати стохастичне диференціальне рівняння (4′), в якому $Z(t)$ — стандартний вінерівський процес $W(t)$, тобто рівняння вигляду

$$dY(t) = A\,Y(t)\,dt + D(t)\,dW(t), \qquad t \geq 0, \tag{10}$$

в якому функція $(D(t),\ t \geq 0)$ із значеннями в $M_{d\times d}$ така, що для кожного $t > 0$ має місце

$$\int_0^t \|D(s)\|^2\,ds < \infty.$$

Розглянемо спочатку достатні умови, при яких

$$a(t)\,Y(t) \to 0 \quad \text{м. н.}, \quad t \to \infty. \tag{11}$$

Теорема 5. 1. *Нехай* $\alpha < 0$. *Припустимо, що*

$$a(t)\,\|D(t)\| \downarrow 0, \quad t \to \infty, \tag{12}$$

і знайдеться $\beta \in [0, -\alpha)$ *таке, що при всіх* $s \leq t$

$$\|D(s)\|\,e^{\beta s} \leq c\,\|D(t)\|\,e^{\beta t}. \tag{13}$$

Якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\int_1^{\infty} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{a^2(t)\,\|D(t)\|^2}\right)dt < \infty, \tag{14}$$

то має місце (11).

2. *Нехай* $\alpha = 0$. *Припустимо, що*

$$a^2(t)\,t^{2p-2}f(t) \downarrow 0, \qquad t \to \infty, \tag{15}$$

де

$$f(t) = \int_0^t \|D(s)\|^2\, ds\,.$$

Якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\int_1^\infty \exp\left(-\frac{\varepsilon}{a^2(t)\, t^{2p-2} f(t)}\right)\frac{\|D(t)\|^2}{f(t)}\, dt < \infty, \tag{16}$$

то має місце (11).

3. *Нехай* $\alpha > 0$. *Припустимо, що*

$$\nu = \int_0^\infty e^{-2\alpha t}\|D(t)\|^2\, dt < \infty. \tag{17}$$

Якщо

$$a(t)\, t^{p-1} e^{\alpha t} \to 0, \quad t \to \infty, \tag{18}$$

то має місце (11).

Доведення. На підставі теореми 4 співвідношення (11) буде виконане, якщо будуть виконані такі три умови:

$$a(t)\, t^{p-1} e^{\alpha t} \to 0, \quad t \to \infty, \tag{18$'$}$$

$$a^2(t)\int_0^t \|e^{A(t-s)} D(s)\|^2\, ds \to 0, \quad t \to \infty, \tag{19}$$

для будь-якої послідовності $(t_n,\ n \ge 1) \in \mathfrak{N}(R)$ при всіх $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^\infty \exp\left[-\frac{\varepsilon}{a^2(t_{n+1})\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|e^{A(t_{n+1}-s)} D(s)\right\|^2 ds}\right] < \infty. \tag{20}$$

Розглянемо спочатку співвідношення (18$'$). При виконанні умов (15) та (18) воно очевидне. Нехай виконані умови (12) та (13). За умовою (12) без обмеження загальності можемо припустити, що $\|D(t)\| > 0$, $t \ge 0$. Тоді

$$a(t)\, t^{p-1} e^{\alpha t} \le c\, a(0)\, t^{p-1} e^{(\alpha+\beta)t} \to 0, \quad t \to \infty,$$

тобто має місце (18$'$).

Використовуючи відповідно умови (12), (13), (15), (18) та нерівність (9), неважко переконатися, що (19) також виконується (див. відповідні оцінки при доведенні співвідношення (20)).

Доведемо (20). Розглянемо окремі три випадки. Зафіксуємо довільну послідовність $(t_n,\ n \ge 1) \in \mathfrak{N}(R)$.

1. Нехай $\alpha < 0$. Внаслідок (9) та (13) отримаємо

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|e^{A(t_{n+1}-s)} D(s)\|^2\, ds \le$$

$$\le c_2^2 c^2 \|D(t_{n+1})\|^2 \int_0^{t_{n+1}-t_n} e^{2(\alpha+\beta)t}(1 + t^{p-1})^2\, dt < \infty.$$

Відмітимо, що

$$\mu = \int_0^\infty e^{2(\alpha+\beta)t}(1+t^{p-1})^2\,dt < \infty.$$

Внаслідок (12) знайдеться $n_0 \geq 1$ таке, що при всіх $n > n_0$

$$a(t_n)\,\|D(t_n)\| < 2^{-1/2}.$$

Зауважимо, що для будь-якого $\delta > 0$ та для будь-яких додатних a і b таких, що $a + b \leq 1$, має місце нерівність

$$e^{-\delta/ab} \leq \delta^{-1} e^{-\delta/a} b.$$

Позначимо

$$g(t) = a^2(t)\,\|D(t)\|^2,$$

$$p(t) = e^{2(\alpha+\beta)t}(1+t^{p-1})^2.$$

Тоді загальний член v_n ряду (20) при $n \geq n_0$ оцінюється таким чином:

$$v_n \leq \exp\left[-\frac{\varepsilon}{c_3\, g(t_{n+1})\, 2\mu\Big((2\mu)^{-1}\int_0^{t_{n+1}-t_n} p(t)\,dt\Big)}\right] \leq$$

$$\leq \frac{c_3}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2\mu c_3\, g(t_{n+1})}\right)\int_0^{t_{n+1}-t_n} p(t)\,dt \leq$$

$$\leq \frac{c_3}{\varepsilon}\sup_{t\geq 0} p(t)\exp\left(-\frac{\varepsilon}{c_4\, g(t_{n+1})}\right)\int_{t_n}^{t_{n+1}} dt \leq \frac{c_5}{\varepsilon}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{c_4\, g(t)}\right)dt.$$

Звідси та з умови (14) випливає (20).

2. Нехай $\alpha = 0$. Внаслідок (15) знайдеться $n_0 \geq 1$ таке, що при всіх $n > n_0$

$$a(t_n)\, t_n^{p-1}\sqrt{f(t_n)} < 2^{-1/2}.$$

Припустимо також, що $t_n \geq 1$ при $n \geq n_0$. Позначимо

$$g_1(t) = a^2(t)\, t^{2p-2} f(t),$$

$$p_1(t) = \|D(t)\|^2.$$

Тоді загальний член v_n ряду (20) при $n \geq n_0$ оцінюється таким чином:

$$v_n \leq \exp\left[-\varepsilon\left(4c_2^2\, a^2(t_{n+1})\, t_{n+1}^{2p-2}\int_{t_n}^{t_{n+1}} p_1(s)\,ds\right)^{-1}\right] \leq$$

$$\leq \exp\left[-\varepsilon\left(c_3 g_1(t_{n+1})\frac{1}{2f(t_{n+1})}\int_{t_n}^{t_{n+1}} p_1(t)\,dt\right)^{-1}\right] \leq$$

$$\leq \frac{c_3}{2\varepsilon}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{c_3\, g_1(t_{n+1})}\right)\int_{t_n}^{t_{n+1}}\frac{p_1(t)}{f(t)}\,dt \leq \frac{c_4}{\varepsilon}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{c_3\, g_1(t)}\right)\frac{p_1(t)}{f(t)}\,dt.$$

Звідси та з умови (16) випливає (20).

3. Нехай $\alpha > 0$. Внаслідок (18) знайдеться таке $n_0 \geq 1$, що при всіх $n > n_0$

$$a(t_n)\, t_n^{p-1} e^{\alpha t_n} < 2^{-1/2}.$$

Будемо також припускати, що $t_n \geq 1$ при $n > n_0$. Позначимо

$$g_2(t) = a^2(t)\, t^{2p-2} e^{2\alpha t},$$

$$p_2(t) = e^{-2\alpha t} \| D(t) \|^2.$$

Тоді загальний член v_n ряду (20) при $n \geq n_0$ оцінюється таким чином:

$$v_n \leq \exp\left[-\varepsilon \left(4 c_2^2\, g_2(t_{n+1})\, 2\nu \left((2\nu)^{-1} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} p_2(s)\, ds \right) \right)^{-1} \right] \leq$$

$$\leq \frac{c_3}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2\nu c_3\, g_2(t_{n+1})} \right) \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} p_2(t)\, dt \leq \frac{c_3}{\varepsilon} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} p_2(t)\, dt .$$

Звідси та з умови (17) випливає (20).

Теорему 5 доведено.

Перейдемо до розгляду необхідних умов для виконання співвідношення (11). При цьому припустимо, що

$$\varlimsup_{t \to \infty} \frac{\rho_{\max}(D(t))}{\rho_{\min}(D(t))} < \infty, \tag{21}$$

де $\rho_{\max}(\cdot)$ та $\rho_{\min}(\cdot)$ — відповідно максимальне та мінімальне сингулярне число матриці.

Теорема 6. 1. *Нехай* $\alpha < 0$. *Припустимо, що виконуються умови* (12) *та*

$$\int\limits_{n-1}^{n} \|D(t)\|^2 dt \geq c' \| D(n) \|^2, \qquad n \geq n_0 \geq 1. \tag{22}$$

Тоді із співвідношення (11) *випливає* (14).

2. *Нехай* $\alpha = 0$. *Припустимо, що виконуються умови* (12) *та*

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \infty,$$

$$\int\limits_0^t [1 + (t-s)^{p-1}]^2 \|D(s)\|^2 ds \geq c'' t^{2p-2} \int\limits_0^t \|D(s)\|^2 ds \tag{23}$$

для всіх $t \geq t_0 \geq 1$, $c'' \in (0, 1)$.

Тоді із співвідношення (11) *випливає* (16).

3. *Нехай* $\alpha > 0$. *Тоді із співвідношення* (11) *випливає* (18).

Доведення. Із (11) на підставі теореми 3 випливають співвідношення (18) та (20). Тому у випадку $\alpha > 0$ теорему доведено.

Використовуючи послідовно умову (21) та нерівність (9), отримуємо, що для будь-якої послідовності $(t_n,\ n \geq 1) \in \mathfrak{N}(R)$ при всіх $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{ -\varepsilon \left(a^2(t_{n+1}) \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} e^{2\alpha(t_{n+1}-s)} [1 + (t_{n+1}-s)^{p-1}]^2 \|D(s)\|^2 ds \right)^{-1} \right\} < \infty. \tag{24}$$

Розглянемо окремо два випадки.

1. Нехай $\alpha < 0$. Покладемо в (24) $t_n = n - 1$, $n \geq 2$. Тоді, враховуючи (22) та (12), загальний член w_n ряду (24) оцінюємо знизу при $n \geq n_0$ таким чином:

$$(g(t) = a^2(t)\| D(t)\|^2);$$

$$w_n \geq \exp\left(-\frac{\varepsilon}{c' e^{2\alpha} g(n)}\right) = \int_n^{n+1} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{c_1 g(n)}\right) dt \geq \int_n^{n+1} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{c_1 g(t)}\right) dt.$$

Звідси та з (24) випливає (14).

2. Нехай $\alpha = 0$. Визначимо послідовність $(t_n,\ n \geq 1)$ таким чином: для будь-якого $n \geq 1$ t_n задовольняє умову $f(t_n) = r^n$, де $r = 8/c'' > 1$. Це визначення коректне і $(t_n,\ n \geq 1) \in \mathfrak{R}(R)$. Розглянемо в (24) дану послідовність і виберемо n_0 так, щоб при всіх $n > n_0$ мало місце $t_n \geq t_0$. Тоді, враховуючи умови (23) та (15), загальний член w_n ряду (24) оцінюємо знизу при $n \geq n_0$ таким чином:

$$(g_1(t) = a^2(t) t^{2p-2} f(t), \quad p_1(t) = \| D(t)\|^2),$$

$$w_n = \exp\left\{-\varepsilon\left(a^2(t_{n+1}) \int_0^{t_{n+1}} [1 + (t_{n+1} - s)^{p-1}]^2 p_1(s)\, ds \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left[1 - \frac{\int_0^{t_n} [1 + (t_{n+1} - s)^{p-1}]^2 p_1(s)\, ds}{\int_0^{t_{n+1}} [1 + (t_{n+1} - s)^{p-1}]^2 p_1(s)\, ds}\right]\right)^{-1}\right\} \geq$$

$$\geq \exp\left(-\varepsilon\left(c'' g_1(t_{n+1})\left[1 - \frac{4 f(t_n)}{c'' f(t_{n+1})}\right]\right)^{-1}\right) \geq \exp\left(-\frac{2\varepsilon}{c'' g_1(t_{n+1})}\right) =$$

$$= (\ln r)^{-1} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{c_1 g_1(t_{n+1})}\right)[\ln f(t_{n+2}) - \ln f(t_{n+1})] =$$

$$= c_2 \exp\left(-\frac{\varepsilon}{c_1 g_1(t_{n+1})}\right) \int_{t_{n+1}}^{t_{n+2}} \frac{p_1(t)}{f(t)}\, dt \geq c_2 \int_{t_{n+1}}^{t_{n+2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{c_1 g_1(t)}\right) \frac{p_1(t)}{f(t)}\, dt.$$

Звідси та з (24) випливає (16).

Теорему 6 доведено.

Використовуючи теорему 6 та зауваження 1, можемо сформулювати необхідні та достатні умови, при яких

$$\overline{\lim_{t \to \infty}}\, a(t)\|Y(t)\| < \infty \quad \text{м. н.} \tag{25}$$

Теорема 7. 1. *Нехай* $\alpha < 0$. *Припустимо, що виконуються умови* (12) *та* (13). *Тоді виконання умови* (14) *при деякому* $\varepsilon > 0$ *є достатнім для виконання співвідношення* (25).

Навпаки, нехай виконуються умови (12), (21) *та* (22). *Тоді із* (25) *випливає виконання умови* (14) *при деякому* $\varepsilon > 0$.

2. *Нехай* $\alpha = 0$. *Припустимо, що виконується умова* (15). *Тоді виконання умови* (16) *при деякому* $\varepsilon > 0$ *є достатнім для виконання співвідношення* (25).

Навпаки, нехай виконуються умови (15), (21), (23) *та*

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \infty .$$

Тоді із (25) *випливає виконання умови* (16) *при деякому* $\varepsilon > 0$.

3. *Нехай* $\alpha > 0$. *Для виконання співвідношення* (25) *необхідно, а за умови* (17) *і достатньо, щоб*

$$\overline{\lim_{t \to \infty}}\, a(t)\, t^{p-1} e^{\alpha t} < \infty .$$

Використаємо тепер теорему 7 для встановлення аналога обмеженого закону повторного логарифма для розв'язків рівняння (10).

Теорема 8. 1. *Нехай* $\alpha < 0$. *Припустимо, що виконується умова* (13). *Тоді*

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\|Y(t)\|}{\|D(t)\| (\ln t)^{1/2}} < \infty \quad \textit{м. н.}$$

2. *Нехай* $\alpha = 0$. *Припустимо, що*

$$f(t) = \int_0^t \|D(s)\|^2 ds \to \infty, \qquad t \to \infty .$$

Тоді

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\|Y(t)\|}{t^{p-1} \left(f(t) \ln\ln f(t) \right)^{1/2}} < \infty \quad \textit{м. н.}$$

3. *Нехай* $\alpha < 0$. *Припустимо, що виконується умова* (17). *Тоді*

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\|Y(t)\|}{t^{p-1} e^{\alpha t}} < \infty \quad \textit{м. н.}$$

Доведення. Твердження теореми випливає з достатніх умов теореми 7, якщо у випадках $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ та $\alpha > 0$ відповідно покласти

$$a(t) = \frac{1}{\|D(t)\| (\ln t)^{1/2}}, \qquad a(t) = \frac{1}{t^{p-1} \left(f(t) \ln\ln f(t) \right)^{1/2}}$$

та

$$a(t) = \frac{1}{t^{p-1} e^{\alpha t}} .$$

Теорему 8 доведено.

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наук. думка, 1968. – 354 с.
2. *Мельников А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения: негладкость коэффициентов, регрессионные модели и стохастическая аппроксимация // Успехи мат. наук. – 1996. – **51**, № 5. – С. 43 – 136.
3. *Булдыгин В. В., Солнцев С. А.* Функциональные методы в задачах суммирования случайных величин. – Киев: Наук. думка, 1989. – 188 с.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 576 с.

Одержано 23.05.2000